談　話　室

Bessel 函数 Subroutine の精度検定について*

和　田　英　一**　山　本　敦　子***

program をかく場合 subroutine library program は大変有用なものだが，しかし subroitine がどのくらい信用できるかが絶えず問題になる．一応，subroutine の製作者は精度や時間を comment することになっていて，利用者はそれを信じて利用するわけだが，comment の忠実度，program の品質の check は計算機センターの重要な任務である．東京大学大型計算機センターにも subroûtine library があって，各方面から登録されているが，それがどのくらい信用できるかということについて，利用者の方で，信用できる調査が行なわれるという話はあまりきかない．計算機センターでも人手不足から，登録された program をほとんどそのまま受け入れて利用者に copy をまわしている．これではあまり申訳ないので，最近，精度，時間，内容を，全体にはとても手がまわらないが，重要なものについて調べてみようということになった．そこで，まず test の対象になったのは，Bessel 函数であった．

Bessel 函数には，計算機のメーカーから納入された AJBES と清水留三郎氏製 BFJ の二つがあって，まずこれらの精度検査が始められた．最初は $J_0(x)$ $(x=0\ (0.1)17.5)$ くらいに計算して print し，NBS の tablec を人が比較するということをやっていたが，この作業はあまり計算機センターらしからぬので，これを機械化することになった．これには，たとえ時間がかかってもよいから，正確な Bessel function を計算する program を用意し，これと test される subroutine による値を比較する program をつくった．正確なものは多重精度で巾級数展開の式から求める．そのため multiple precision の加減乗除，零判定，印刷等の subroroutine を用意し，これを用いて $J_0(x)$ $(x=0\ (0.1)\ 20.0)$ を計算したところ（整数部4語（128ビット），小数部4語で計算した．このサブルーチンを使うと何語の精度でも計算可能である），それは NBS の table と小数点以下 10 進 15 桁まで正確に一致した．これを原器にして AJBES と比較し，その絶対誤差を図に plot してみると，Fig. 1 のようになる．out put がでるとすぐに和田がこの結果を高橋，森口，米田，島内氏との会合にもち出して検討した結果，島内氏が，この error curve には周期がある，それはちょうど1だと発言した．つまり error の絶対値が大きくなっているところは，1.9, 2.9, 3.9, 4.9 あたりで，これは何のせいかといい出したのである．そこで会合の席で，AJBES の source program をみると，これは n と x とから適当にきめた整数値 NM から $J_{NM}(x)=0$ として漸化式で逆に J_0 の方へもどってくる．この出発点 NM のきめ方がわるいということになった．この出発点 NM は AJBES では J_0 の場合 table 1 のとおり．ところで，

$J_7(2)=0.0001749441$
$J_9(3)=0.0000843950$
$J_{11}(4)=0.00003660009$
$J_{13}(5)=0.0000152096$

x	$1\leq x\leq 2$	$2\leq x<3$	$3\leq x<4$
NM	7	9	11
	$2\times[\lvert x\rvert]+5$		

Table 1.

これではなるほど5桁の精度も怪しい．森口先生が数表[2)]をながめ，米田氏が error curve をながめ，出発点をもう2くらいふやしたらどうだといわれたので，翌日さっそく program を変更して $NM=2\times[\lvert x\rvert]+7$ から back するようにしたら絶対誤差は大体 5.10^{-7} 以下になった．

この出発点 NM のきめ方にはいろいろあるようで，

* On Precision Check of Subroutines of Bessel Function, by Eiiti Wada (Faculty of Engineering, University of Tokyo) and Atsuko Yamamoto) (Computer Centre, University of Tokyo)
** 東京大学工学部
*** 東京大学大型計算機センター

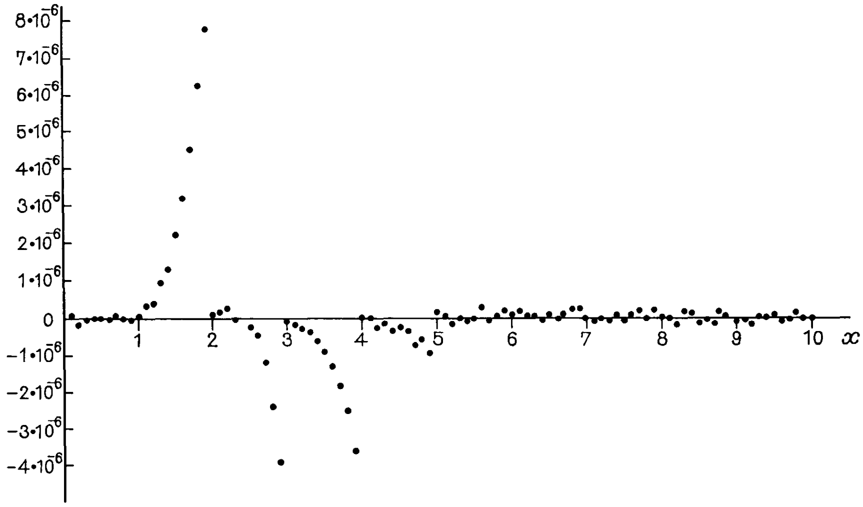

Fig. 1 Error Curve of AJBES

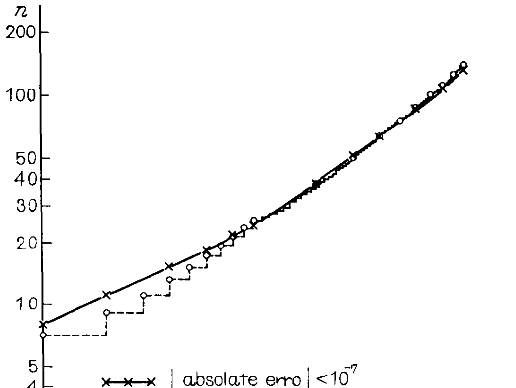

Fig. 2 Starting points NM in evaluating $J_n(x)$ by recurrence formula

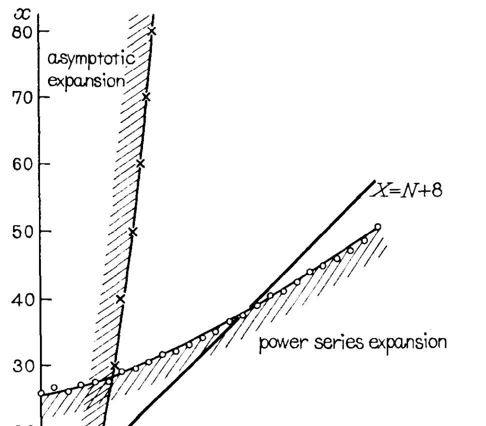

Fig. 3 Available ranges of power series expansion and asymptotic expansion (|absolute error|$<5.10^{-7}$)

これから思い出して「計算機のための函数近似公式第2集[3]」をみたら，それに魚木氏の提案がのっていた．これで出発点 NM のきめ方の問題は解決したわけであるが，念のため，絶対誤差が 10^{-7} 以下になるような出発点 NM を計算し，修正前の AJBES のきめ方と比較してみてみると，Fig. 2 のようになった．

つぎに清水氏の BFJ の $J_0(x)$ について，同様なことをやってみたらこれは error の maximum が $x=7.4$, 7.6 あたりにあらわれていた．これが上記の会合で話題になり source program（東大出版会のライ

ブラリー・プログラム第1集に出ている）をみるとJ_0の場合は $x=8$ で巾級数展開と漸近展開にわかれる．7は巾級数展開のおわりの方で，single precisionのため桁おちがおきるのだろうということになり，$x=8$ で maximum になる $k=4$ の項 $\frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2}$ の大きさを森口先生が試算されたが，

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\cdot 4}}{(4!)^2}=\frac{65536}{24^2}=\frac{2^{16}}{(4\cdot 3\cdot 2)^2}=\frac{2^{10}}{9}\doteqdot 114$$

で，少くとも2桁は下から noise が侵入してくる．そこで term の計算をするところだけを double precision にする必要があり，その double にしても演算時間はあまり変らない筈という島内氏の提案にもとづいて double precision にして BFJ を test した．予想どおり絶対誤差は大体 10^{-6} 以下になった．

$J_0(x)$ についてはこれで大体解決したが，一般に次数 n のときの巾級数展開と漸近展開との境界のきめ方が問題である．BFJ では x が $n+8$ より小さいときに巾級数展開，等しいか大きいときに漸近展開というきめ方をしているが，n が大きくなるとまことに危険である．そこで原器を使って巾級数展開と漸近展開で絶対誤差が 5.10^{-7} 以下になる範囲を調べてみた結果が Fig. 3 である（巾級数展開の term の計算の部分のみ double precision，他は single precision で計算）．これから明らかなように n が 10 より小さいときは BFJ の境界を少し修正すればよいが，n がそれより大きくなると漸近展開はほとんど使用できず，したがって x がある程度小さいところ（たとえば，$x\leqq\frac{n}{2}+20$）でしか BFJ は利用できないことがわかった．

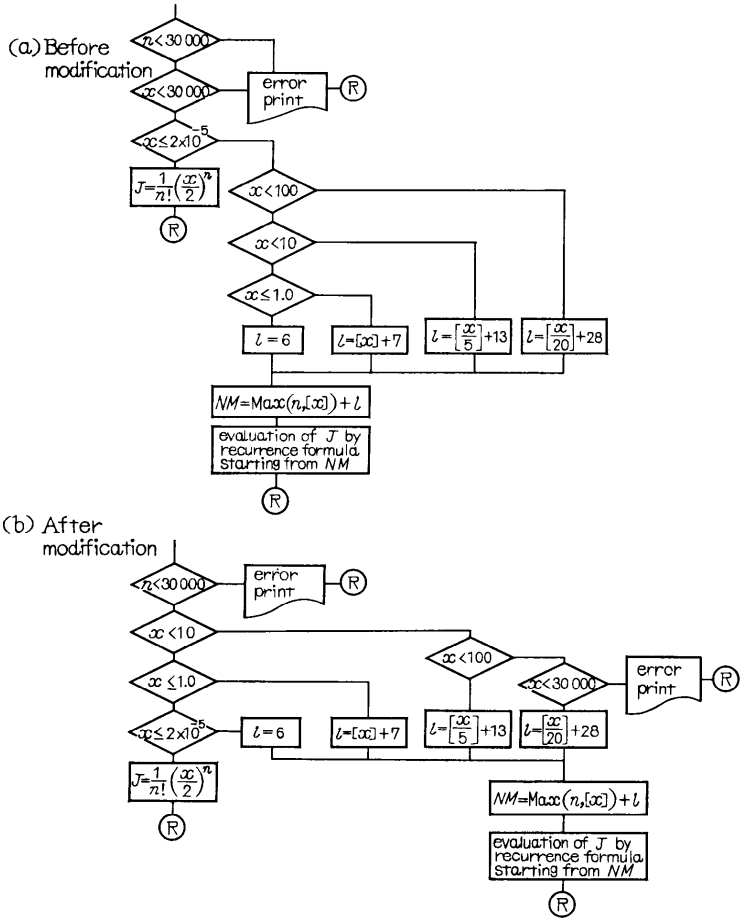

Fig. 4　Branch tree in AJBES

program 技術の上からは，AJBES は NM の決定法以外にも問題があると島内氏が注意した．それは x の range によって Fig. 4 (a) にしめすように program が分岐するが，x のよく出てくる範囲 $2\cdot 10^{-5}<x<10$ がこの比較回数が一番多くなるような悪い program だという．よく出る範囲は，はやくきまるべきだという意見に従って分岐を考慮してみると Fig. 4 (b) のようなものができる．AJBES はこのように変更することになった．

以上がこれまでに行なった作業の概要であるが，これに対して高橋先生（センター長）から次のような comment があった．

i）multiple precision の subroutine で巾級数展開により J を計算する場合，途中の term は1より大きくなることがあるから，term の計算には十分1より上まで桁をとっておく必要があるが sum は小数点

以下だけ足していればよい．原器の program は正直に整数部分まで足していた．

ii） n や x が大きいところでは漸化式の方法がいちばん無難だろう，J_0, J_1 などは一般の n 用の subroutine でなく専用のものを用意するのがよい．

なお，multiple precision のsubroutineは島内氏の multiple precision の乗除算の program を借用して和田が作製した，また最初の原器作製は和田が行なったが，細部の検討とそのための program 作製，subroutine の修正は山本が担当した．

参考文献

1) Abramowitz, M. and Stegun, I.A. ed.: Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series. 55, 1964. June

2) 林桂一，森口繁一：高等函数表第2版，岩波書店，1967年11月

3) 数理科学総合研究・第IV班第5分科会：計算機のための函数近似公式第2集

4) 東京大学大型計算機センター編：東京大学大型計算機センター・ライブラリー・プログラム第I集，東京大学出版会 1967年7月