

ランダム・ウォーク・プロセスを利用した 乱数検定法の感度*

石 橋 正 士**

Previously the method for testing randomness utilizing random walk process has been suggested by the author. This method has a function of the frequency test. For this purpose, it is necessary to know the first order of partial derivatives of probability function $U(P \rightarrow Q_i)$ which a random walk point starting from a point P arrives at a lattice point Q_i on a boundary Γ of a simply connected domain. But in general, it is difficult to calculate the partial derivative analytically.

In this paper, several examples of partial derivatives are shown. They are concerned with a boundary Γ of simple shape, and obtained by the numerical calculation named mass division method. The magnitude of partial derivative corresponds to the sensitivity of this method. Further, the relation between this method and other method (frequency test, serial test, run test, etc.) is briefly described.

1. まえがき

まえにランダム・ウォーク・プロセスを利用した乱数検定法を提案したが^{1,2)}, この方法は検定すべき乱数を用いて格子空間上にとった所定の単一連結領域 M 内で規格化したランダム・ウォークを行なわせ, 到達点である M の境界 Γ 上の格子点 Q_i ($i=1, 2, \dots, n$) へのランダム・ウォーク・ポイント (以下 r.w.p. と略す) の到達頻度 \tilde{U} (これを実験値とよぶ) を求め, 一方理想的なランダムネスを有する乱数を用いたとしてランダム・ウォークを行なって得られるであろう到達確率 U (これを理論値とよぶ) を計算によって求めて, 両者の間で χ^2 検定を行ない, 検定すべき乱数をチェックするものである。ただし r.w.p. が Q_i へ到達したときは再び M 内の出発点 P に戻し, 引き続きランダム・ウォークを続けさせるものとする。

この方法をさらに発展させると従来から主として頻度検定によって乱数の出現確率を求めていたものが (ただ個数を数えるにすぎないが), 本方法で, より能率よく出現確率を求めうるようになった。このとき, 乱数の出現確率 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ の期待値からの偏り

* Sensitivity of method of testing randomness utilizing random walk process, by Tadashi Ishiketa (Faculty of Engineering Science, Osaka University)

** 大阪大学 基礎工学部

$d\alpha, d\beta, d\gamma, \dots$ が上述の到達頻度にどのように現われるかを知らるのに感度とよぶべき偏導関数 $\frac{\partial U}{\partial \alpha}, \frac{\partial U}{\partial \beta}, \frac{\partial U}{\partial \gamma}, \dots$ の値が知られていなければならないが, これは P, Q_i の位置や Γ の形に依存しているため一般的表現を求めることが困難である。ここでは利用し易い特定の Γ についての感度を求めるとともに本検定法と他の乱数検定法との関連について得られたところを述べる。

2. 到達確率と乱数の出現確率の偏りとの関係

表現を簡単にするために空間は二次元とする。到達確率 U は M 内の出発点 P と Γ 上の到達点 Q_i の位置, Γ の形および乱数の出現確率 $\alpha=\beta=\gamma=\delta=1/4$ (それぞれ r.w.p. の $+X, +Y, -X, -Y$ への方向を決定する確率) によって決定され, $\Delta_h U=0$ を満足する。また到達頻度 \tilde{U} も P および Q_i の位置, Γ の形, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ によって決まる。一般に $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ が期待値 $1/4$ よりそれぞれ $d\alpha, d\beta, d\gamma, d\delta$ だけ偏っているとすると \tilde{U} を Taylor 展開して次式を得る。

$$\begin{aligned} \tilde{U}(P \rightarrow Q_i; \frac{1}{4}+d\alpha, \frac{1}{4}+d\beta, \frac{1}{4}+d\gamma, \frac{1}{4}+d\delta) \\ - U(P \rightarrow Q_i; \text{all } \frac{1}{4}) = d\alpha \frac{\partial U}{\partial \alpha} + d\beta \frac{\partial U}{\partial \beta} + d\gamma \frac{\partial U}{\partial \gamma} \end{aligned}$$

$$+d\delta \frac{\partial U}{\partial \delta} + \frac{1}{2} \left(d\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + d\beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \dots \right)^2 U + \dots (1)$$

$d\alpha, d\beta, d\gamma, \dots$ が十分小さいときは二次以上の微小量を見捨てると (1) 式の左辺は実験値と理論値との差で求められる量であり、一方右辺において $\frac{\partial U}{\partial \alpha}, \frac{\partial U}{\partial \beta}, \dots$ が既知ならば未知の $d\alpha, d\beta, \dots$ を決定することができる。ここで $\frac{\partial U}{\partial \alpha}, \frac{\partial U}{\partial \beta}, \dots$ が 1 より大きいときは $d\alpha, d\beta, \dots$ の検出に本検定法の感度がよいといえる。この乱数検定の主目的である $d\alpha, d\beta, \dots$ の決定においては一般に n 個の到達点 Q_i についてそれぞれ (1) 式が得られるので、 $d\alpha, d\beta, \dots$ は $n+1$ 個の連立方程式から最小自乗法によって決定する。 $(d\alpha+d\beta+d\gamma+d\delta=0$ を考慮する。)

3. 偏導関数の計算

U は $4_h U=0$ を満足するから、Liebmann 法を工夫した質量分割法によって P, Q_i, Γ さえ与えておけば、 $\frac{\partial U}{\partial \alpha}, \frac{\partial U}{\partial \beta}, \dots$ の値が求められる。以下 Γ が対称性の高い簡単な形の場合の偏導関数を求めてみよう。

Fig. 1 (a) の場合

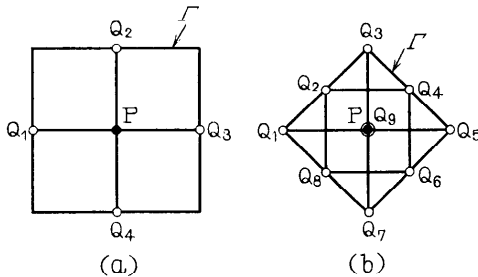


Fig. 1 An example of high symmetrical boundary Γ

$$U(P \rightarrow Q_i; \text{all } \frac{1}{4}) = \frac{1}{4} \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

$$\tilde{U}(P \rightarrow Q_1; \frac{1}{4} + d\alpha, \frac{1}{4} + d\beta, \dots) = \frac{1}{4} + d\gamma$$

$$\tilde{U}(P \rightarrow Q_4; \frac{1}{4} + d\alpha, \frac{1}{4} + d\beta, \dots) = \frac{1}{4} + d\delta$$

(1) 式の関係より

$U(P \rightarrow Q_1)$ に関して

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{\partial U}{\partial \beta} = \frac{\partial U}{\partial \delta} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial \gamma} = 1 \quad \text{高次のものはすべて 0.}$$

$U(P \rightarrow Q_i)$ に関して

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{\partial U}{\partial \beta} = \frac{\partial U}{\partial \gamma} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial \delta} = 1 \quad \text{同様にすべて 0.}$$

Fig. 1 (b) の場合、点 P は出発点でもあり、また Q_9 なる到達点でもある。すなわち P から P へ再帰する確率が $U(P \rightarrow Q_9)$ である。

$$U(P \rightarrow Q_i; \text{all } \frac{1}{4}) = \frac{1}{16} \quad i=1, 3, 5, 7$$

$$U(P \rightarrow Q_j; \text{all } \frac{1}{4}) = \frac{1}{8} \quad j=2, 4, 6, 8$$

$$U(P \rightarrow Q_9; \text{all } \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$$

$$\tilde{U}(P \rightarrow Q_1; \frac{1}{4} + d\alpha, \dots) = (\frac{1}{4} + d\gamma)^2$$

$$\tilde{U}(P \rightarrow Q_2; \frac{1}{4} + d\alpha, \dots) = 2(\frac{1}{4} + d\gamma)(\frac{1}{4} + d\beta)$$

$$\tilde{U}(P \rightarrow Q_9; \frac{1}{4} + d\alpha, \dots)$$

$$= 2 \left[(\frac{1}{4} + d\alpha)(\frac{1}{4} + d\gamma) + (\frac{1}{4} + d\beta)(\frac{1}{4} + d\delta) \right]$$

(1) 式の関係より

$U(P \rightarrow Q_1)$ に関して

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{\partial U}{\partial \beta} = \frac{\partial U}{\partial \delta} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial \gamma} = \frac{1}{2}$$

$U(P \rightarrow Q_2)$ に関して

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{\partial U}{\partial \delta} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial \beta} = \frac{\partial U}{\partial \gamma} = \frac{1}{2}$$

$U(P \rightarrow Q_9)$ に関して

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{\partial U}{\partial \beta} = \frac{\partial U}{\partial \gamma} = \frac{\partial U}{\partial \delta} = \frac{1}{2}$$

さらに二次の偏導関数についてもしらべてみよう。

$U(P \rightarrow Q_1)$ に関して

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \gamma^2} = 2 \quad \text{他の二次の偏導関数ならびに二次以上はすべて 0.}$$

$U(P \rightarrow Q_2)$ に関して

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \beta \partial \gamma} = 2 \quad \text{他の偏導関数は同様にすべて 0.}$$

$U(P \rightarrow Q_9)$ に関して

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha \partial \gamma} = \frac{\partial^2 U}{\partial \beta \partial \delta} = 2 \quad \text{同様にすべて 0.}$$

次に Γ の対称性が Fig. 1 より低い場合の例について考える。Fig. 2 (a) の場合

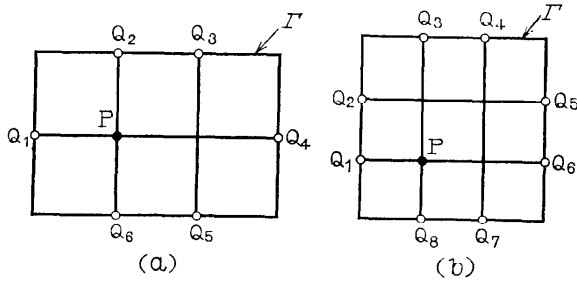


Fig. 2 An example of low symmetrical boundary Γ

$$U(P \rightarrow Q_i; \text{all } \frac{1}{4}) = \frac{4}{15} \quad (i=1, 2, 6)$$

$$U(P \rightarrow Q_j; \text{all } \frac{1}{4}) = \frac{1}{15} \quad (j=3, 4, 5)$$

$$\tilde{U}(P \rightarrow Q_i; \frac{1}{4} + d\alpha, \dots) = (\frac{1}{4} + d\gamma)$$

$$+ (\frac{1}{4} + d\gamma)^2 (\frac{1}{4} + d\alpha) + \dots$$

$$\doteq \frac{4}{15} + \frac{16}{225} d\alpha + \frac{256}{225} d\gamma$$

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{16}{225}, \quad \frac{\partial U}{\partial \gamma} = \frac{256}{225} > 1, \quad \frac{\partial U}{\partial \beta} = \frac{\partial U}{\partial \delta} = 0$$

$U(P \rightarrow Q_2)$ に関して

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{\partial U}{\partial \gamma} = \frac{16}{225}, \quad \frac{\partial U}{\partial \beta} = \frac{240}{225} > 1, \quad \frac{\partial U}{\partial \delta} = 0$$

同様に $U(P \rightarrow Q_3)$ に関して

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{64}{225}, \quad \frac{\partial U}{\partial \beta} = \frac{60}{225}, \quad \frac{\partial U}{\partial \gamma} = \frac{4}{225}, \quad \frac{\partial U}{\partial \delta} = 0$$

$U(P \rightarrow Q_4)$ に関して

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{124}{225}, \quad \frac{\partial U}{\partial \beta} = \frac{\partial U}{\partial \delta} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \gamma} = \frac{4}{225}$$

$U(P \rightarrow Q_5)$ に関して

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{64}{225}, \quad \frac{\partial U}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \gamma} = \frac{4}{225}, \quad \frac{\partial U}{\partial \delta} = \frac{60}{225}$$

$U(P \rightarrow Q_6)$ に関して

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{\partial U}{\partial \gamma} = \frac{16}{225}, \quad \frac{\partial U}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \delta} = \frac{240}{225} > 1$$

次に Fig. 2 (b) の場合

$$U(P \rightarrow Q_i; \text{all } \frac{1}{4}) = \frac{7}{24} \quad (i=1, 8)$$

$$U(P \rightarrow Q_j; \text{all } \frac{1}{4}) = \frac{2}{24} \quad (j=2, 3, 6, 7)$$

$$U(P \rightarrow Q_k; \text{all } \frac{1}{4}) = \frac{1}{24} \quad (k=4, 5)$$

$$\tilde{U}(P \rightarrow Q_i; \frac{1}{4} + d\alpha, \dots) \doteq \frac{7}{24} + \frac{1}{9} d\alpha + \frac{1}{9} d\beta$$

$$+ \frac{272}{225} d\gamma + \frac{1}{9} d\delta$$

以下同様に計算を行なう。

Table 1. に一次の偏導関数の値を示す。

次に Γ を固定しておいて空間 M を広げた場合、一次の偏導関数はどのような傾向をもつかを知るために、最も対称性の高い正方形を選びかつ出発点をその中心に固定して格子点数を変えてみる。Fig. 3 に $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_n$ を示してある。 Γ_1 は Fig. 1 (a) に同じであり、 Γ_2 は次のようになる。

Table 1. Partial derivatives of function U (shown in Fig. 2 (b))

Point of arrival	$\frac{\partial U}{\partial \alpha}$	$\frac{\partial U}{\partial \beta}$	$\frac{\partial U}{\partial \gamma}$	$\frac{\partial U}{\partial \delta}$
Q_1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{272}{225}$	$\frac{1}{9}$
Q_2	$\frac{11}{144}$	$\frac{53}{144}$	$\frac{59}{144}$	$\frac{5}{144}$
Q_3	$\frac{5}{144}$	$\frac{59}{144}$	$\frac{53}{144}$	$\frac{11}{144}$
Q_4	$\frac{7}{36}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
Q_5	$\frac{13}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
Q_6	$\frac{59}{144}$	$\frac{5}{144}$	$\frac{11}{144}$	$\frac{53}{144}$
Q_7	$\frac{53}{144}$	$\frac{11}{144}$	$\frac{5}{144}$	$\frac{59}{144}$
Q_8	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{272}{225}$	$\frac{1}{9}$

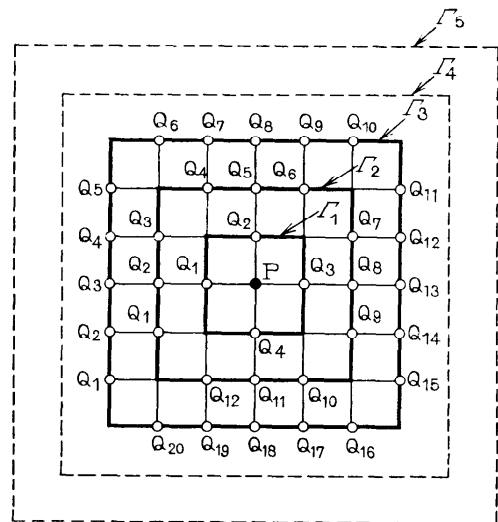


Fig. 3 Series of boundary Γ_n

$$U(P \rightarrow Q_i; \text{all } \frac{1}{4}) = \frac{1}{16} \quad (i=1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12)$$

$$U(P \rightarrow Q_j; \text{all } \frac{1}{4}) = \frac{1}{8} \quad (j=2, 5, 8, 11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}(P \rightarrow Q_i; \frac{1}{4} + d\alpha, \dots) &= \frac{1}{16} + \frac{19}{144}d\alpha + \frac{19}{144}d\beta \\ &+ \frac{119}{144}d\gamma + \frac{54}{144}d\delta \end{aligned}$$

同様にして求めた一次の偏導関数の値を Table 2.

Table 2. Partial derivatives of function U on Γ_2 (shown in Fig. 3)

Point of arrival	$\frac{\partial U}{\partial \alpha}$	$\frac{\partial U}{\partial \beta}$	$\frac{\partial U}{\partial \gamma}$	$\frac{\partial U}{\partial \delta}$
Q ₁	$\frac{19}{144}$	$\frac{19}{144}$	$\frac{119}{144}$	$\frac{54}{144}$
Q ₂	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{5}{16}$
Q ₃	$\frac{19}{144}$	$\frac{54}{144}$	$\frac{119}{144}$	$\frac{19}{144}$
Q ₄	$\frac{19}{144}$	$\frac{119}{144}$	$\frac{54}{144}$	$\frac{19}{144}$
Q ₅	$\frac{5}{16}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$
Q ₆	$\frac{54}{144}$	$\frac{119}{144}$	$\frac{19}{144}$	$\frac{19}{144}$
Q ₇	$\frac{119}{144}$	$\frac{54}{144}$	$\frac{19}{144}$	$\frac{19}{144}$
Q ₈	$\frac{27}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$
Q ₉	$\frac{119}{144}$	$\frac{19}{144}$	$\frac{19}{144}$	$\frac{54}{144}$
Q ₁₀	$\frac{54}{144}$	$\frac{19}{144}$	$\frac{19}{144}$	$\frac{119}{144}$
Q ₁₁	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{27}{32}$
Q ₁₂	$\frac{19}{144}$	$\frac{19}{144}$	$\frac{54}{144}$	$\frac{119}{144}$

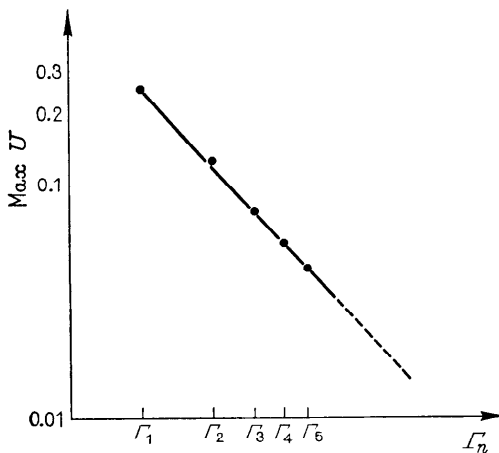


Fig. 4 Relation between boundary Γ_n (Shown in Fig. 3) and Max U

に示す。 Γ_3 の場合は

$$U(P \rightarrow Q_i; \text{all } \frac{1}{4}) = \frac{3}{103} \quad (i=1, 5, 6, 10, 11, 15, 16, 20)$$

$$U(P \rightarrow Q_j; \text{all } \frac{1}{4}) = \frac{6}{103} \quad (j=2, 4, 7, 9, 12, 14, 17, 19)$$

$$U(P \rightarrow Q_k; \text{all } \frac{1}{4}) = \frac{8}{103} \quad (k=3, 8, 13, 18)$$

U を表わす数列が Γ_n とともに複雑になり \tilde{U} を求めることが困難となるが、 Γ_n と Max U との関係が Fig. 4 に示すように直線的に減少するので確率の性質から一次の偏導関数も Γ_n とともに減少する。したがって格子点数が多いほど感度は悪くなるといえる。

4. 他の乱数検定法との関連

一般に与えられた数列が乱数列であるかどうかは各種の検定法を組み合わせ用いて判定する。用いられる検定法には数列のローカルランダムネス³⁾を判定の対象とするものが多く、さらにその一面のみを判定するものも多い。ここではそれらの検定法の特徴と本検定法との関連について述べる。

4.1 頻度検定

頻度検定は乱数列の各数字の出現個数を調べるだけであるから、直接ランダムネスを判定する方法ではない。いいかえれば等確率性を等個数に置きかえて各数字をまったく独立に判定するものである。Fig. 1 (a) の場合、 $\tilde{U}-U$ は Taylor 展開から一次の偏導関数および一次の微少量 $d\alpha, \dots$ によって完全にきまる。これは乱数列をまったく独立に（一次の関係のみによって）判定しているから頻度検定そのものに相当する。

4.2 継次検定

継次検定は乱数列の相続く数字の出現個数を調べるもので、頻度検定よりは数字間の関連性の情報は多い。Fig. 1 (b) の場合、 $\tilde{U}-U$ は二次までの偏導関数を含む。この二次ということは相続く乱数の出現確率と r.w.p. の到達確率との関連性の情報であるから、これは継次検定に相当する。なお Fig. 1 (a), (b) とともに偏導関数の値がすべて等しいから各数字を等しい重みで判定している点も頻度検定、継次検定に同等であると説明できる。

4.3 連検定

連検定は同種の数字の相続く長さとその出現確率を知るためのものであってより直接的にランダムネスの

Table 4. Results of random walk test using Fig. 1 (a)

Point of arrival	U	\tilde{U}	$\tilde{U}-U$
Q ₁	0.250	0.233	0.018
Q ₂	0.250	0.254	0.004
Q ₃	0.250	0.268	-0.017
Q ₄	0.250	0.245	-0.005
Total	1.000	1.000	0

1000 random trips are carried out.

Table 5. Results of random walk test using Fig. 1 (b)

Point of arrival	U	\tilde{U}	$\tilde{U}-U$
Q ₁	0.063	0.056	-0.007
Q ₂	0.125	0.118	-0.007
Q ₃	0.063	0.068	0.005
Q ₄	0.125	0.120	-0.005
Q ₅	0.063	0.074	0.011
Q ₆	0.125	0.128	0.003
Q ₇	0.063	0.066	0.003
Q ₈	0.125	0.096	-0.029
Q ₉	0.250	0.274	0.024
Total	1.002	1.000	-0.002

500 random trips are carried out.

Table 6. Results of random walk test using Fig. 2 (a)

Point of arrival	U	\tilde{U}	$\tilde{U}-U$
Q ₁	0.267	0.246	-0.021
Q ₂	0.267	0.276	0.009
Q ₃	0.067	0.068	0.001
Q ₄	0.067	0.080	0.013
Q ₅	0.067	0.066	-0.001
Q ₆	0.267	0.262	-0.005
Total	1.002	0.998	-0.004

740 random trips are carried out.

Table 7. Results of random walk test using Fig. 2 (b)

Point of arrival	U	\tilde{U}	$\tilde{U}-U$
Q ₁	0.292	0.273	-0.019
Q ₂	0.083	0.081	-0.002
Q ₃	0.083	0.091	0.008
Q ₄	0.042	0.032	-0.010
Q ₅	0.042	0.059	0.017
Q ₆	0.083	0.093	0.010
Q ₇	0.083	0.087	0.004
Q ₈	0.292	0.283	-0.009
Total	1.000	0.999	-0.001

494 random trips are carried out.

Table 8. Estimates of deviation of probability

Γ	$d\alpha$	$d\beta$	$d\tau$	$d\delta$
Fig. 1 (a)	0.018	0.004	-0.017	-0.005
Fig. 1 (b)	0.018	0.004	-0.017	-0.005
Fig. 2 (a)	0.022	-0.001	-0.014	-0.007
Fig. 2 (b)	0.009	0.012	-0.018	-0.003

値と(1)式とから最小自乗法で求めた乱数の出現確率の偏より $d\alpha, d\beta, \dots$ を Table 8. に示す。これらが Γ によらず同じような傾向が強ければ、検定した数列がランダムネスを有しているという結論の信頼度が高くなるといえる。なお前述のように Fig. 1 (a) (b) は Γ の対称性が高いので偏よりを等しい重みで検定していることになり、一方 Fig. 2 (a) (b) は対称性が低く、偏導関数からわかるように等しい重みで偏よりを検定していないといえる。したがって Table 8. にはその差も影響しているであろうし、統計的変動も加わっているとみなければならぬ。

6. むすび

ランダムネスの数学的な定義と確率的な実験を行なう場合必要となる乱数のもつべきランダムネスの解釈との間にはかなりのひらきがある。このひらきをうずめるものの一つとして確率関数の偏導関数が役に立つのではないと思われる。すなわち頻度検定における乱数個々の独立性(ランダムネスの一つの解釈)は一次の偏導関数によってのみ決定されることと等価であるとか、継次検定における独立性とは二次までであるとか、さらに Fig. 2, 3 の Γ を用いる検定では無限に連なる乱数列(グローバルランダムネス³⁾)も検定の対象になることが関数 U の質量分割法による展開から示されうるとかである。将来確率的な実験の目的とランダムネスとの関連を明らかにしなければならない場合にもこの考えが役立つであろう。

参考文献

- 1) 平井・浅居・石桁：ランダム・ウォーク装置と乱数検定への応用，電子通信学会電子計算機の研究，昭和38年1月，pp. 8~12
- 2) 石桁：ランダム・ウォークを利用した乱数検定法と乱数の分布変換法，情報処理 Vol. 6, No. 5, (1965) pp. 253~259.
- 3) B. Jansson: Random Number Generators, Victor Petersons Bokindustri Aktiefbolag Stockholm, (1966), Chap. 4.
- 4) 石桁：ランダム・ウォーク・プロセスを利用した乱数検定について，情報処理学会第7回大会予稿集，(1966)，pp. 51~52.