

## 曲線のフェアリングに関する一実験\*

岡田 吉 誼\*\*

### Abstract

The expression of the curves of arbitrary shape comes into questions in processing the body-lifting as a part of design automation. For the arbitrarily placed points in a plane or in space obtained by some methods, it will be necessary

- (1) to correct the bad points (fairing) and
- (2) to fit smooth curve passing through these points (fitting).

In this paper, the author describes an algorithm for fairing free-form curves using "the thin beam theory" and "parametric cubics" and remarks some problems for future study with emphasis on experimental cases.

### 1. まえがき

自動車工業における Design Automation (デザインから加工までの自動化システム) の一端である現図の自動化などにおいては、車を構成するさまざまな曲線の表現と取り扱いが問題とされ、何らかの手段で得られた3次元の点列に対して

- (1) 誤差を含む点を修正する (fairing)
- (2) 点列を通るなめらかな曲線を創成する (fitting)

ことが要求される。

また、これらの曲線処理が進むにつれて、自由形状曲面の取扱いが問題となるが、ここでは曲線処理について試みた実験を中心に、今後の問題点について述べる。

### 2. 曲線のフェアリング

$n$  個の3次元点列を通るなめらかな曲線を創成する方法として、 $(n-1)$  個の curve segment にパラメータの3次式としてのベクトル関数

$$P(t) = \sum_{i=0}^3 t^i \cdot R_i \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (1)$$

をあてはめ、点列の両端を除く  $(n-2)$  個の各点に  $C^2$  級の連続条件を与えるやり方が、よく知られている<sup>1)-3)</sup>。

空間曲線(1)はかなりの表現能力を有する式で、実業務に十分使用できることを経験しているが、それは与えられる点列が形状設計者の意図する fair curve に近い場合である。現実には点列の各点に含まれる誤差(モデルの製作誤差、測定誤差、図面の読み取り誤差)のために、フェアリングの処理が必要とされる。フェアリングにおける伝統的な手段は、batten (曲線定規)による曲線調整である。創成される fair curve は、batten の特徴(材質、断面形状)と熟練者の主観によるきわめてユニークなものである。

一方、フェアリングの数値計算に関する研究も、数多く行なわれているようであり、商業用プログラムとしても、Smoothing TABCYL\* が出現した。

筆者も曲線処理の実状に接し、後行程の図面から加工までの処理も考えて、フィッティングには空間曲線(1)を用いることを前提とし、フェアリングに際しては、batten による曲線調整をシミュレートすることにした。このような考え方を進めるにあたっては、穂坂教授の文献<sup>2)</sup>に負うところが大きであった。

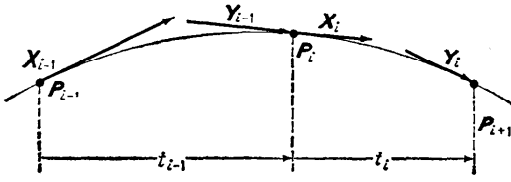
#### 2.1 フェアリングの手法

対象とする曲線を弾性曲線と考え、この弾性曲線が(1)で表わされているとする。曲げモーメントを受けたはり (beam) の弾性エネルギーの式は、曲げ剛性  $E \cdot I$  を一定とすると、はりの長さを  $l$ 、曲率を  $\kappa$ 、弧長を  $s$  として

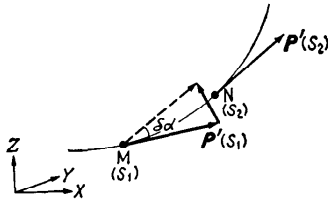
\* A Numerical Experiment on the Fairing Free-Form Curves, by Yoshimi Okada (Information Center, Toyo Kogyo Co., Ltd.)

\*\* 東洋工業株式会社計数情報センター

\* APT の TABCYL でインプット点列の修正をほどこしたものの。(日本 IBM データ・センター・APT ニュース参照)



第1図



第2図

$$U = \frac{E \cdot I}{2} \int_0^l \kappa^2 \cdot ds \quad (2)$$

いま、第1図で弾性曲線  $\widehat{P_{i-1}P_{i+1}}$  の弾性エネルギーについて着目する。弾性曲線(1)より

$$P_{i-1}(t_{i-1}) = \sum_{p=0}^3 t_{i-1}^p \cdot Q_p \quad (0 \leq t_{i-1} \leq 1) \quad (3)$$

$$P_i(t_i) = \sum_{p=0}^3 t_i^p \cdot R_p \quad (0 \leq t_i \leq 1) \quad (4)$$

空間曲線  $P$  の弧長  $s$  による微分を ' で表わし、パラメータによる微分を  $\cdot$  で表わすことにすると、第2図から曲率  $\kappa$  は

$$\kappa = \lim_{MN \rightarrow 0} \left| \frac{dP'}{MN} \right| = \left| \frac{dP'}{ds} \right| = |P''| \quad (5)$$

$$\dot{P} = P' \cdot \frac{ds}{dt}, \quad \ddot{P} = P'' \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + P' \cdot \frac{d^2s}{dt^2} \quad (6)$$

実用上  $s$  は  $t$  の一次式としてさしつかえないとすると

$$P'' = \ddot{P} \left/ \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \right. \quad (7)$$

以上のことから、弾性エネルギーに比例する量を  $V$  とし

$$C_i = P_{i+1} - P_i \quad (8)$$

$$C_i = |C_i| \quad (9)$$

$$s_i = C_i \cdot t_i \quad (10)$$

$$k_i = C_{i-1} / C_i \quad (11)$$

とおくと

$$V = \frac{1}{C_{i-1}^3} \int_0^1 |\dot{P}_{i-1}(t_{i-1})|^2 \cdot dt_{i-1} + \frac{1}{C_i^3} \int_0^1 |\dot{P}_i(t_i)|^2 \cdot dt_i$$

$$= \frac{1}{C_{i-1}^3} \{ (Q_2 \cdot Q_3) + 3(Q_2 \cdot Q_3) + 3(Q_3 \cdot Q_3) \} + \frac{1}{C_i^3} \{ (R_2 \cdot R_2) + 3(R_2 \cdot R_3) + 3(R_3 \cdot R_3) \} \quad (12)$$

第1図で、 $\dot{P}_i(0) = X_i$ ,  $\dot{P}_i(1) = Y_i$  であり、(3)、(4)は  $i$  番目の点で  $C^1$  級の連続条件を満たすものとする、係数ベクトルは

$$\left. \begin{aligned} Q_2 &= 3(P_i - P_{i-1}) - 2X_{i-1} - Y_{i-1} \\ &= 3(P_i - P_{i-1}) - 2X_{i-1} - k_i \cdot X_i \\ Q_3 &= 2(P_{i-1} - P_i) + X_{i-1} + Y_{i-1} \\ &= 2(P_{i-1} - P_i) + X_{i-1} + k_i \cdot X_i \\ R_2 &= 3(P_{i+1} - P_i) - 2X_i - Y_i \\ &= 3(P_{i+1} - P_i) - 2X_i - k_{i+1} \cdot X_{i+1} \\ R_3 &= 2(P_i - P_{i+1}) + X_i + Y_i \\ &= 2(P_i - P_{i+1}) + X_i + k_{i+1} \cdot X_{i+1} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ここで、 $V$  が最小の場合(曲線のうねりが少なくなるか、あるいは小さくなる)の  $i$  番目の点における接線ベクトルと位置ベクトルを求めるため、 $X_i = (X_i^1, X_i^2, X_i^3)^*$ ,  $P_i = (P_i^1, P_i^2, P_i^3)^*$  とし、 $k_i$  は  $P_i$  の変化に対して一定であるとすると、

$$\left( i \frac{\partial}{\partial X_i^1} + j \frac{\partial}{\partial X_i^2} + k \frac{\partial}{\partial X_i^3} \right) V = \frac{4k_i}{C_{i-1}^3} (Q_2 + 3Q_3) - \frac{4}{C_i^3} R_2 \quad (14)$$

$$\left( i \frac{\partial}{\partial P_i^1} + j \frac{\partial}{\partial P_i^2} + k \frac{\partial}{\partial P_i^3} \right) V = \frac{4}{C_{i-1}^3} (-3Q_3) + \frac{4}{C_i^3} (3R_3) \quad (15)$$

(14)、(15)の右辺をそれぞれ0として、 $X_i$ ,  $P_i$  について整理すると

$$\begin{aligned} X_{i-1} + 2k_i(1+k_i) \cdot X_i + k_i^2 \cdot k_{i+1} \cdot X_{i+1} \\ = 3(C_{i-1} + k_i^2 \cdot C_i) \\ - 2P_{i-1} + 2(1+k_i^3)P_i - 2k_i^3 \cdot P_{i+1} \\ = X_{i-1} + k_i(1-k_i^2)X_i - k_i^3 \cdot k_{i+1} \cdot X_{i+1} \end{aligned} \quad (16)$$

(16)、(17)の3項方程式は、 $n$  個の3次元点列に対して、それぞれ  $(n-2)$  個となり、点列の両端での接線ベクトルが与えられるなら、弾性エネルギーを最少とする位置ベクトルと接線ベクトルが求められることになる。点列の端の点数から接線ベクトルを決定する方法として、筆者は端の3点を通る円から方向を決め、2つの curve segment にパラメータの2次式としてのベクトル関数をあてはめて、大きさを求めている。

\* 右肩の添え字はベクトルの成分を示す。

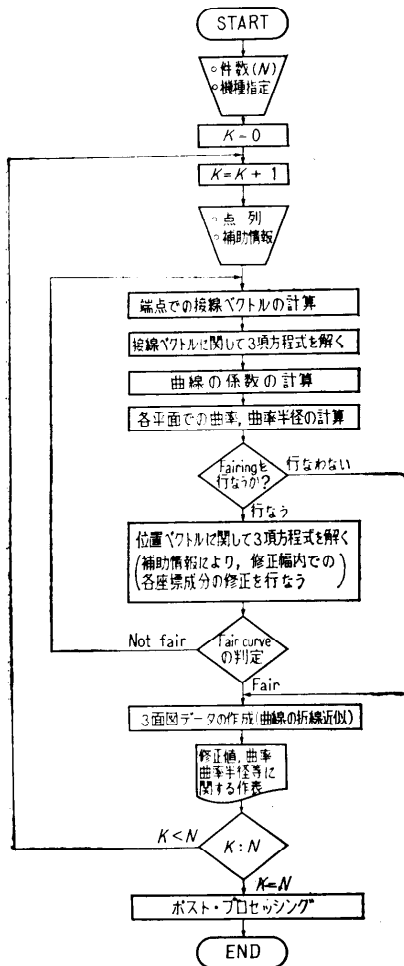
### 3. 実験

#### 3.1 実験プログラム

曲線処理のためのフロー・チャートを、第3図に示す。

実験プログラムの説明は次のとおりである。

- (1) インput点列: 最高 200 点.
- (2) 修正軸の指定: 任意の軸方向で修正可能.
- (3) 修正幅の指定: 軸ごとに修正幅の変更ができる.
- (4) lock の指定: 任意の座標成分を固定できる.
- (5) 接線の指定: 点列の両端点でのみ, 方向余弦が指定できる.
- (6) 曲線の補間: 与えられた tolerance 内で折線近似する.



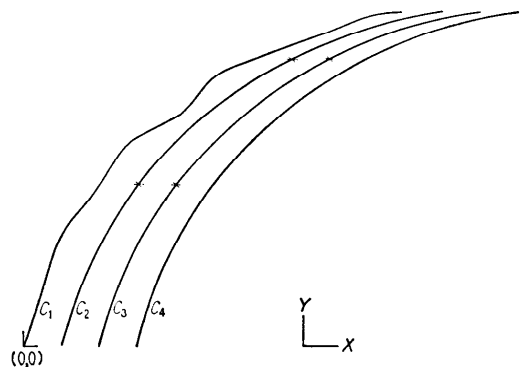
第3図

(7) fair curve に関する自動判定では, 各点での曲率の符号 (空間曲線であるため, 各基準面に投影した3つの平面曲線について曲率を計算する) を調べ, iteration により, 各点において曲率の符号に変化が見られなくなったら, これを fair curve の成立とする.

(8) 数値計算上の問題としては, 3項方程式を解くことであるが, 係数行列の対角線要素の絶対値が他の絶対値にくらべて大きいため, 解の精度は良いと考えられる.

#### 3.2 実験例

batten を用いて曲線をえがき, 曲線上の点に故意に誤差を含ませてフェアリングしたものである. 誤差の大きさは通常の曲線処理にくらべて, 1桁大きくしたものをを用いた.



第4図

(1) 例 1

第4図の平面曲線で, ×印は lock された点である.  
条件

点 例: 12 点

修正軸: X, Y

修正幅: X, Y とともに 5 mm

lock : C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub> において, 4 番目と 8 番目の点のすべての成分

C<sub>1</sub> : フィッティングのみ

C<sub>2</sub> : フェアリング (自動判定によるもので反復回数は 5 回)

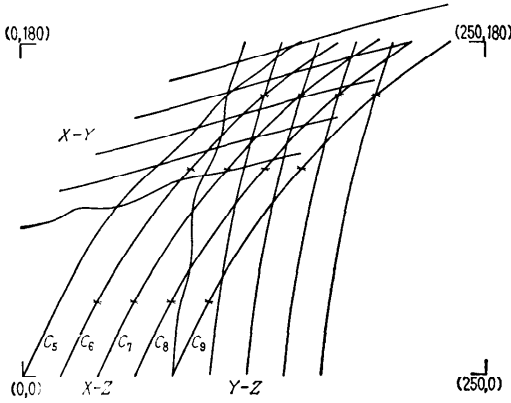
C<sub>3</sub> : フェアリング (反復回数が 20 回)

C<sub>4</sub> : フェアリング (反復回数が 20 回)

結果

フェアリングされた C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub>, C<sub>4</sub> は, いずれもなめらかな曲線であり, その評価は主観的なものと思われる.

(2) 例 2



第5図

第5図の空間曲線で、×印はlockされた点である。

条件

点列: 11点

修正軸: X, Y, Z

修正幅: 各軸とも制限なし

lock: C<sub>6</sub>, C<sub>7</sub>, C<sub>8</sub>, C<sub>9</sub> において, 3番目, 6番目, 8番目の3点の全成分

C<sub>5</sub>: フィッティングのみ

C<sub>6</sub>: フェアリング (自動判定によるもので反復回数は6回)

C<sub>7</sub>: フェアリング (反復回数が10回)

C<sub>8</sub>: フェアリング (反復回数が20回)

C<sub>9</sub>: フェアリング (反復回数が30回)

結果

各平面の修正がよくあらわれており, 実験プログラムの特長がよくつかめる。第5図は各投影図を重ねたもので, 曲線名とlockの位置はX-Z平面のみにした。他の2面はX-Z平面との対応で参照されたい。また, 修正値や曲率については以下の表に示した。

第1表: C<sub>6</sub>の修正値

第2表~第4表: C<sub>5</sub>, C<sub>6</sub>, C<sub>9</sub>の各平面での曲率の変化のグラフ

#### 4. 実験結果について

実験プログラムでさまざまな曲線 (点列は3点から80点くらいで, 曲線の長さは数メートルまでの空間曲線) について試みた結果は, 次のとおりである。

(1) フェアリングと同時に, 曲線も決定されており, フェアリングがそれほど負担にならない。大半の時間が作表やポスト・プロセッシングのために使用さ

表1

\*\*\* FAIRING \*\*\*

CURVE ( C.6 )  
ITERATION ( 6 )

ITERATION	DATA-X	DATA-Y	DATA-Z	FAIR-X	FAIR-Y	FAIR-Z	MOVED-X	MOVED-Y	MOVED-Z
1	0.0	107.00000	0.0	0.0	107.00000	0.0	0.0	0.0	0.0
2	10.00000	107.00000	21.00000	10.23811	102.14383	20.89567	0.23811	0.14383	-0.10433
3	20.00000	104.80000	40.00000	20.00000	104.80000	40.00000	0.0	0.0	0.0
4	30.00000	119.00000	67.00000	31.25575	107.85837	59.78788	1.25575	-2.14163	-0.21212
5	50.00000	111.00000	99.00000	51.10435	113.42693	88.59508	1.10435	2.42693	-1.40492
6	70.00000	119.00000	111.50000	70.00000	119.00000	111.50000	0.0	0.0	0.0
7	90.00000	127.00000	130.00000	88.86891	124.48463	132.18835	-1.13199	-2.51537	2.18835
8	110.00000	139.30000	151.60000	119.00000	139.30000	151.60000	0.0	0.0	0.0
9	130.00000	138.00000	166.00000	128.57525	138.46745	166.52465	-0.42475	0.16245	0.52465
10	140.00000	138.00000	174.00000	140.15232	137.97043	173.78894	-0.15232	-0.02957	-0.21106
11	150.00000	140.00000	180.00000	150.00000	140.00000	180.00000	0.0	0.0	0.0

第 2 表

TABLE OF ( C5 )

	-0.1100	-0.0600	-0.0100	0.0400	0.0900
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					

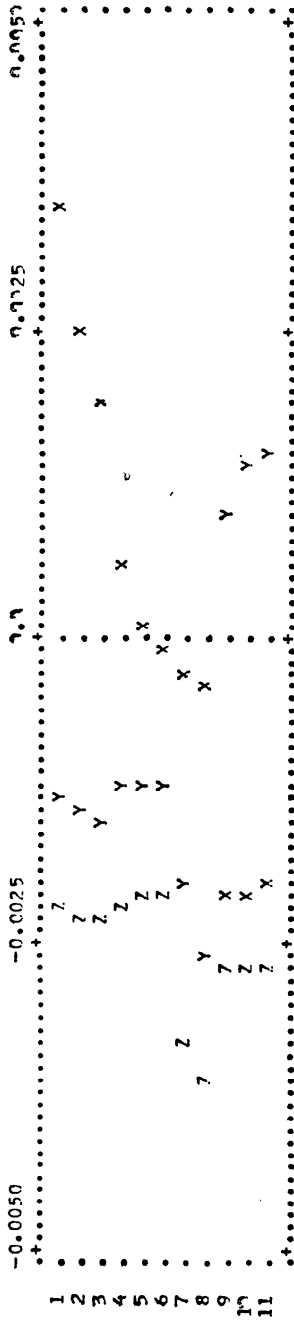
第 3 表

TABLE OF ( C6 )

	-0.0080	-0.0030	0.0020	0.0070	0.0120
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					

第 4 表

TABLE OF (9)



れている。

(2) iteration の数が増すにつれ、対象とする曲線は、曲げ剛性が様な batten そのものに近づいていく。点列の個数にもよるが、修正のほとんどが 10 回くらいの iteration でなされており、自動判定による iteration も 10 回以内がほとんどである。

(3) 最適な間隔でインプット点列を得ることが重要である。

(4) 与えられた点列に対して、修正軸、修正幅、lock の条件などを考慮して望ましい曲線を得ることが必要とされるが、対象とする曲線はそれぞれユニークであって、与えられる条件もさまざまである。たとえば、

- (a) 曲線の形状でかなめとなる点を lock して、
- (i) 修正幅を制限しない。

点に含まれるかなり大きな誤差も修正が期待できるので、初段階でのフェアリングに向いている。

- (ii) 修正幅を制限する。

要求される精度に応じた範囲内での誤差の修正を行なう。

- (b) lock は行なわないで、修正幅を制限する。

(5) batten のシミュレートによるフェアリングであるため、曲線処理の担当者はデータ作成にあたって、これまでの経験を生かすことができる。

(6) batten の断面形状を変化させて処理しているような曲線において、修正幅を大きくしたい場合は曲線を分けて処理するとか、曲げ剛性の変化を考慮したプログラム処理をしなければならない。

(7) (4), (6) にも関連するが、修正幅を大きくしてフェアリングを行なう場合は、点に含まれる誤差を取り除くという目的よりも、意図する曲線をデザインするという意味のほうがふさわしく思われる。

### 5. あとがき

空間曲線(1)からなる composite curve のフェアリングをルーチン化するためには、空間曲線に対する拘束条件の追加、解析的な曲線との接続、曲げ剛性の考慮などが必要と思われる。ルーチン化により、ある程度の現図の自動化、曲面作成プログラムにおけるインプット点列の修正による精度の向上などが考えられるが、真に効果が期待できるのは曲面のフェアリングの解決や形状に関する電子計算機での一貫した data file の処理によってである。

曲面のフェアリングの手法はさまざまであろうが、

筆者は曲線に試みた方法の拡張として、2方向の弾性曲線の4つの segment から、5項方程式を解くという方法が実用的であると考えている。

フェアリングの実験プログラム作成や実験において曲線が創成される過程を調べたり、その過程に人間が介入する必要が痛感されたが、この点は今後 CRT の利用を考えたい。

#### 参考文献

- 1) James Ferguson: Multivariable Curve Interpolation, Journal of the Association for Computing Machinery, Vol. 11, No. 2 (April 1964), p. 221~228.
- 2) 穂坂 衛: 計算機援助による設計方式, 機械学会, Vol. 71, No. 590 (昭 43-3), p. 402~411.
- 3) 藤野孝爾: 曲面定義式について, MCB 研究会資料 6708 (昭 43-1).
- 4) 山本, 堀: 固体力学 I, 岩波講座基礎工学 15.  
(昭和 44 年 2 月 13 日受付)