準安定な補間過程の一構成法*
—選点補間多項式による函数の逐次近似—

鳥　居　達　生**

In a successive approximation for a given function $f(x)$ over a finite range by a sequence of interpolating polynomials, we consider on the propagation of rounding error and on the reduction of number of operations. Propagation error may depend upon the norm $\|L_n\|$ of $n-1$ th interpolating polynomial $L_n(f;\,x)$.

If the norm $\|L_n\|$ satisfies

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n\|=\infty \quad \text{and} \quad \lim_{n\to\infty}\|L_n\|^{\frac{1}{n}}=1,$$

then we call in this paper the interpolation semi-stable.

We construct a semi-stable and "economical" interpolation process generating the interpolating points by a simple algorithm.

As the application, we show two methods to obtain the truncated series of Chebyshev or Legendre polynomials for a "well-behaved" function on $[-1, 1]$ without their zero points.

1. はじめに

区間 [a, b] で連続な函数 $f(x)$ を多項式によって近似するとき，その次数は $f(x)$ と許される誤差限界 ε だけでなく近似の方法にも関係する．$p_k(x)$ をたしかに k 次の多項式とする．$f(x)$ に対し適当に n と数列 $\{c_k\}$ をとれば

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}c_k p_k(x)|<\varepsilon \qquad (1)$$

をみたすようにできる．必要な精度に応じて項数 n の最小値 N と $c_0, c_1, \cdots, c_{N-1}$ を定めることは必ずしも容易ではない．条件 (1) をみたす多項式を構成する方法として．一般に望ましいことは次の三点であろう．

1) $f(x)$ に関する条件がゆるいこと．
2) $f(x)$ を与えたとき，ε に対して N が小さいこと．
3) $N+1$ 個のパラメータ $N, c_0, c_1, \cdots, c_{N-1}$ を決定する算法があって，しかもその算法が簡潔で演算回数が少ないこと．

ここでは演算の種類に極限演算を含めない．また項数Nをも含めて計算の対象としていることを断っておこう．

$f(x)$ が連続でさえあれば，$f(x)$ の（一様）最良近似多項式は 2) を満足するが，それをつくることは一般にむずかしい．$f(x)$ が $[-1, 1]$ で十分滑らかならば，$f(x)$ の準最良近似式として Chebyshev 補間多項式が用いられる．

補間多項式を数値的に構成するときは，補間多項式の剰余項はもちろんのこと，丸め誤差の影響についても考えなければならない．前者の研究の歴史は古く，文献も極めて多い（たとえば 1)，2)）．補間多項式が $f(x)$ に収束するためには $f(x)$ の性質と補間点の分布について，ある関係がなければならない．これについては多くのことが知られているが本論文と関連のある結果だけ二つ示す．

[a, b] 上の実函数 $f(x)$ を複素数 z-平面の函数 $f(z)$ と考えて [a, b] の両端を中心に半径 $b-a$ の二つの円を描く．二円の和集合にあたる閉領域を $\bar{D}$ とする．$f(x)$ が $\bar{D}$ で正則ならば [a, b] 上の補間点をどのようにとっても，補間多項式は [a, b] で $f(x)$ に一様収束する．また領域 D は最小である（3)，pp. 249～250)．

これに対し $f(z)$ の条件をゆるめると，補間点の分布に次の条件が加わる．

補間点の極限分布が Chebyshev 分布ならば，$[-1, 1]$ で解析的な函数 $f(x)$ の補間多項式は $f(x)$ に一

* A Construction of Semi-stable Interpolation Process, by Tatsuo Torii (Osaka University)
** 大阪大学工学部

様収束する．この逆も成り立つ（3)，pp. 254，原文献は 6))．

いうまでもなく，これら二つの定理において，補間多項式を数値的に構成するとき発生する計算誤差（丸め誤差）は考慮されていない．そこで補間法の“安定性”の立場から，補間点の分布はいかにあるべきかについて第2節で述べる．第3節では $[-1, 1]$ で十分滑らかな函数に対し要求 2)，3) を解決することを目的として，一つの算法を提示する．第4節では，応用例として，補間点を1点ずつ追加しながら $f(x)$ を Chebyshev 多項式系あるいは Legendre 多項式系で展開する方法を示す．

2. 補間多項式の安定性

区間 [a, b] 上に n 個の点 $x_k^{(n)}$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ がある．[a, b] で定義された函数 $f(x)$ の補間多項式 $L_n(f; x)$ は，相異なる補間点において

$$L_n(f;\ x_k^{(n)})=f(x_k^{(n)}),\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n \qquad (2)$$

をみたす．

補間多項式を数値的に構成するとき，必ず計算誤差が発生する．第一に函数値 $f(x)$ の計算誤差 δf．第二に補間多項式をつくる過程で発生する四則演算の丸め誤差である．

δf にもとづく伝播誤差とは

$$L_n(\delta f)\equiv L_n(f+\delta f;\ x)-L_n(f;\ x)$$

のことをいう．

函数 $f(x)$ と線形作用素 L_n のノルムを，それぞれ

$$\|f\|=\max_{a\le x\le b}|f(x)| \qquad (3\,\mathrm{a})$$

$$\|L_n\|=\sup_{\|f\|=1}\|L_n(f;\ x)\| \qquad (3\,\mathrm{b})^*$$

で定義する．

$f(x)$ の計算誤差 δf は一般に確率変数であるが，

$$\|\delta f\|\le\varepsilon_r \qquad (4)$$

をみたすものとする．ここで正数 ε_r は $f(x)$ の計算精度だけに依存し，あらかじめ与えられる．明らかに伝播誤差の上限は

$$\|L_n(\delta f)\|\le\|L_n\|\|\delta f\|\le\|L_n\|\varepsilon_r \qquad (5)$$

となる．一般に近似式をつくる過程で発生する計算誤差の伝播は複雑なので，δf にもとづく伝播誤差だけによって算法の安定，不安定，準安定を定義しよう．

n に無関係な正数 c を適当にとり，近似式のノルム $\|L_n\|$ が，すべての n に対し

$$\|L_n\|<c \qquad (6\,\mathrm{a})$$

をみたすならば，この算法は安定という．

$$\limsup_{n\to\infty}\|L_n\|^{1/n}=\rho>1 \qquad (6\,\mathrm{b})$$

ならば，不安定．

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n\|=\infty,\ \lim_{n\to\infty}\|L_n\|^{1/n}=1 \qquad (6\,\mathrm{c})$$

ならば，準安定という．

補間多項式の場合，補間点をどのようにとっても $\|L_n\|\ge A\log n$ (A；正の定数）であるから[4]，補間多項式を準安定に構成することが，とくに問題となる．

補間多項式 $L_n(f+\delta f;\ x)$ の誤差は

$$\|L_n(f+\delta f;\ x)-f(x)\|\le\|L_n(f;\ x)-f(x)\|+\|L_n\|\varepsilon_r \qquad (7)$$

である．右辺の第1項は剰余項で，第2項は伝播誤差の上限である．$f(x)$ に適当な条件を付せば，$n\to\infty$ のとき剰余項は0に収束するが，伝播誤差は $f(x)$ のいかんを問わず∞に発散する．

$f(x)$ に対し近似の方法と n を適当に選んで

$$\|L_n(f;\ x)-f(x)\|+\|L_n\|\varepsilon_r<\varepsilon \qquad (8)$$

ならば，このときに限り，いかなる δf に対しても $f(x)$ を所要の精度で近似できることになる．実際，上式をみたす n が存在しないとき条件 (4) をみたす δf を適当にとれば，$L_n(f+\delta f;x)$ の絶対誤差は ε あるいは ε を越すようにできる．

つぎに開区間 (a, b) 上の点例 $\{x_k^{(n)}\}$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ の分布函数 $\mu_n(x)$ を定義する．

$$\mu_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(x-x_k^{(n)}) \qquad (9)$$

$$E(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

ただちに $\mu_n(a)=0$, $\mu_n(b)=1$, かつ $\mu_n(x)$ は非減少で右側から連続となる．

ある規則で数列 $\{x_k^{(n)}\}$ をつくるとする．$\mu_n(x)\to\mu(x)$ $(n\to\infty)$ ならば $\mu(x)$ を $\{x_k^{(n)}\}$ の極限分布という．

[a, b] における一様分布函数とは

$$\mu(x)=(x-a)/(b-a) \qquad (10)$$

Chebyshev 分布函数とは

$$\mu(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad (11)$$

をいう（3)，pp. 252)．

さらに

$$u_n(x)=\int_{-1}^{1}\log\frac{1}{|x-t|}d\mu_n(t),\ x\in[-1,\ 1] \qquad (12)$$

とおけば

$$=\frac{1}{n}\log|(x-x_1^{(n)})(x-x_2^{(n)})\cdots(x-x_n^{(n)})|^{-1}$$

* 正しくは右辺の本質的上限である，以下同じ．

であるから $u_n(x_k^{(n)})=\infty$. $u_n(x)$ は補間多項式の剰余項の収束性[3] だけでなく，算法の安定性を吟味するときにも重要な役割りを果す.

分布函数 $\mu(x)$ が滑らかならば

$$u(x)=\int_{-1}^{1}\log\frac{1}{|x-t|}d\mu(t) \tag{13}$$

は存在する.（3) pp. 255).

さらに $u_n(x)$ と $u(x)$ に関して，次のことが成り立つ.

補題 1. $[-1,\ 1]$ のほとんどすべての点で

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\log\frac{1}{|x-t|}d\mu_n(t)=\int_{-1}^{1}\log\frac{1}{|x-t|}d\mu(t).$$（3) pp. 256).

補題 2. 対数ポテンシャル (13) が $[-1,\ 1]$ 上ほとんどいたるところ定数 $(\log 2)$ となるのは $\mu(x)$ が Chebyshev 分布のときに限る（3), pp. 253, pp. 259).

伝播誤差の安定性は，補間多項式のつくり方に関係するので，次の三つの代表的な場合について述べる．点列 $\{x_k^{(n)}\}$ において $x_k^{(n)}$ は必ずしも n に依存しないので簡単のため，以下 x_k と書く.

周知のように Lagrange 補間多項式は

$$L_n(f;\ x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega_n(x)}{(x-x_k)\omega_n'(x_k)}f(x_k) \tag{14}$$

$$\omega_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

Newton 補間多項式は

$$L_n(f,\ \omega;\ x)=a_0+a_1\omega_1(x)+\cdots+a_{n-1}\omega_{n-1}(x) \tag{15}$$

$$a_k=\sum_{j=1}^{k+1}\frac{f(x_j)}{\omega_{k+1}'(x_j)},\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$$

で与えられる.

ある直交多項式系 $\{\varphi_n(x)\}$ を用い補間法によって $f(x)$ を展開し

$$L_n(f,\ \varphi;\ x)=c_0^{(n)}\varphi_0(x)+c_1^{(n)}\varphi_1(x)+\cdots+c_{n-1}^{(n)}\varphi_{n-1}(x) \tag{16}$$

$$L_n(f,\ \varphi;\ x_k)=f(x_k),\quad k=1,2,\cdots,n$$

とする．ただし n 次の直交多項式 $\varphi_n(x)$ は，簡単のため次の二つの条件をみたすように正規化する.

$$\max_{-1\le x\le 1}|\varphi_n(x)|\equiv\|\varphi_n\|=1,\ n=0,1,2,\cdots \tag{17}$$

$w(x)$ を $[-1,1]$ で正の重み函数として

$$\int_{-1}^{1}w(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx=\delta_{mn}. \tag{18}$$

以上準備して本節の結論をのべる.

定理 補間点 $x_k^{(n)}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ の極限分布が Chebyshev 分布のときに限り Lagrange 補間多項式 (14), Newton 補間多項式 (15) および補間法による $f(x)$ の直交展開式 (16) は準安定に構成できる．ここで点 $x_k^{(n)}$ は必ずしも n に依存しない.

証明. 1) Lagrange 補間多項式について考える．補間点はすべて相異なるから

$$M_n=\max_{k\le n}\max_{|x|\le 1}\left|\frac{\omega_n(x)}{(x-x_k)\omega_n'(x_k)}\right| \tag{19}$$

とおけば，一定の n に対し $M_n<\infty$. またすべての正整数 n に対し次式が成り立つ.

$$M_n\le\|L_n\|\le nM_n. \tag{20}$$

$\omega_n(x)$, $\omega_n(x)/(x-x_k)$, $\omega_n'(x)$ の零点の分布は $n\to\infty$ のとき同一の分布函数 $\mu(x)$ に収束する.

点列 $\{x_k\}$ を適当にとれば，**補題 1** より $[-1,\ 1]$ 上ほとんどいたるところで

$$\begin{aligned}u(x)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log|\omega_n(x)|^{-1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-1}\log\left|\frac{\omega_n(x)}{x-x_k}\right|^{-1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-1}\log|\omega_n'(x)|^{-1}\end{aligned}$$

とすることができる．仮定により $\mu(x)$ は Chebyshev 分布であるから，**補題 2** より，このときに限って $u(x)$ は $[-1,\ 1]$ 上ほとんどいたるところ定数となる．したがって任意の $t\epsilon[-1,\ 1]$ に対し，$[-1,\ 1]$ 上ほとんどすべての点で

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left|\frac{\omega_n(x)}{(x-t)\omega_n'(t)}\right|=0$$

が成り立つ．上式と M_n の定義から

$$\lim_{n\to\infty}M_n^{\frac{1}{n}}=1. \tag{21}$$

すなわち，補間点の極限分布が Chebyshev 分布のときに限り $M_n^{\frac{1}{n}}\to 1$ $(n\to\infty)$ となる.

(21) が成り立つならば，不等式 (20) より直接

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n\|^{\frac{1}{n}}=1 \tag{22}$$

が得られる.

(21) が成り立たなければ，すなわち $\lim_{n\to\infty}M_n^{\frac{1}{n}}=\rho\neq 1$ ならば，(20) より明らかに $\lim_{n\to\infty}\|L_n\|^{\frac{1}{n}}=\rho$ となる．ところで，補間点をどのようにとっても $\|L_n\|$ は ∞ に発散する（たとえば 4)）ことが，わかっているので $\rho<1$ の場合は問題にならない．したがって

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n\|^{\frac{1}{n}}=\rho>1. \tag{22'}$$

上述した二つの場合から $\mu(x)$ が Chebyshev 分布

ならば Lagrange 補間多項式の構成は準安定，$\mu(x)$ が Chebyshev 分布でなければ，その構成は不安定である．

2) Newton 補間多項式の場合も，前述の方法にならって証明できる．証明は略す．

3) (16) で定義された $L_n(f, \varphi : x)$ が補間点においてみたすべき条件を

$$V_n \boldsymbol{c}_n = \boldsymbol{f}_n \tag{23}$$

と書きあらためる．ここで

$$V_n \equiv \begin{bmatrix} \varphi_0(x_1), & \varphi_1(x_1), & \cdots, & \varphi_{n-1}(x_1) \\ \varphi_0(x_2), & \varphi_1(x_2), & \cdots, & \varphi_{n-1}(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_0(x_n), & \varphi_1(x_n), & \cdots, & \varphi_{n-1}(x_n) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}_n = (c_0^{(n)}, c_1^{(n)}, \cdots, c_{n-1}^{(n)})'$$

$$\boldsymbol{f}_n = (f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n))'$$

V_n は必ずしも直交行列ではない．V_n の逆行列を求める．

$$V_n^{-1} \equiv \begin{bmatrix} \gamma_0^{(1)}, & \gamma_0^{(2)}, & \cdots, & \gamma_0^{(n)} \\ \gamma_1^{(1)}, & \gamma_1^{(2)}, & \cdots, & \gamma_1^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{n-1}^{(1)}, & \gamma_{n-1}^{(2)}, & \cdots, & \gamma_{n-1}^{(n)} \end{bmatrix}$$

とおけば，$V_n V_n^{-1} = I$ より

$$\gamma_0^{(k)}\varphi_0(x_i) + \gamma_1^{(k)}\varphi_1(x_i) + \cdots + \gamma_{n-1}^{(k)}\varphi_{n-1}(x_i) = \delta_{ik} \qquad i, k = 1, 2, \cdots, n \tag{24}$$

となる．したがって $\gamma_j^{(k)}$ は常に

$$\gamma_0^{(k)}\varphi_0(x) + \gamma_1^{(k)}\varphi_1(x) + \cdots + \gamma_{n-1}^{(k)}\varphi_{n-1}(x) = \frac{1}{x - x_k}\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k)} \tag{25}$$

をみたさなければならない．両辺 $n-1$ 次の多項式であるからこれをみたす $\{\gamma_j^{(k)}\}$ は一意的である．

上式と直交条件 (18) より

$$\gamma_j^{(k)} = \int_{-1}^{1} w(x) \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega_n'(x_k)} \varphi_j(x) dx \tag{26}$$

$$|\gamma_j^{(k)}| \le M_n \int_{-1}^{1} w(x) |\varphi_j(x)| dx \le M_n.$$

また (25) より

$$M_n \le \max_k \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j^{(k)}| \le n \max_{j,k} |\gamma_j^{(k)}|.$$

したがって上の両式をまとめると

$$\frac{M_n}{n} \le \max_{j,k} |\gamma_j^{(k)}| \le M_n \tag{27}$$

が得られる．

さて，$L_n(f, \varphi ; x)$ の定義 (16) と条件 (17) より

$$\max_{0 \le k < n} |c_k^{(n)}| \le \|L_n(f, \varphi ; x)\| \le \sum_{k=0}^{n-1} |c_k^{(n)}|.$$

ここでベクトルと行列のノルムをそれぞれ

$$\|\boldsymbol{c}_n\| = \max_{0 \le k < n} |c_k^{(n)}|$$

$$\|V_n^{-1}\| = \max_j \sum_{k=1}^{n} |\gamma_j^{(k)}|$$

で定義し，$\boldsymbol{c}_n = V_n^{-1} \boldsymbol{f}_n$ であることを用いれば

$$\|V_n^{-1}\| \le \|L_n\| \le n \|V_n^{-1}\| \tag{28}$$

が導ける．

さらに V_n^{-1} の元に関し (27) が成立することから

$$\frac{M_n}{n} \le \|L_n\| \le n^2 M_n \tag{29}$$

が得られる．したがって $\lim_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}} = 1$ のときに限り $\lim_{n\to\infty} \|L_n\|^{\frac{1}{n}} = 1$ が成り立つ．ところで，証明 1) の部分で述べたように $\lim_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}} = 1$ が成り立つのは，補間点の極限分布が Chebyshev 分布のときに限る．

ゆえに $\mu(x)$ が Chebyshev 分布のときに限って，$L_n(f, \varphi ; x)$ を準安定に構成できる（証明終）．

以上述べた定理により，与えられた函数 $f(x)$ のいかんを問わず補間多項式を準安定に構成するためには，補間点の分布は，Chebyshev 分布でなければならない．

3. 補間法による函数の直交展開

$f(x)$ の近似式 $L_n(f ; x)$ の二乗誤差

$$\int_{-1}^{1} w(x) \{f(x) - L_n(f ; x)\}^2 dx \tag{30}$$

を最小にするよう $L_n(f ; x)$ をつくりたいときは，重み函数 $w(x)$ の直交多項式系 $\{\varphi_n(x)\}$ で $f(x)$ を Fourier 展開し，その部分和をとればよい．よく知られているように $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ ならばChebyshev 多項式系 $\{T_n(x)\}$，$w(x) \equiv 1$ ならば Legendre 多項式系 $\{P_n(x)\}$ を採用する．とくに $[-1, 1]$ で十分滑らかな函数 $f(x)$ を $\{T_n(x)\}$ で展開したときの部分和は，絶対誤差を最小にする意味でも最良近似に近かくなっている（準最良近似という）．

さて $[-1, 1]$ で十分滑らかな函数 $f(x)$ に対して，所要の精度をみたす近似式 $L_N(f, \varphi ; x)$ を補間法を用いてつくろう．

展開項数 $N(\varepsilon)$ は函数列

$$L_{n_1}(f, \varphi ; x), L_{n_2}(f, \varphi ; x), \cdots, L_{n_m}(f, \varphi ; x)$$
$$0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_m$$

の収束の“状況”から決めることにする．収束の判定法は後に述べる．

計算法の“経済性”は函数列 $\{L_{n_k}(f, \varphi ; x)\}$ をつくるために要した

1) 函数値 $f(x)$ の計算回数

2) 乗除算回数

3) 記憶場所の占有量

によって評価する.

函数値 $f(x_k^{(n)})$ を無駄なく利用するためには補間点が

$$\{x_k^{(n_1)}\}\subset\{x_k^{(n_2)}\}\subset\cdots\subset\{x_k^{(n_m)}\} \qquad (31)$$

をみたすようにすればよい. $N(\varepsilon)$ を小さい刻みで確定するためには

$$n_{m+1}-n_m=1, \quad n_1=1,\ m=1,\ 2,\ \cdots \qquad (32)$$

とすればよい. すなわち補間点を1点ずつ追加しながら $\{L_n(f,\ \varphi;\ x)\}$ をつくる. もし $f(x)$ が奇函数あるいは偶函数ならば $n_{m+1}-n_m=2$ とする.

補間点を1点ずつ追加しながら $\{L_n(f,\ \varphi;\ x)\}$ をつくるための乗除算回数と記憶場所の占有量を少なくしたい. そのため $f(x)$ を一旦 Newton 補間多項式で近似し, 次にそれを直交多項式系 $\{\varphi_n(x)\}$ で展開する. この際, $\{\varphi_n(x)\}$ がしたがう三項漸化式を利用するだけである.

計算法を順を追って説明する. 第一に極限分布が Chebyshev 分布となる点列 $\{x_n\}$ のつくり方である. つくり方は無数にあるが簡単な一方法を示す. 複素平面上に単位円を考て, 円周上に点 $e^{in\alpha}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ をとる. π/α が無理数ならば点列 $\{e^{in\alpha}\}$ は $n\to\infty$ のとき円周上に一様分布する (たとえば 1) pp. 167, 2) pp. 356～357). 円周上の点を x 軸上に射影した点列 $\{\cos n\alpha\}$ の極限分布は Chebyshev 分布となる. $x_n=\cos n\alpha$ とおけば $\{x_n\}$ は, 次の三項漸化式にしたがう.

$$x_{n+1}-2\lambda x_n+x_{n-1}=0, \quad x_0=1,\ x_1=\lambda=\cos\alpha. \qquad (33)$$

第二に Newton 補間多項式について述べる. (15) を漸化式を用い

$$L_{n+1}(f,\ \tilde{\omega};\ x)=L_n(f,\ \tilde{\omega};\ x)+a_n\tilde{\omega}_n(x) \qquad (15)'$$

$$L_1(f,\ \tilde{\omega};\ x)=f(x_1)=a_0$$

$$\tilde{\omega}_n(x)\equiv 2^n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

と書きあらため, $L_n(f,\tilde{\omega};x)$ を正規化された Newton 補間多項式と呼ぶことにする. $f(x)$ に関する追加の情報 $f(x_{n+1})$ と $L_n(f,\tilde{\omega};x)$ の既知の係数 a_0, a_1, $\cdots$, a_{n-1} から出発して a_n を求める, まず

$$d_0=f(x_{n+1})-a_0,\quad a_n=0 \qquad (34\,\mathrm{a})$$

とおいたのち

$$d_k=d_{k-1}/2(x_{n+1}-x_k)-a_k \qquad (34\,\mathrm{b})$$

$$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

によって $\{d_k\}$ をつくれば求める係数 a_n は

$$a_n=d_n. \qquad (34\,\mathrm{c})$$

第三に $a_n\tilde{\omega}_n(x)$ と $L_n(f,\ \varphi;\ x)$ を与えて $L_{n+1}(f,\ \varphi;\ x)$ を求める. 若干の準備から始めよう.

直交多項式系 $\{\varphi_n(x)\}$ は適当に数 α_{n-1}, β_n, γ_{n+1} をとると漸化式

$$\alpha_{n-1}\varphi_{n-1}(x)-2(\beta_n+x)\varphi_n(x)+\gamma_{n+1}\varphi_{n+1}(x)=0 \qquad (35)$$

にしたがうようにできる. $\varphi_0(x)$ と $\varphi_1(x)$ はあらかじめ与える. また $\tilde{\omega}_n(x)$ を $\{\varphi_k(x)\}$ で展開し

$$\tilde{\omega}_n(x)=\sum_{k=0}^{n}u_k^{(n)}\varphi_k(x),\quad n=1,2,\cdots \qquad (36)$$

とおく. そして $\tilde{\omega}_{n-1}(x)$ と $\tilde{\omega}_n(x)$ の係数間の関係をしらべる. $\tilde{\omega}_1(x)=2(x-x_1)$ で, かつ $\tilde{\omega}_n(x)=2(x-x_n)\tilde{\omega}_{n-1}(x)$ であるから, (35) を用いれば

$$u_k^{(n)}=\alpha_k u_{k+1}^{(n-1)}-2(\beta_k+x_n)u_k^{(n-1)}+\gamma_k u_{k-1}^{(n-1)} \qquad (37\,\mathrm{a})$$

$$u_n^{(n-1)}=u_{n+1}^{(n-1)}=0,\quad k=2,\ 3,\ \cdots,\ n$$

$u_0^{(n)}$ と $u_1^{(n)}$ だけは

$$u_0^{(n)}\varphi_0(x)+u_1^{(n)}\varphi_1(x)=\{\alpha_0u_1^{(n-1)}+2(x-x_n)u_0^{(n-1)}\}\varphi_0(x)+\{\alpha_1u_2^{(n-1)}-2(\beta_1+x_n)u_1^{(n-1)}\}\varphi_1(x) \qquad (37\,\mathrm{b})$$

が恒等的に成り立つように定める. また初期値として $u_0^{(1)}$ と $u_1^{(1)}$ は $\tilde{\omega}_1(x)$ の定義式より与える.

はじめの問題にもどる. 補間多項式 $L_n(f,\ \tilde{\omega};\ x)$ と $L_n(f,\ \varphi;\ x)$ は, 補間点をすべて共有するから

$$L_n(f,\ \tilde{\omega};\ x)\equiv L_n(f,\ \varphi;\ x)$$

したがって (15)′ より

$$L_{n+1}(f,\ \varphi;\ x)=L_n(f,\ \varphi;\ x)+a_n\tilde{\omega}_n(x)$$

$$L_1(f,\ \varphi;\ x)=f(x_1)=c_0^{(1)}$$

となる. $\tilde{\omega}_n(x)$ をあらかじめ (37 a), (37 b) により $\{\varphi_n(x)\}$ で展開しておけば $L_{n+1}(f,\varphi;\ x)$ と $L_n(f,\ \varphi;\ x)$ の係数間に漸化式

$$c_k^{(n+1)}=c_k^{(n)}+a_nu_k^{(n)} \qquad (38)$$

$$c_n^{(n)}=0,\ c_0^{(1)}=f(x_1)$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n,\quad n=1,\ 2,\ \cdots$$

が成り立つ.

$n+1$ を n に置き換えて (33), (34 a), (34 b), (34 c), (37 a), (37 b), (38) の順序で計算を繰り返えせば, 函数列 $\{L_n(f,\ \varphi;\ x)\}$ が生成されることになる.

収束の判定は

$$\|L_{n+1}(f,\ \varphi;\ x)-L_n(f,\ \varphi;\ x)\|<\varepsilon \qquad (39)$$

によって行なうことにする. 上式の左辺の計算は一般に $\{\varphi_n(x)\}$ が (17) をみたすように正規化されていなければ容易ではない. いま, $\|\varphi_n\|=1$ であるから,

(38) より

$$\|L_{n+1}(f,\ \varphi;\ x)-L_n(f,\ \varphi;\ x)\| \leq |a_n| \sum_{k=0}^{n} |u_k^{(n)}|$$

となる．したがって収束の判定を

$$|a_n| \sum_{k=0}^{n} |u_k^{(n)}| < \varepsilon \tag{40}$$

によって行なえば簡単である．上式を単に計算の停止規則と解釈するならば，$f(x)$ に対して滑らかさを仮定しなくともよい．(40) をみたす n の最小値をあらためてNとする．$L_n(f,\ \varphi;\ x)$ ($n=1,\ 2,\ \cdots,\ N$) をつくるに要する演算回数は次のとおり．

$f(x)$ の函数値の計算回数 N.

乗算回数は，α_k, γ_k が常に1ならば約 $\dfrac{3}{2}N^2$ にできる．一般には約 $\dfrac{5}{2}N^2$.

記憶場所は数列 $\{x_k\}$, $\{a_k\}$, $\{u_k^{(n)}\}$, $\{c_k^{(n)}\}$ のために約 $4N$ 個必要である．

残った問題は補間点 $\{x_n\}$ をつくる際の初期値 $x_1=\cos\alpha$ の選定である．理論的には π/α が無理数ならば，$\{x_k\}$ の分布函数 $\mu_n(x)$ は Chebyshev 分布に収束し補間多項式 $L_n(f,\ \varphi;\ x)$ を準安定に構成できた．しかし実際には $\cos\alpha$ の値によって結果の精度は，かなり異なる．したがって上述した計算法を使用するためには $\mu_n(x)$, $\|L_n\|$ と $\cos\alpha$ の関連について，さらに精緻な理論が要求される．

$\{x_n\}$ をつくるための初期値 $\cos\alpha$ を次の立場から決定する．Newton 補間多項式 $L_n(f,\ \tilde{\omega};\ x)$ の係数 a_k の計算誤差は (15) より明らかなように

$$\sup_{\|f\|=1} |a_k| = \sum_{j=1}^{k+1} |\tilde{\omega}_{k+1}'(x_j)|^{-1} \tag{41}$$

によって支配される．一定の $\cos\alpha$ と適当な自然数 nをとり

$$\max_{0\leq k\leq n} \{\sup_{\|f\|=1} |a_k|\} < \max_{0\leq k\leq n+1} \{\sup_{\|f\|=1} |a_k|\} \tag{42}$$

が成り立つとき，左辺を

$$C_n(\cos\alpha) \equiv \max_{0\leq k\leq n} \{\sup_{\|f\|=1} |a_k|\} \tag{43}$$

で表わせば，$C_n(\cos\alpha)$ は高々 n 次の正規化された Newton 補間多項式 $L_k(f,\ \tilde{\omega};\ x)$ を数値的に構成するときの困難性を示す指数である．実践的にはnを与えて

$$\inf_{\alpha} C_n(\cos\alpha) \tag{44}$$

によって $\cos\alpha$ を決定することが望ましい．もはや π/α は必ずしも無理数ではない．(44) は簡単に求められないので，ここでは実験的方法によった．すなわち $\cos\alpha$ をパラメータとして $C_n(\cos\alpha)$ を数値的に求める．比較的大きな n に対して指数 $C_n(\cos\alpha)$ の値が相対的に小さくなるような $\cos\alpha$ を多くの実験値から選び出す．実験例を**第1表**に示す．これらの数値実験からは

$$\cos\alpha=0.4 \tag{45}$$

が相対的によいといえる．

Table 1. A condition number of interpolation defined by (43)

n	$C_n(0.2)$	n	$C_n(0.3)$	n	$C_n(0.4)$	n	$C_n(0.6)$	n	$C_n(0.8)$
38	1.54	10	102	50	1.42	29	1.97	24	3.16
42	1.84	16	388	137	1.90	50	3.87	102	5.96
65	14.5	21	725	142	2.53	63	4.05	112	8.78
77	18.3			153	2.62	199	5.22	190	9.84
79	46.0			n_1*	3.12	456	13.6		

n	$C_n(-0.2)$	n	$C_n(-0.3)$	n	$C_n(-0.4)$	n	$C_n(-0.6)$	n	$C_n(-0.8)$
18	1.34	10	1.48	18	2.63	17	2.30	45	26.6
22	46.1	32	2.42	19	3.56	71	3.93	51	84.4
24	48.9	33	2.89	38	9.52	122	4.42	55	116
38	92.5	36	3.67	114	9.58	n_2**	5.11	90	220
39	653	47	12.0	206	10.4				

* $n_1>500$, ** $n_2>200$

以上で計算法の説明を終る．いうまでもなくここで得られた $f(x)$ の近似式 $L_n(f,\ \varphi;\ x)$ の剰余項は，補間多項式の剰余項であるから $f(x)$ の性質と剰余項の収束の速さについては多くのことが知られている (たとえば 1))．

最後に補間多項式と最良近似式の関係について，一つの注意を述べる．$f(x)$ を直交多項式系 $\{\varphi_n(x)\}$ で Fourier 展開し，n 項までの部分和を $S_n(x)$ とすれば

$$\|S_n(x)-L_n(f,\ \varphi;\ x)\| \leq \|L_n\|\,\|f(x)-S_n(x)\| \tag{46}$$

となる．最良近似式の誤差 $\|f(x)-S_n(x)\|$ は比較的よく研究されている．ここで $S_n(x)$ を $n-1$ 次以下の任意の多項式で置き換えてもよい．

4. 応 用 例

本論文で述べた計算法の応用を二つ示す．Chebyshev 多項式系 $\{T_n(x)\}$ によって $f(x)$ を展開する．計算法の中で，具体的な直交多項式系に依存しているところは (37 a), (37 b) だけである．慣習にしたがい

$$f(x) \simeq \sum_{k=0}^{n-1}{}' c_k^{(n)} T_k(x)$$

$$\tilde{\omega}_n(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' u_k^{(n)} T_k(x)$$

と書く．ただし $\sum'$ は第1項だけ 1/2 倍して和をとることを意味する．このとき (37 a), (37 b) は

$$u_k^{(n)} = u_{k+1}^{(n-1)} - 2x_n u_k^{(n-1)} + u_{k-1}^{(n-1)} \tag{37$'$}$$

$$u_0^{(0)}=2,\ u_n^{(n-1)}=u_{n+1}^{(n-1)}=0$$
$$u_{-1}^{(n-1)}=u_1^{(n-1)}$$
$$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n,\quad n=1,\ 2,\ \cdots$$

と簡単化される．なお (38) の初期条件だけは

$$c_0^{(1)}=2f(x_1)$$

と変更しなければならない．

Legendre 多項式の場合は

$$u_k^{(n)}=\frac{2(k+1)}{2k+3}u_{k+1}^{(n-1)}-2x_n u_k^{(n-1)}+\frac{2k}{2k-1}u_{k-1}^{(n-1)}$$
$$u_n^{(n-1)}=u_{n+1}^{(n-1)}=0,\ u_0^{(0)}=1 \tag{37)''$$
$$k=0,\ 1,\ \cdots,\ n,\quad n=1,\ 2,\ \cdots$$

となる．

いろいろな問題について数値実験を行なったが，便宜上 Chebyshev 多項式の母函数と Legendre 多項式の母函数を例題に採用する．

例題 1.

$$f(x)=\frac{1-xz}{1-2xz+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}{}' a_n T_n(x) \tag{47}$$
$$a_0=2,\ a_n=z^n,\ n>0$$

例題 2.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=\sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n(x) \tag{48}$$
$$b_n=z^n,\ n\geq 0.$$

$z=1/2$ としたときの計算結果を**第 2 表**に示す．ここで計算機の演算桁数は指数部 2 桁，仮数部 10 桁である．収束を判定するための定数 ε は 1×10^{-9} とした．また補間点 $\{x_k\}$ をつくるための初期値は $\cos\alpha=0.4$ である．

Table 2. Coefficients of (47) and (48)

n	0.5^n	a_n	b_n
0	1.00000 00000	2.00000 0001	.99999 99980
1	50000 00000	49999 99993	49999 99985
2	25000 00000	24999 99996	24999 99999
3	12500 00000	12500 00000	12500 00011
4	6250 00000	6250 00000	6250 00058
5	3125 00000	3125 00000	3124 99988
6	1562 50000	1562 49997	1562 49976
7	781 25000	781 24998	781 24983
8	390 62500	390 62499	390 62503
9	195 31250	195 31250	195 31264
10	97 65625	97 65626	97 65630
11	48 82813	48 82812	48 82814
12	24 41406	24 41406	24 41419
13	12 20703	12 20702	12 20724
14	6 10352	6 10351	6 10364
15	3 05176	3 05176	3 05164
16	1 52588	1 52588	1 52553
17	76294	76293	76249
18	38147	38146	38116
19	19073	19072	19063
20	9537	9535	9547
21	4768	4768	4792
22	2384	2383	2411
23	1192	1191	1217
24	596	595	604
25	298	297	288
26	149	148	125
27	75	74	59
28	37	36	21
29	19	18	0
30	9	9	
31	5	4	
32	2	4	
33	1	0	

これらの条件の下で，上の例題の精度をさらに改善することは，ほとんど不可能であろう．実際，ε を 1×10^{-10} とすると，演算は停止しない．すなわち条件 (7) をみたす $N(\varepsilon)$ は存在したい．

第 2 表から，展開係数の誤差は必ずしも ε の範囲に収っていないことがわかる．その原因として二つ考えられる．一つの係数を求めるために約 n^2 回の乗算が必要である．約 30^2 回の四則演算を行なえば，10 桁の数値の最下位 1～2 桁は，計算誤差の影響を不可避的に受けるであろう．事実，誤差の主要部が剰余項となるよう収束の判定条件を $\varepsilon=5\times10^{-8}$ とゆるくすると例題の係数の誤差は ε 以下となる．

また前述した収束の判定条件 (39) は函数 $f(x)$ によっては，必ずしも十分でない．そのため，$f(x)$ の滑らかさと関連して収束の判定法を

$$\|L_{n-1}(f,\ \varphi;\ x)-L_n(f,\ \varphi;\ x)\|$$
$$+\|L_n(f,\ \varphi;\ x)-L_{n+1}(f,\ \varphi;\ x)\|<\varepsilon$$

ときびしくすることも考えられる．

なお，指数 $C_n(\cos\alpha)$ が大きくなるほど，換言すれば Newton 補間多項式の伝播誤差が大きくなるほど，ε を相対的に大きくとらなければ $N(\varepsilon)$ が確定しないことを注意しておく．

5. むすび

補間多項式のノルムとその剰余項については，古くから研究されている（たとえば 1)～5)）．しかし，函数 $f(x)$ を補間法によって数値的に構成するとき，両者が近似度にいかに関与するか統一的に論じた文献はないようである．

補間多項式の誤差は，剰余項と計算誤差（伝播誤差）からなる．本論文では，補間点の数が増えるにともない，$f(x)$ が解析的な場合でも，伝播誤差が誤差の主要部となることを指摘し，近似式のノルムの有界性によって近似法の安定性を定義した．つぎに補間点の極限分布が Chebyshev 分布のときに限り，補間多項式を準安定に構成できることを明らかにした．

極限分布が Chebyshev 分布となる点列のつくり方は無数にあるが，滑らかな函数 $f(x)$ に対し，はじめに述べた要求 2)，3) を解決しようとすれば，点列のつくり方は，自づから限定される．特殊な定数表を用

いることなく，所要の精度に応じ滑らかな函数 $f(x)$ の準最良近似式（直交多項式系による $f(x)$ の近似展開）を展開項数もこめて機械的につくることができた．

参考文献

1) Walsh, J.L.: Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain, American Mathematical Soceity, 1935

2) Davis, P.J.: Interpolation and Approximation, Blaisdell Publishing Co., New York, 1963

3) Klylov, V.I.: Approximate Calculation of Integrals, The Macmillan Co., New York, 1962 (Translated from Russian by A.H. Stroud)

4) Korovkin, P.P.: Linear Operators and Approximation Theory, Hindustan Publishing Corp., Dehli, 1960 (Translated from Russian).

5) Natason, I.P.: Constructive Function theory, Vol. III, Interpolation and Approximation Quadratures, Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1965 (Translated from Russian by J.R. Schulenberger).

6) Kalmár, L.: Az interpolációról, Mathematikai es physikai lapok, Vol. 32, pp. 120, 1926.

（昭和 43 年 2 月 22 日受付，同 4 月 22 日再受付）