Skip 方式 Scheduling Algorithm*

橋 本 昭 洋**　若 山 忠 雄**

A round-robin procedure is well-known as a descipline for assigning processor time to many jobs in a time-shared computer system. But this procedure lacks in flexibility.

In this paper, a more flexible one named skip procedure, which is a slight extension of round-robin and is easily implemented, is introduced and analyzed. In a round-robin system a job is served at its every cycle, but in this skip system a job may or may not be served at its cycle according to its past history.

1. はじめに

時分割使用計算機システムにおいて，中央処理装置の処理能力を時間的に各使用者に割り当てるときの方針は scheduling algorithm と呼ばれ，数多くの方式が提案され解析されている[1].

最も単純な方式は，round robin 方式と呼ばれるものであり，各使用者からの処理要求は，系に到着すると待行列の末尾につけられ，処理装置は待行列の先頭のものから，一定の時間（time quantum）q 以内の処理を行なう．q 時間以内で処理が終れば，その要求は系を離れ，終らなければ待行列の末尾にもどり，処理装置は次の要求の処理に移る．この方式の解析はよく行なわれており，要求の処理時間と応答時間は，ほぼ一次の関係にあることが知られている．しかし，一般には CTSS における Multi-Level Priority Queue (MLPQ) 方式のように[5]，処理時間の短い要求を優先させる方式の方が，より実際的なようである（このとき，平均待時間が，短くなることが知られている[6]）.

round robin 方式を一般化して，各要求の処理回数 i に応じて，その回の time quantum q_i を変化させる方式を Variable Time Quantum (VTQ) 方式と呼ぶ．この方式は，明らかに round robin 方式よりも融通性があり，処理時間の短いものを優先させることもできるが，少し一般的すぎて，解析結果からその特性をは握するのは困難である[2].

本論文で導入し解析する skip 方式は，VTQ 方式において，q_i の値に制限を加え，$q_i=0$ または，q（一定値）としたものであり，プログラムの簡単な変更で，特性を広範囲に変化でき，しかも，その変化が解析結果から比較的容易に知られる．また，待行列の管理は，round robin 方式とほとんど変わらず，MLPQ 方式よりずっと簡単である．

2. skip 方式の解析

処理要求が待行列の末尾についてから，処理装置である時間（0の場合も含む）の処理を受け，系を離れるか，あるいは，再び待行列にもどるまでを1サイクルと呼ぶ．各処理要求の第 i 回目のサイクルにおける time quantum を

$$q_i=\begin{cases} q & (i\in S \text{ のとき}) \\ 0 & (i\notin S \text{ のとき}) \end{cases}$$

とした VTQ 方式を，skip 方式と呼ぶ．ただし，S は無限個の元からなる正整数の集合であり，その元を小さいものから順に並べたものを $s_1, s_2, \cdots$ とかく．すなわち

$S=\{s_1, s_2, \cdots\}$, s_i: 正整数

$1\leq s_1<s_2<\cdots$

$i\in S$ のとき，そのサイクルを処理サイクル，$i\notin S$ のとき空サイクルという．

以下では，skip 方式の解析を行なうが，用いる手法は Shemer が round robin の解析で用いたもの[2]の拡張である（ただし，（9）式などは Shemer よりも精確に求めた）.

次のような仮定をおく．すなわち，使用者数は無限大であり，処理要求の到着時間間隔と処理時間は，それぞれ平均 $1/\lambda$, $1/\mu$ の負の指数分布に従うものとする．λ と μ は統計的に独立であり，μ は処理方式に無

* Skip Procedure for Time-Shared Computer Scheduling, by Akihiro Hashimoto and Tadao Wakayama (The Electrical Communication Laboratory Nippon Telegraph and Telephone Public Corporation).

** 日本電信電話公社電気通信研究所

関係であるとする．待行列の長さには，制限を設けない．overhead time と swapping time は無視して取り扱う．

仮定により，Δt 時間内に一つの処理が終了して，系内にある要求の数が $n(>1)$ から $n-1$ になる確率は $\mu\cdot\Delta t$，また，要求が新しく到着して，系内の要求数が n から $n+1$ になる確率は $\lambda\cdot\Delta t$ である．したがって，n 個の処理要求が，系内にある定常状態の確率 P_n は

$$\left.\begin{array}{l} P_n=\rho^n(1-\rho),\ n=0,\ 1,\cdots\cdots; \\ \rho=\lambda/\mu<1 \end{array}\right\} \tag{1}$$

であり，系内にある処理要求の個数の期待値 $E(n)$ は

$$E(n)=\sum_{n=0}^{\infty} nP_n=\rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\sum_{j=1}^{\infty}\rho^j=\frac{\rho}{1-\rho} \tag{2}$$

となる．

処理時間 t の要求が，完全に処理され終わるまでに受けなければならない処理サイクルの回数 N は，time quantum q を用いて

$$(N-1)\cdot q<t\leq N\cdot q,\ N\text{: 正整数} \tag{3}$$

で与えられる．S の元を小さいものから数えて，N 番目のものを s_N とすれば，全サイクル回数 M は

$$M=s_N \tag{4}$$

となる．応答時間 R_M の期待値 $E(R_M)$ は，M 回のサイクルを受けるための平均待時間 W_M と処理時間 t から定まり

$$E(R_M)=W_M+t \tag{5}$$

ただし，W_M は i 回目のサイクルにおける待時間の期待値を τ_i とすれば

$$W_M=\sum_{i=1}^{M}\tau_i \tag{6}$$

である．

全サイクルに対する処理サイクルの割合を η とすれば

$$\eta=\frac{\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot\int_{(i-1)q}^{iq}\mu e^{-\mu t}dt}{\sum_{i=1}^{\infty} s_i\int_{(i-1)q}^{iq}\mu e^{-\mu t}dt} \tag{7}$$

である．ある要求に time quantum q を割り当てたとき，実際に使用される時間を q' とすれば，q' の期待値 $\bar{q}$ は，処理時間が $i\cdot q<t\leq(i+1)\cdot q$ である要求が受けるべきサイクル回数は $(i+1)$ 回であり，そのうち，実際に要求の処理のために使用される時間は t であることから

$$\bar{q}=\frac{(\text{処理時間の平均})}{(\text{サイクル回数の平均})}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{\infty}\int_{(i-1)q}^{iq}\mu te^{-\mu t}dt}{\sum_{i=1}^{\infty} s_i\int_{(i-1)q}^{iq}\mu e^{-\mu t}dt}=\frac{\eta}{\mu}(1-e^{-\mu q}) \tag{8}$$

となる．また，ある要求 J が系に到着したとき，処理中の要求 J_0 の time quantum の残り時間が r である確率は

$$\int_{q-r}^{\infty}\mu e^{-\mu t}dt\Big/\int_0^q ds\int_s^{\infty}\mu e^{-\mu t}dt=\frac{\mu e^{-\mu(q-r)}}{1-e^{-\mu q}}$$

で与えられ，したがって，J_0 のその回の処理が終わるまでの時間 q_0 の期待値 $\bar{q}_0$ は

$$\begin{aligned}\bar{q}_0&=\int_0^q\frac{\mu e^{-\mu(q-r)}}{1-e^{-\mu q}}\left[\int_0^r t\mu e^{-\mu t}dt+\int_r^{\infty}r\mu e^{-\mu t}dt\right]dr\\&=\frac{1}{\mu}-\frac{qe^{-\mu q}}{1-e^{-\mu q}}\end{aligned} \tag{9}$$

で与えられる．

待行列中の要求が処理サイクルである確率は，定義により η で与えられるから，待行列中の n 個の要求のうち，処理を受けるものの個数の平均は，

$$\left.\frac{dG_n(x)}{dx}\right|_{x=1}\equiv\left.\frac{d}{dx}(1-\eta+x\eta)^n\right|_{x=1} \tag{10}$$

となる．したがって，系に到着した要求 J が最初のサイクルにおいて，待ち合わせる時間 t_1 の期待値 τ_1 は

$$\begin{aligned}\tau_1=E(t_1)&=E\left(\sum_{n=1}^{\infty}P_nq_0+\frac{d}{dx}\sum_{n=2}^{\infty}P_nq'G_n(x)\Big|_{x=1}\right)\\&=\rho\bar{q}_0+\frac{\rho^2\bar{q}}{1-\rho}\end{aligned} \tag{11}$$

次に τ_2 は，要求 J が第2回目のサイクルにはいったとき，系中にある要求数を用いて，次のように求められる．要求 J が第1回目のサイクルに要する時間は (t_1+q_1) であり，この間に新しく発生する要求数は $(t_1+q_1)\cdot\lambda$ である．要求 J が系にはいったとき，処理を受けていた要求 J_0 が，その回で終了せずに，待行列にもどされる確率は

$$\int_0^q\frac{\mu e^{-\mu(q-r)}}{1-e^{-\mu q}}\left[\int_r^{\infty}\mu e^{-\mu t}dt\right]dr=\frac{\mu qe^{-\mu q}}{1-e^{-\mu q}} \tag{12}$$

である．そして，待行列中にあった n 個の要求のうち，もどされるものの個数の平均は

$$\begin{aligned}\left.\frac{dH_n(x)}{dx}\right|_{x=1}&\equiv\frac{d}{dx}\{\eta(1-e^{-\mu q})+x(1-\eta+\eta e^{-\mu q})\}^n\Big|_{x=1}\\&=n(1-\eta+\eta e^{-\mu q})\end{aligned} \tag{13}$$

となることから

$$\tau_2=E\Big\{q'\Big((t_1+q_1)\lambda+\sum_{n=1}^{\infty}P_n\frac{\mu q e^{-\mu q}}{1-e^{-\mu q}}$$
$$+\frac{d}{dx}\sum_{n=2}^{\infty}P_nH_{n-1}(x)\Big|_{x=1}\Big)\Big\}$$
$$=\bar{q}\Big[(\tau_1+q_1)\lambda+\frac{\rho\mu q e^{-\mu q}}{1-e^{-\mu q}}+\frac{\rho^2}{1-\rho}(1-\eta$$
$$+\eta e^{-\mu q})\Big]$$
$$=\tau_1\gamma+\delta_1+\varepsilon \tag{14}$$

ただし

$$\gamma=\lambda\bar{q}+(1-\eta)+\eta e^{-\mu q}$$
$$\delta_1=\lambda q_1\bar{q}$$
$$\varepsilon=\eta\rho e^{-\mu q}(q-\bar{q}_0)-(1-\eta)$$

$\tau_i(i\geq 3)$ については，第 $(i-1)$ サイクルにおける待行列の長さを $\tau_{i-1}/\bar{q}$ と考えることにより，

$$\tau_i=\bar{q}\Big[(\tau_{i-1}+q_{i-1})\lambda+\frac{\tau_{i-1}}{\bar{q}}(1-\eta+\eta e^{-\mu q})\Big]$$
$$=\gamma\tau_{i-1}+\delta_{i-1},\ (i\geq 3) \tag{15}$$

ただし，

$$\delta_i=\lambda q_i\bar{q}=\begin{cases}\lambda q\bar{q}, & (i\in S\ \text{のとき})\\ 0, & (i\notin S\ \text{のとき})\end{cases}$$

あるいは，

$$\tau_i=\tau_1\gamma^{i-1}+\varepsilon\gamma^{i-2}+\delta_1\gamma^{i-2}+\delta_2\gamma^{i-3}+\cdots$$
$$\cdots+\delta_{i-1},\ (i\geq 2) \tag{16}$$

また

$$W_M=\sum_{i=1}^{M}\tau_i=\frac{\tau_1(1-\gamma^M)}{1-\gamma}+\frac{\varepsilon(1-\gamma^{M-1})}{1-\gamma}$$
$$+\frac{\delta_1(1-\gamma^{M-1})}{1-\gamma}+\frac{\delta_2(1-\gamma^{M-2})}{1-\gamma}$$
$$+\cdots\cdots+\delta_{M-1} \tag{17}$$

3. skip 方式の数値例

$S=\{s_1=1,\ s_2,\ \cdots\}$ が与えられたとき，

$$a_n=s_{n+1}-s_n,\ (n=1,\ 2,\ \cdots) \tag{18}$$

とおき，a_n-skip 方式と呼ぶ．1-skip 方式は round robin 方式である．

前節の結果を一部変形して再掲すると

$$E(R_M)=W_M+t=\sum_{i=1}^{M}\tau_i+t$$
$$=\frac{\tau_1(1-\gamma^M)}{1-\gamma}+\frac{\varepsilon(1-\gamma^{M-1})}{1-\gamma}$$
$$+\frac{\delta}{1-\gamma}\Big(N-1-\sum_{i=1}^{N-1}\gamma^{M-s_i}\Big)+t \tag{19}$$

ただし

$$M=s_N$$
$$(N-1)\cdot q<t\leq N\cdot q$$
$$\tau_1=\rho\cdot\bar{q}_0+\frac{\rho^2}{1-\rho}\cdot\bar{q}$$
$$\rho=\frac{\lambda}{\mu}$$
$$\bar{q}_0=\frac{1}{\mu}\Big(1-\frac{1}{\mu q}(1-e^{-\mu q})\Big)$$
$$\bar{q}=\frac{\eta}{\mu}(1-e^{-\mu q})$$
$$\eta=(1-e^{-\mu q})^{-1}\cdot(1+\sum_{i=1}^{\infty}a_ie^{-i\mu q})^{-1}$$
$$\gamma=\lambda\cdot\bar{q}+(1-\eta)+\eta e^{-\mu q}$$
$$\delta=\lambda q\bar{q}$$
$$\varepsilon=\eta\rho e^{-\mu q}(q-\bar{q}_0)-(1-\eta)$$

S あるいは $\{a_n\}$ を適当に選ぶことにより，種々の skip 方式が得られるが，以下では，η が簡単に求まるいくつかの場合について，数値計算を行なった結果をグラフで示す．

(2-skip 方式)

$$\eta=1/(1+e^{-\mu q})$$
$$W_{2N-1}=\frac{\tau_1(1-\gamma^{2N-1})}{1-\gamma}+\frac{\varepsilon(1-\gamma^{2N-2})}{1-\gamma}$$
$$+\frac{\delta}{1-\gamma}(N-(1+\gamma^2+\gamma^4+\cdots+\gamma^{2N-2}))$$

($(n+1)$-skip 方式)

$$\eta=(1-e^{-\mu q})$$
$$W_M=\frac{\tau_1(1-\gamma^M)}{1-\gamma}+\frac{\varepsilon(1-\gamma^{M-1})}{1-\gamma}$$

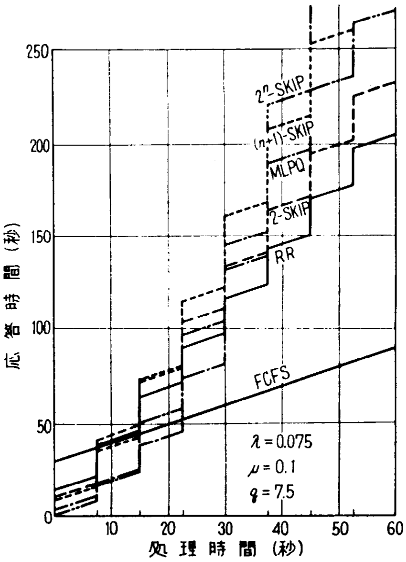

Fig. 1. Comparison of Expected Response Time

$$+\frac{\delta}{1-\gamma}(N-(1+\gamma^N(1+\gamma^{N-1}(\cdots(1+\gamma^2(1))\cdots)$$

$$M=N(N+1)/2$$

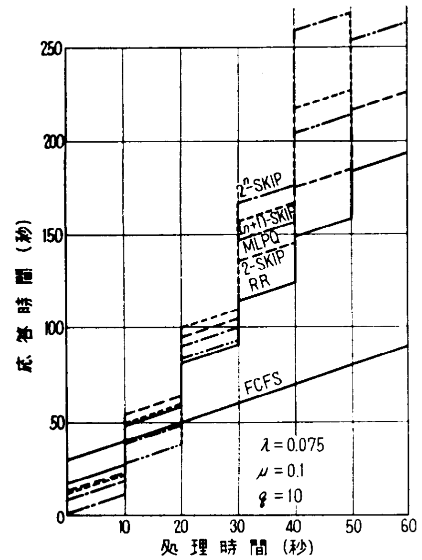

Fig 2. Comparison of Expected Response Time

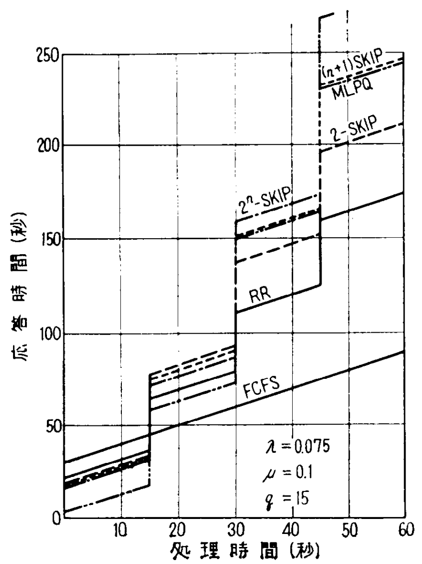

Fig 3. Comparison of Expected Response Time

(2^n-skip 方式)

$$\gamma=\frac{1-2e^{-\mu q}}{1-e^{-\mu q}}\left(ただし，e^{-\mu q}<\frac{1}{2}\right)$$

$$W_M=\frac{\tau_1(1-\gamma^M)}{1-\gamma}+\frac{\varepsilon(1-\gamma^{M-1})}{1-\gamma}+\frac{\delta}{1-\gamma}(N-(1-\gamma^{2^{N-1}}(1+\gamma^{2^{N-2}}(\cdots(1+\gamma(1))\cdots)$$

$$M=2^N-1$$

以下のグラフ第1図〜第3図には，比較のため first come first served 方式，round robin 方式，multi-level priority queue 方式の場合も同時に示しておいた．なお，ここに示した multi-level priority queue 方式は，レベル数無限大，各レベルの time quantum はすべて q，処理要求はレベル1にのみ平均 λ の割合で到着するものとし，Coffman による式〔文献 (3)，(22 a) 式〕を用いた．

4. む す び

数列 $\{a_n\}$ が，$a_{n+1}=f(a_n)$ の形で与えられている場合，待行列の管理と応答時間特性の変更は容易である．たとえば，一つの処理要求に二つの整変数 I と J を設けて

(1) 新しく到着した処理要求に対しては $I=1$, $J=1$ とする．

(2) あるサイクルにおいて，$I=J$ ならば，$I=f(I)$, $J=1$ としてその要求の処理を行なう．

(3) あるサイクルにおいて，$I\neq J$ ならば $J=J+1$ として skip する．

とすればよいであろう．応答時間特性を変化させるには，上記（2）の操作で f の形を変えればよい．たとえば，$I=1$ とすれば round robin になるし，$I=I+1$ とすれば $(n+1)$-skip, $I=I\times 2$ とすれば 2^n-skip 方式になる．このように応答時間特性を容易に広範囲に変化できる利点から，skip 方式はシステムを構成する初期の段階で用いれば有効であろう．

一方，skip 方式では，time quantum を一定としているため，プログラムを swap する回数は round robin と変わらず，CTSS で用いられている方式に比べて，swapping time による損失は大きいと考えられる．

また，著者らは，scheduling algorithm の比較検討をシミュレーションによっても行なった[4]．シミュレーションによる結果からは，skip 方式の応答時間

の標準偏差の値は round robin に近く，MLPQ より小さいことが知られている．

謝　辞

池野信一室長，藤木正也，中村義作，戸田　厳の各調査役，ならびに橋田温主任には，多くのご教示ならびにご検討をいただいた．深謝の意を表する．

参考文献

1) 藤木・橋田，“計算機共同利用方式のトラヒック関係文献要約”，通研調査計画資料第 49 号 (1967-10).
2) J.E. Shemer, "Some Mathematical Considerations of Time-Sharing Algorithms", JACM, vol. 14, No. 2, April 1967, pp. 262-272.
3) E.G. Coffman and L. Kleinrock, "Some Feedback Queuing Models for Time Shared System", 5th International Teletraffic Congress, 1967.
4) 若山・橋本，“時分割計算機システムのスケジューリング・アルゴリズム (SKIP 方式の解析およびシミュレーションによる諸方式の比較検討)”，通研成果報告第 3665 号 (1968-1).
5) F.J. Corbato, et al., "The Compatible Time-Sharing System", MIT Press, 1962.
6) 伊大知良太郎，他編，“マネジメント・リサーチハンドブック”，丸善，1967, p. 473.

(昭和 43 年 5 月 7 日受付)