

## 曲線，曲面の合成および平滑化理論\*

穂 坂 衛\*\*

### Abstract

The new interpolation formula are introduced and are applied to make curves with arbitrary boundary conditions. Then the method is extended to synthesize surfaces with prescribed boundary conditions on space curves which are determined previously. So it is possible to connect two surfaces with common partial derivative values on the connecting boundary curve. In the second part of the paper the smooth fitting methods are described. The characteristic values in the curve and surface equations can be calculated by the methods from measured points of a model. In these methods shapes of curves and surfaces are simulated by those of elastic wires, meshes and plates loaded through springs connected to measured point.

By this theory a synthesized surface bounded by arbitrary space curves can be expressed easily with the fixed orthogonal coordinate system, accordingly its shape is natural and is suitable to machine processing.

### 1. ま え が き

本論文は Computer Aided Design および Computer Graphics における重要な課題である形状表現のための空間曲線，曲面の合成の理論，および測定された曲線や曲面形状の平滑化の方式についての研究報告である。筆者は計算機と人間との協力の問題を，図形処理を通して考えてきた。その例として人のイメージに浮かんだ形状を工業製品にまでもちきたすことを取り上げ，その一部として形状の数式モデルを新しく作る必要を生じ，その結果を公表した<sup>1)</sup>。一方，工業界においては，自由形状曲面あるいは彫造曲面 (free-formed surface or sculptured surface) の設計と製作には高度の熟練と長時間を必要としたため，その方法の改良と自動切削に計算機と数値制御工作機械の導入が検討され始め，形状表現や切削のプログラムが数箇所で開催されたが<sup>2)</sup>，まだ完全に満足できるものには必ずしもなっていないようであった。筆者の理論はそのこと自体を目的としたものではなかったが，時期がほぼ同じであったためか各方面からの関心と呼び<sup>3)</sup>，情報の交換が行なわれ他のやり方もわかり，実際問題

題からの要求を知ることができた。それによって筆者の仕事の拡張を行ない，理論的展開をより明確にすることと，他の方法との関連も明らかにすることもできた。本論文はその報告であり特徴とするところは，新しい内挿関数を導いたこと，高次の微係数まで連続になる曲線や曲面を自由に合成でき，また，任意の境界条件を満たせること，曲線や曲面の平滑化のモデルを作り定式化できたこと，いわゆる spline 曲線は特殊な場合として包括されたこと，境界条件を重視する曲面の平滑化にも具体的方法が得られたことなどである。さらに，これらはいずれも計算機による処理，記憶，CRT や製図機械による図形表現がやりやすいように実用的に考慮されており，この種の問題に対して理論的だけでなく，かなり実際の解答を与えるものであるように思われる。

### 2. 基本の内挿式

この節では，この論文の基本となる内挿式について説明する。この考えは筆者の前の論文で一部導入されたものであるが，一般的説明や関係式を明確に示さなかったので，後節において用いる部分を含めて関係式を示す。

関数を接続して合成していくために，各区間の境界値によって，区間内部の関数を表わす必要が生ずる。

\* Theory of Curve and Surface Synthesis and Their Smooth Fitting, by Mamoru Hosaka (Inst. of Space and Aeronautical Sciences, Univ. of Tokyo)

\*\* 東京大学宇宙航空研究所

そのために、区間 (0, 1) で連続1 価の関数  $\phi(t)$  を  $2m+1$  次の代数式で近似し、 $\phi(t)$  をその区間の両端における  $m$  次までの微係数を用いて、つぎのように書く。

$$\phi(t) = \sum_{i=0}^m \{ \phi_0^{(i)} p_i(m, t) + \phi_1^{(i)} q_i(m, t) \} \quad (1)$$

ここで  $\phi_0^{(i)}, \phi_1^{(i)}$  は  $t=0$  および  $1$  における  $\phi(t)$  の  $i$  次の微係数の値である。  $p_i(m, t)$  と  $q_i(m, t)$  は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} p_i(m, t) &= \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{m-i} (-1)^{i+j-1} \binom{2m+1-i}{j} \\ &\quad \times t^{i+j} (t-1)^{2m+1-i-j} \\ q_i(m, t) &= \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{m-i} (-1)^j \binom{2m+1-i}{j} \\ &\quad \times t^{2m+1-i-j} (t-1)^{i+j} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$p_i(m, t)$  を  $t$  について  $k$  回微分し  $t=0$  とおくと

$$\left. \begin{aligned} p_i^{(k)}(m, 0) &= 0, \quad 0 \leq k < i \\ p_i^{(i)}(m, 0) &= 1, \quad k = i \\ p_i^{(k)}(m, 0) &= 0, \quad i < k \leq m \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

が得られる。第1, 第2式は容易にわかる、第3の式は

$$p_i^{(k)}(m, 0) = \frac{(-1)^{i+k} (2m+1-i)!}{i!} \frac{k!}{(2m+1-k)! (k-i)!} \\ \times \sum_{j=0}^{k-i} (-1)^j \frac{(k-i)!}{j! (k-i-j)!}$$

となり、最後の項は  $(1-1)^{k-i}$  を展開したものであるから、0 となることで証明される。同様に

$$\left. \begin{aligned} q_i^{(k)}(m, 1) &= 0, \quad 0 \leq k < i \\ q_i^{(i)}(m, 1) &= 1, \quad k = i \\ q_i^{(k)}(m, 1) &= 0, \quad i < k \leq m \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

となる。さらに

$$p_i^{(k)}(m, 1) = q_i^{(k)}(m, 0) = 0, \quad 0 \leq k \leq m \quad (5)$$

である。(3), (4), (5) 式の関係より(1)式の表わし方は正しい。

両端における  $m$  より高次の微係数は、 $m$  次までの微係数で書くことができる。それに必要な係数  $p^{(k)}(m, 0), q^{(k)}(m, 0)$  等もまとめて書いておく。

$$\phi^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^m \{ \phi_0^{(i)} p_i^{(k)}(m, t) + \phi_1^{(i)} q_i^{(k)}(m, t) \} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} p_i^{(k)}(m, 0) &= (-1)^{i+k} q_i^{(k)}(m, 1) \\ &= \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{m-i} (-1)^{i+j-k} \frac{(2m+1)! k}{j! (k-i-j)! (2m+1-k)!} \\ &\quad 2m+1 \geq k > m \\ p_i^{(k)}(m, 1) &= (-1)^{i+k} q_i^{(k)}(m, 0) \\ &= \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{m-i} (-1)^{i+j-k} \frac{(2m+1-i)!}{j! (2m+1-i-j)!} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &\frac{k!(i+j)!}{(k-2m-1+i+j)!(2m+1-k)!} \\ &2m+1 \geq k > m \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

つぎに  $p_i(m, t), q_i(m, t)$  の間の関係もあげておく。

$$\left. \begin{aligned} p_i(m, t) &= (-1)^i q_i(m, 1-t) \\ q_i(m, t) &= (-1)^i p_i(m, 1-t) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} p_0(m, t) + q_0(m, t) &= 1 \\ q_0(m, t) + p_1(m, t) + q_1(m, t) &= t \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

さらに' で  $t$  についての微分を表わせば、つぎの関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} p_0'(m, t) &= -q_0'(m, t) \\ &= (-1)^{m-1} \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} t^m (t-1)^m \\ -i p_i(m, t) + p_{i-1}(m, t) + p_i'(m, t) \\ &\quad \cdot (t-1) + p_i^{(m+1)}(m, 0) \cdot p_m(m, t) = 0 \\ i p_i(m, t) - p_i'(m, t) \cdot t \\ &\quad + p_i^{(m+1)}(m, 1) \cdot q_m(m, t) = 0 \\ -i p_i(m, t) + q_i'(m, t) \cdot (t-1) \\ &\quad + q_i^{(m+1)}(m, 0) \cdot p_m(m, t) = 0 \\ i q_i(m, t) + q_{i-1}(m, t) - q_i'(m, t) \cdot t \\ &\quad + q_i^{(m+1)}(m, 1) \cdot q_m(m, t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(10) 式の中の  $p_m, p_i^{(m+1)}$  等は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} p_m(m, t) &= \frac{(-1)^{m-1}}{m!} t^m (t-1)^{m+1} \\ q_m(m, t) &= \frac{1}{m!} t^{m+1} (t-1)^m \\ p_i^{(m+1)}(m, 0) &= \frac{-1(m+1) \cdot (2m+1-i)!}{i!(m+1-i)!} \\ p_i^{(m+1)}(m, 1) &= \frac{(-1)^{m-1} (2m+1-i)!}{i!(m-i)!} \\ q_i^{(m+1)}(m, 0) &= (-1)^{m+i-1} p_i^{(m+1)}(m, 1) \\ q_i^{(m+1)}(m, 1) &= (-1)^{m+i-1} p_i^{(m+1)}(m, 0) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここにあげた諸関係式は、後節に使用するものであり、それらの導入や証明は幾分技巧を要するが、(2)の基本式を丹念に適用すれば正しいことはわかるので算出過程は省略する。通常の場合実用にする  $m$  の値は高くても3であろう。以下によく用いる  $m-2$  までの  $p_i(m, t), q_i(m, t)$  をあげておく。

$$\left. \begin{aligned} m=0; \quad p_0(0, t) &= 1-t, \quad q_0(0, t) = t \\ m=1; \quad p_0(1, t) &= 1-q_0(1, t) \\ &q_0(1, t) = t^2(3-2t) = f(t) \\ &p_1(1, t) = t(t-1)^2 = g(t) \\ &q_1(1, t) = t^2(t-1) = h(t) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ここで、 $f(t), g(t)$ , および  $h(t)$  は、筆者の従来用

いていた記号で  $m=1$  のときは便利に用いられる。

$$\left. \begin{aligned} m=2; & p_0(2,t)=1-q_0(2,t) \\ & q_0(2,t)=t^3(6t^2-15t+10) \\ & p_1(2,t)=-t(t-1)^3(3t+1) \\ & q_1(2,t)=-t^3(t-1)(3t-4) \\ & p_2(2,t)=-\frac{1}{2}t^2(t-1)^3 \\ & q_2(2,t)=\frac{1}{2}t^3(t-1)^2 \end{aligned} \right\} (14)$$

$m \geq 3$  以上も容易に作ることはできるが、実用的にはあまり現われてこないであろう、以後  $m$  を区別しないで論ずるときは単に  $p_i(t), q_i(t)$  とかくことにする。

### 3. 曲線の式

曲線の式を前節の内挿式を用いて、その両端のベクトル量で表わせば、パラメタ  $t$  を用いて

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{i=0}^m \{ \mathbf{R}_0^{(i)} p_i(t) + \mathbf{R}_1^{(i)} q_i(t) \} \quad (15)$$

が一般式であり、ここで  $\mathbf{R}_j^{(i)}$  の肩字は  $t$  についての微分の回数を表わし添字  $j=0$  および  $1$  は始点と終点における値を示す。 $m=0$  ときは2点を結ぶ直線を表わす。

$m=1$  のとき、原点を曲線の出発点にとれば、(15)式は(13)式を用いて

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{A}f(t) + \mathbf{B}g(t) + \mathbf{C}h(t) \quad (16)$$

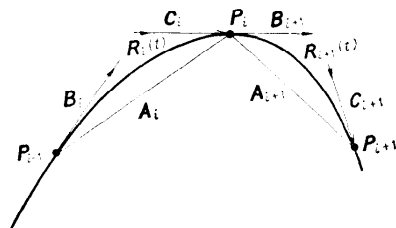
となり  $\mathbf{A}$  は弦のベクトル、 $\mathbf{B}, \mathbf{C}$  は両端における接線ベクトルであり、筆者の従来使用している形式になる。

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}(1), \mathbf{B} = \mathbf{R}^{(1)}(0), \mathbf{C} = \mathbf{R}^{(1)}(1) \quad (17)$$

(16)式の形式で表わされた曲線  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_n, \dots$  が、曲率まで連続に接続したとすると(第1図)、接続点においてつぎの条件が成立しなければならない。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}_i^{(1)}(1) &= k_{i+1} \mathbf{R}_{i+1}^{(1)}(0) \\ \mathbf{R}_i^{(2)}(1) &= k_{i+1}^2 \mathbf{R}_{i+1}^{(2)}(0) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ここで  $k_i$  は任意の定数であるが、各曲線を同一のス



第1図 曲線の接続

ケールで測るとするならば

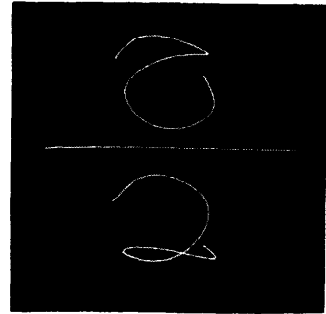
$$k_i = |\mathbf{A}_i| / |\mathbf{A}_{i+1}| \quad (19)$$

ととるべきであろう。(18), (19)式よりつぎの漸化式が得られる。

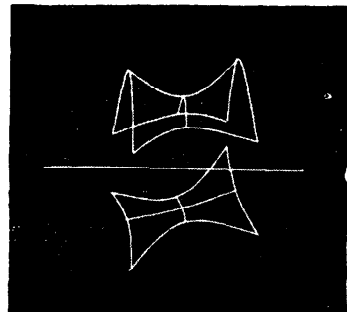
$$\left. \begin{aligned} \mathbf{C}_i &= k_i \mathbf{B}_{i+1} \\ \mathbf{B}_i + 2k_i(1+k_i)\mathbf{B}_{i+1} + k_i^2 k_{i+1} \mathbf{B}_{i+2} \\ &= 3(\mathbf{A}_i + k_i^2 \mathbf{A}_{i+1}) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

(20)式よりすべて  $\mathbf{A}_i$  が与えられ、かつ2個の  $\mathbf{B}_i$  についての条件が定まっていれば、それらと第2式の3項連立方程式を解くことにより、すべての  $\mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i$  を定めることができ、したがって、全曲線が定まる。初めの2個の  $\mathbf{B}_i$  の条件は曲率ゼロの2点 ( $\mathbf{R}^{(2)}=0$  となり、通常全曲線の両端とする)、あるいは中間の一点の座標が定まれば計算することができる。

従来、別の方法によって  $k_i=1$  とした(20)式が用いられていたが、しばしば思わしくない結果が得られるのは、(19)式のスケールの関係を無視しているからである。(19)式を用いると計算は幾分多くなる。もし、 $k_i$  が1と大きく変わらないときは、 $k_i=1$  とした(20)式を解いても、結果として得られる曲線は大体



(a) 空間に任意に8点を与えて、順序を指定して作った曲線



(b) 空間に9点を与え、通り方と順序を指定して作った曲線

第2図

同じ形になるが、場所によって  $k_i$  が大きく変わる場合には、得られる曲線は期待する曲線形状とはならない。

φ

第2図は(20)式を用いた空間曲線の例で、9点および8点を与え、通過する順序をライトペンで指定して作られた曲線の直交面への投影図である。以上の曲線はパラメタ表示であるが、直交座標で1つの変数を独立変数として、区間  $(x_0, x_1)$  での曲線を(15)式と同様に作ると次式で表わせる。

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^m \begin{pmatrix} y_0^{(i)} & y_1^{(i)} \\ z_0^{(i)} & z_1^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i(m, u) \\ q_i(m, u) \end{pmatrix} l^i \quad (21)$$

ここで、

$$u = (x - x_0)/l, \quad l = x_1 - x_0 \quad (22)$$

で与えられる。 $m=1$  の場合の(20)式に対応するものは、 $y, z$  の  $x$  での微分を、 $y', z'$  とかくと次式となる。この場合、接続点での条件は、 $y', y''$  と  $z', z''$  がそれぞれ連続になるように定める。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \begin{pmatrix} y_{i-1}' \\ z_{i-1}' \end{pmatrix} + 2 \left( \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \right) \begin{pmatrix} y_i' \\ z_i' \end{pmatrix} \\ & + \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \begin{pmatrix} y_{i+1}' \\ z_{i+1}' \end{pmatrix} = \frac{3}{x_i - x_{i-1}} \begin{pmatrix} y_i - y_{i-1} \\ z_i - z_{i-1} \end{pmatrix} \\ & + \frac{3}{x_{i+1} - x_i} \begin{pmatrix} y_{i+1} - y_i \\ z_{i+1} - z_i \end{pmatrix} \quad (23) \end{aligned}$$

これより求められる  $y', z'$  を用いて作られる曲線は、各区間ごとに、 $m=1$  としたときの(21)式で表わされ、その全曲線に対して

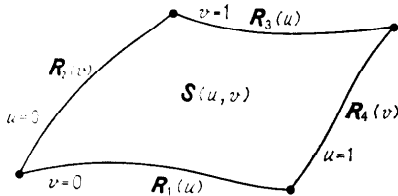
$$\int \left\{ \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2 z}{dx^2} \right)^2 \right\} dx = \min. \quad (24)$$

の条件を講たしている。これは第6節で証明する。

以上は曲率まで連続になるようにする場合で、それには  $p_i(m, t), q_i(m, t)$  において  $m=1$  で間に合った。この方法で一般には  $2m$  次までの微係数を連続に接続させることができる。

#### 4. 曲面の式

$(0, 1)$  の間を動くパラメタ  $u, v$  を用いて、曲面上の位置ベクトルを  $S(u, v)$  とかく(第3図)。  $u, v$  の



第3図 曲面の記号

どちらかが0または1であれば、これは曲面の縁を表わす。 $v$  を一定として、 $u$  が0から1に変わると、 $S(u, v)$  は曲面上の一つの曲線を表わすから、(15)式により

$$S(u, v) = \sum_i \{ S^{(i,0)}(0, v) p_i(u) + S^{(i,0)}(1, v) q_i(u) \} \quad (25)$$

となる。 $S^{(i,0)}$  は  $S(u, v)$  を  $u$  で  $i$  回微分したものである。さらに、 $S^{(i,0)}(0, v), S^{(i,0)}(1, v)$  は当然  $v$  についての関数であるから、その両端での値を用いて書くことができる。

$$\left. \begin{aligned} S^{(i,0)}(0, v) &= \sum_j \{ S_{00}^{(i,j)} p_j(v) + S_{01}^{(i,j)} q_j(v) \} \\ S^{(i,0)}(1, v) &= \sum_j \{ S_{10}^{(i,j)} p_j(v) + S_{11}^{(i,j)} q_j(v) \} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

ここで  $S_{i,j}^{(i,j)}$  は  $S^{(i,0)}(u, v)$  を  $v$  で  $j$  回微分して、 $u=k, v=l$  とおいたもので、曲面の偏微係数の4隅における値である。(26)式を(25)式に代入すると、曲面の一般形として次式が得られる。

$$\begin{aligned} S(u, v) &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \{ S_{00}^{(i,j)} p_i(u) p_j(v) \\ & + S_{01}^{(i,j)} p_i(u) q_j(v) + S_{10}^{(i,j)} p_j(v) q_i(u) \\ & + S_{11}^{(i,j)} q_i(u) q_j(v) \} \quad (27) \end{aligned}$$

(23)式は4隅における曲面の位置および偏微係数による曲面の内挿式である。この式を変形して曲面の4個の縁の曲線  $R_1(u), R_2(v), R_3(u), R_4(v)$  を主にして曲面を表現する。曲面の原点を  $S(0,0)$  にとり、縁の曲線の弦ベクトルを  $R_{11}, R_{21}, R_{31}$  および  $R_{41}$ 、また、 $p_0(t) = 1 - f(t), q_0(t) = f(t)$  とかく。(25)式の右辺の  $\{ \}$  の中を  $a_{ij}$  とすると、 $S(u, v) = (a_{00} + a_{01}) + (a_{00} + a_{10}) - a_{00} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}$  となること、および  $R_{11} + R_{41} = R_{21} + R_{31}$  の関係を用いると結局次式を得る。

$$\begin{aligned} S(u, v) &= R_1(u) + \{ R_3(u) - R_1(u) \} f(v) \\ & + \{ R_2(v) + R_4(v) - R_2(v) \} f(u) \\ & + \frac{1}{2} f(u) f(v) \{ R_{11} + R_{21} - R_{31} - R_{41} \} \\ & + S_0(u, v) \quad (28) \end{aligned}$$

これは筆者の用いた従来の形式である。 $S_0(u, v)$  は(25)式の右辺の和を  $i=1, j=1$  から始めたもので、 $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}$  に等しい。MITのCoonsの曲面の式といわれるものは、別の方法で導びかれるのであるが、結果は(28)式で  $S_0(u, v) = 0$  としたものと等価になる。これでは縁の曲線を含む曲面において4隅で、 $S^{(1,1)}$  の値が0となって、曲面の接続を行なうとき不自然な形をしいることになる。 $m=1$  としたときの  $S_0(u, v)$  は

従来の筆者の式では  $\lambda, \mu=0, 1$  として  $S^{(1,1)}(\lambda, \mu)$  を  $T_{\lambda\mu}$  とかいて、つぎの形式が用いられていた<sup>5)</sup>。

$$S_0(n, v) = T_{00}g(u)g(v) + T_{01}g(u)h(v) + T_{10}g(v)h(u) + T_{11}h(u)h(v) \quad (29)$$

普通には  $m=1$  まで考えれば十分である場合が多いが、 $m>1$  の場合も容易に  $S_0(u, v)$  を書き下ろすことはできる。

(27)あるいは(28)式はパラメタ表示の曲線座標系を用いているため、計算機における入出力を取り扱う場合に複雑な計算が必要となる。この難点を避けるため固定した直交座標系を用い、独立変数として  $x$  と  $y$  を選び、曲面を  $\zeta(x, y)$  で表わす。  $x, y$  が独立変数であると曲面が表わしにくいときは、一座標軸まわりに座標回転を行えばよくその角度は  $\pi/2$  あるいは  $\pi/4$  で十分である。(27)式より  $x=x_0, x_1$  と  $y=y_0, y_1$  で囲まれる4角形で切りとられた曲面の式は

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) = & \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m l_x^i l_y^j \{ \zeta_{00}^{(i,j)} p_i(u) p_j(v) \\ & + \zeta_{01}^{(i,j)} p_i(u) q_j(v) + \zeta_{10}^{(i,j)} p_j(v) q_i(u) \\ & - \zeta_{11}^{(i,j)} q_i(u) q_j(v) \} \quad (30) \end{aligned}$$

ここで、  $u=(x-x_0)/l_x$ ,  $v=(y-y_0)/l_y$ ,  
 $l_x=x_1-x_0$ ,  $l_y=y_1-y_0$

(30)式は曲面を  $xz$  面,  $yz$  面に平行な平面で格子状に切断し、格子点における曲面の特性  $\zeta^{(i,j)}$  が定められれば、全曲面は決定されることを示す[第4図(a)(b)]。しかし、一般に形状の設計においては、境界線や特性線が先に与えられ、その条件に適合する曲面を作ることが要求される場合が多い。境界線や特性線上における面の性質の条件が十分に満たされないことは、製品の感覚的な価値ばかりでなく、製品そのものの組立でも不工合となる。したがって、あらかじめ定められた境界の空間曲線を主にし、曲線に囲まれて曲面が作られていると考え、座標面に平行な平面でその曲面を切断し、その交線の両端は境界の曲線上にあり、そこでの交線の傾斜や曲率は他の条件より与えられているとする。第5図に示すように  $L_0, L_1$  の境界線をもつ曲面  $S^A$  と  $yz$  面と平行の平面との交線を考え  $\zeta(x, y)$ ,  $x=\text{const.}$  で表わす。境界の曲線  $L_0, L_1$  は(21)式の形式で表わし、 $y_0(x), z_0(x)$  および  $y_1(x), z_1(x)$  とかく。

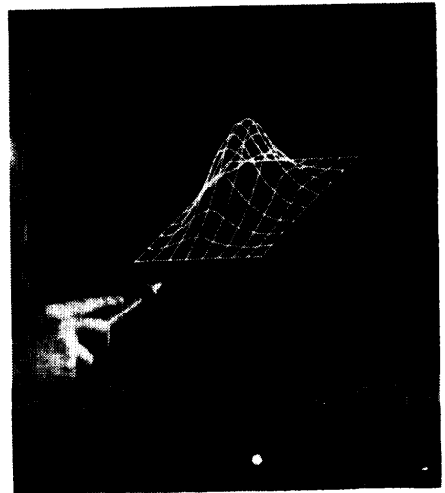
曲線の一般式より

$$\begin{aligned} \zeta(x, y) = & \sum_{j=0}^m l_y^j \{ \zeta^{(0,j)}(x, y_0) p_j(v) \\ & + \zeta^{(0,j)}(x, y_1) q_j(v) \} \quad (31) \end{aligned}$$

ここで、  $v=(y-y_0)/l_y$ ,  $l_y=y_1-y_0$  である。

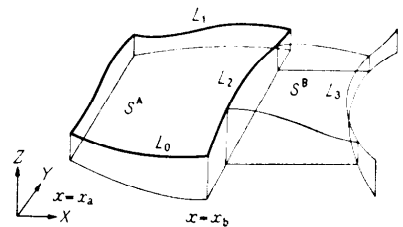


(a) 格子点の特性値より面の決定



(b) CRT 上での曲面の作製

第4図



第5図 曲面の合成と接続

また、

$$\zeta(x, y_0) = z_0(x), \quad \zeta(x, y_1) = z_1(x) \quad (32)$$

は境界の  $z$  座標で  $x$  の関数として与えられている。同様に境界における  $y$  方向の傾斜や曲率、さらに高次の偏微係数も  $x$  の関数として定められているものとする。したがって、それらは

$$\zeta^{(0,j)}(x, y_k) = \phi_{0,j,k}(x) \quad \left. \vphantom{\zeta^{(0,j)}(x, y_k)} \right\} \quad (33)$$

$$j=1, 2, \dots, m, \quad k=0, 1$$

のようにかくことができる。xをパラメタとみると、(31)式は境界  $L_0, L_1$  における条件を満たした曲面の式である。この曲面の x 方向の偏微係数  $\zeta^{(i,0)}(x, y)$  は、後に証明するが(31)式で表わされる  $\zeta(x, y)$  と同じ形式にかくことができる。

$$\zeta^{(i,0)}(x, y) = \sum_{j=0}^m l_y^j \{ \zeta^{(i,j)}(x, y_0) p_j(v) + \zeta^{(i,j)}(x, y_1) q_j(v) \} \quad (34)$$

この式の右辺にある  $\zeta^{(i,j)}(x, y_k)$  は、(33)式が定められているなら既知となる。(33)式にならって

$$\zeta^{(i,j)}(x, y_k) = {}_k\phi_{i,j}(x) \quad (35)$$

とかく。これにはつぎの漸化式が成立する。

$${}_k\phi_{i,j}(x) = {}_k\phi_{i-1,j'}(x) - {}_k\phi_{i-1,j+1}(x) \cdot y_k'(x) \quad (36)$$

$y_k(x)$  は境界線  $k$  の  $y$  座標で  $x$  の関数として与えられており、 ${}_k\phi_{0,j}(x)$  は  $j \leq m$  に対しては(33)式により、また、 $j > m$  では(31)式を  $y$  で  $j$  回偏微分し  $v=0$ , あるいは1とおいたものであるから(6)、(7)式によって  $j \leq m$  における  ${}_k\phi_{0,j}(x)$  で表わされる。すなわち、(31)式を  $n$  回  $y$  で偏微分すると

$$\begin{aligned} \zeta^{(0,n)}(x, y) &= \sum_{j=0}^m l_y^j \{ \zeta^{(0,j)}(x, y_0) p_j^{(n)}(v) + \zeta^{(0,j)}(x, y_1) q_j^{(n)}(v) \} (dv/dy)^n \\ &= \sum_{i=0}^m l_y^{j-n} \{ {}_0\phi_{0,j}(x) p_j^{(n)}(v) + {}_1\phi_{0,j}(x) q_j^{(n)}(v) \} \end{aligned} \quad (37)$$

境界においては  $v=0$  か  $v=1$  であるから、 $p_j^{(n)}(v), q_j^{(n)}(v)$  は(7)式より求められる。これらの関係より(35)式の  $\zeta^{(i,j)}(x, y_k)$  は定まり、したがって、(34)式は確定する。この他の曲面の特性値  $\zeta^{(i,n)}(x, y)$  は(34)より次式で与えられる。

$$\zeta^{(i,n)}(x, y) = \sum_{j=0}^m l_y^{j-n} \{ \zeta^{(i,j)}(x, y_0) p_j^{(n)}(v) + \zeta^{(i,j)}(x, y_1) q_j^{(n)}(v) \} \quad (38)$$

(34)式は(31)式と形式が同じになっているが、これは(31)式より導びかれなければならない。直接の証明は面倒なので、(34)式が成立するものとして、それより  $\zeta^{(i+1,0)}(x, y)$  を計算し、結果が(34)式で  $i$  を  $i+1$  にしたものと同じになることを証明する。(34)式を  $x$  で微分すると

$$\begin{aligned} \zeta^{(i+1,0)}(x, y) &= \sum_{j=0}^m l_y^j \{ \zeta^{(i+1,j)}(x, y_0) p_j'(v) + \zeta^{(i+1,j)}(x, y_1) q_j'(v) \} \\ &+ \sum_{j=0}^m j l_y^{j-1} \cdot l_y' \{ \zeta^{(i,j)}(x, y_0) \cdot p_j(v) + \zeta^{(i,j)}(x, y_1) \cdot q_j(v) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{i=0}^m l_y^j \{ \zeta^{(i,j+1)}(x, y_0) \cdot p_j(v) y_0' \\ &+ \zeta^{(i,j+1)}(x, y_1) \cdot q_j(v) y_1' \} \\ &+ \sum_{j=0}^m l_y^j \{ \zeta^{(i,j)}(x, y_0) \cdot p_j'(v) \cdot v' \\ &+ \zeta^{(i,j)}(x, y_1) \cdot q_j'(v) v' \} \end{aligned} \quad (39)$$

(39)式の中で  $\zeta^{(i,m+1)}(x, y_k)$  なる量が表われるが、これは(38)式で  $n=m+1$ , および  $y=y_k$  (すなわち、 $v=0$  あるいは1) において、 $j \leq m$  である  $\zeta^{(i,j)}(x, y_k)$  等で表わされる。

また、 $v' = \{(v-1)y_0' - v y_1'\} / l_y$  であることを注意して(39)式の第2, 第3, 第4の  $\Sigma$  をまとめると

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^m \zeta^{(i,j)}(x, y_0) l_y^{j-1} [ \{-j p_j(v) + p_{j-1}(v) + p_1'(v) \cdot (v-1) + p_j^{(m+1)}(m, 0) \cdot p_m(v) \} y_0' \\ &+ \{ j p_j(v) - p_j'(v) \cdot v + p_j^{(m+1)}(m, 1) q_m(v) \} y_1' ] \\ &+ \sum_{i=0}^m \zeta^{(i,j)}(x, y_1) l_y^{j-1} [ \{-j p_j(v) + q_1'(v) \cdot (v-1) + q_j^{(m+1)}(m, 0) p_m(v) \} y_0' \\ &+ \{ j q_j(v) + q_{j-1}(v) - q_j'(v) \cdot v + q_j^{(m+1)}(m, 1) \cdot q_m(v) \} y_1' ] \end{aligned} \quad (40)$$

となる。これは(10)式によって常に0である。したがって、(39)式の第1項だけ残り、これは(34)式と同じ形式である。よって(31)式より(34)式は正しく導かれる。

### 5. 曲面の接続

2つの曲面  $S^A(u, v)$  と  $S^B(u, v)$  が一つの境界曲線を共有し接続している。その境界線で高次の偏微係数まで連続であるためには、境界線の両端における共有点の  $S^A, (i,j)$  と  $S^B, (i,j)$  とが等しいか、 $i \neq 0, j \neq 0$  に対しては、それらの対応するベクトルが比例関係にあることが十分条件となる。一般に、この条件だけで接続を行なうと、両面のパラメタと実際の面のスケールとの関係が規定されていないため、数学的条件は合うが不自然な形状が発生するおそれがある。その上、 $u, v$  の曲線座標系のため入出力での変換は複雑な計算を伴う。これらの難点を除き、境界条件を満たし、かつ面の接続を容易にするために、(31)式で曲面  $S^A$  を表わし、 $x=x_a, x=x_b$  における断面を境界とする(第5図参照)。 $x=x_b$  における断面の曲線を  $L_2$  と、 $y$  を独立変数とする空間曲線  $L_3$  を考え、 $L_2, L_3$  の間を覆う曲面  $S^B$  と  $y=const.$  の平面との交線の曲線  $L_4$  を作る。

$$\left. \begin{aligned}
 L_2: x &= x_0, \\
 z(y) &= \zeta(x_0, y) = \sum_{j=0}^m l_y^j \{ \zeta^{(0,j)}(x_0, y_0) p_j(v) \\
 &\quad + \zeta^{(0,j)}(x_0, y_1) q_j(v) \}
 \end{aligned} \right\}$$

ここで、

$$v = \{y - y_0(x_0)\} / l_y, \quad l_y = y_1(x_0) - y_0(x_0) \quad (41)$$

$$L_3: x_3 = x_3(y), \quad z_3 = z_3(y) \quad (42)$$

$$L_4: y = y,$$

$$\left. \begin{aligned}
 z(x) &= \zeta(x, y) = \sum_{i=0}^m l_x^i \{ \zeta^{(i,0)}(x_0, y) p_i(u) \\
 &\quad + \zeta^{(i,0)}(x_3, y) q_i(u) \}
 \end{aligned} \right\}$$

ここで、

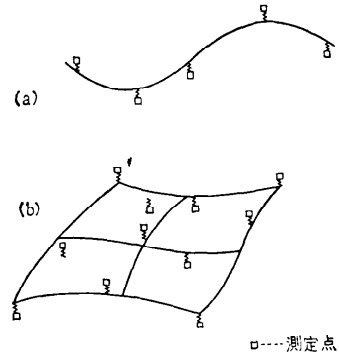
$$u = \{x - x_0\} / l_x, \quad l_x = x_3(y) - x_0 \quad (43)$$

(43)式で  $y$  をパラメタとみれば、これは曲線  $L_2$ ,  $L_3$  を境界とする曲面  $S^B$  である。この曲面  $S^B$  の  $\zeta^{(i,0)}(x_0, y)$  を (34) 式で  $x = x_0$  とおいた曲面  $S^A$  の  $\zeta^{(i,0)}(x_0, y)$  に等しくすれば、曲面  $S^A$  と  $S^B$  は、 $x = x_0$  において高次の微係数まで一致して連続になっている。このように平面曲線が両端で空間曲線の拘束を受けて、変形しながら空間を移動することによって曲面を作っていく。この拘束は境界の条件を規定しているから、上述の方法で任意の形状の曲面を合成することが可能となる。これでは接続される面の間の尺度の単位は同じである。また母線は平面曲線であるため、面の製作や製図、あるいは座標の回転等に対しても計算が容易になる。 $p_i, q_i$  は代数式であるため計算機にとって有利であり、さらに、この理論には近似がないため使用制限の条件は少ないであろう。曲線座標系を用いざるを得ない Coons 流の patch 曲面にこだわる必要はなくなった。この論文では、一般形を主にして議論をすすめたが、実際問題では  $m=1$  で十分であり、特別な箇所  $m=2$  の式を用いればよいように思われる。

### 6. 曲線のあてはめと平滑化

前節までに曲線と曲面を表現する式を導いたが、一般にこれらの式の係数の数値を、あらかじめ与えて曲線や曲面を作るのではなく、設計者のイメージと与えられた設計・製作上の条件を考慮して、曲面の形状を定めていくのが普通である。したがって、最初の形態はスケッチや製図、または実体のモデルである。これを測定して前述の数式への変換を行なうことと、それらの相互のデータの間の関係を計算機内部に確立し計算機の指令によって、それらのデータにアクセスしたり変換が行なえるようになっていなければ計算機に

よる形状処理は行なえない。ここでは初めの部分、すなわち測定された点群の座標値から、方程式に用いるべきデータへの変換の部分に議論を限定する。測定された点群のデータは、当然測定の誤差を伴うし、設計者の意図するものは必ずしも、そこに描かれたもの、作られたモデルそのものではなく、それらに主観的な補正を加えた形状である。計算機はこれらのデータを受け入れ、矛盾を除き、曲線や曲面にはフェヤリングといわれる平滑化を施し、次第に設計者のイメージに適合した形状のデータを作る必要がある。フェヤリングの操作は明確な定義はなく、多分に感覚的なものである。計算機ですべて自動化するのは困難であるようにも見えるが、筆者はそれを与えられた拘束条件のもとで、曲率の2乗の曲線に沿う積分値を曲線の評価関数とし、それが最小値になるよう曲線を定める操作をフェヤリングであると仮定をたてた。平面曲線について厳密に方程式をたて、それを解いて仮定の有効性をたしかめた<sup>6)</sup>。これは複雑な非線形の境界値問題であり、それを解くことは、筆者の方法を用いてもかなりの計算時間を必要とする。そのためここでは方程式を線形化し、実用的な新しい数式モデルを考え、曲線および曲面の平滑化を定式化する。



第6図 平滑化の弾性モデル

第6図に示すように与えられた点群には、初期長さ0のばねの一端が固着し、他端は一樣な弾性線に引きかけてあり、これで全体は弾性的平衡状態にあるとする。この弾性線の形状が与えられた点群に対する最もなめらかな曲線あてはめの形状であるとする。同様にばねを通して負荷された弾性網、あるいは弾性板の形状が、点群に対する最もなめらかな曲面の形状を与えると考え。前節までの曲線や曲面の理論に現われる各微係数の値は、この形状によって定められるのである。

第6図(a)の線の曲げ剛性を  $EI$ , ばね定数を  $k_i$ , 測定点の座標を  $a_i$ , 平衡状態における形状を  $y(x)$  とすると, 系の弾性エネルギーは

$$V = \frac{1}{2} \sum_i k_i \{y(x_i) - a_i\}^2 + \frac{1}{2} EI \int y''^2 dx \quad (44)$$

で表わされ, これを最小にするように  $y(x)$  を定める. この他に拘束条件がつけば, その条件式にラグランジュ係数をかけて, (44)式の関数に加えればよい. (44)式は見方を変えると, 条件付の最小2乗法の曲線あてはめの基礎式となる.

点群  $P_0, P_1, \dots, P_n$  に対する平滑化した曲線の区間  $(i-1, i)$  での式を,  $m=1$  として(21)式を用いると

$$y_{i-1,i} = y_{i-1}p_0(u) + y_iq_0(u) + y_{i-1}'l_i p_1(u) + y_i' l_i q_1(u) \quad (45)$$

で表わされ, これより

$$y_{i-1,i}'' = 6(y_i - y_{i-1})(1-2u)/l_i^2 + y_{i-1}'(6u-4)/l_i + y_i'(6u-2)/l_i \quad (46)$$

が得られる. ここで

$$l_i = x_i - x_{i-1}, \quad u = (x - x_{i-1})/l_i$$

$y_{i-1,i}''$  を(44)のエネルギー式に入れる.

$y(x_i)$  は  $y_i$  とかかれ,  $\int y''^2 dx$  は  $\int_i y_{i-1,i}''^2 dx$  となることに注意して,  $y_i, y_i'$  を変化させて(44)式の最小を作る.

$$\frac{\partial u}{\partial y_i} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y_i'} = 0 \quad (47)$$

この結果つぎの式が与えられる.

$$y_i - a_i + \frac{EI}{k_i} \left( 12 \frac{y_i - y_{i-1}}{l_i^3} - 6 \frac{y_{i-1}'}{l_i^2} - 6 \frac{y_i'}{l_i^2} - 12 \frac{y_{i+1} - y_i}{l_{i+1}^3} + 6 \frac{y_i'}{l_{i+1}^2} + 6 \frac{y_{i+1}'}{l_{i+1}^2} \right) = 0 \quad (48)$$

$$\frac{y_{i-1}'}{l_i} + 2 \left( \frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}} \right) y_i' + \frac{y_{i+1}'}{l_{i+1}} = 3 \frac{y_i - y_{i-1}}{l_i^2} + 3 \frac{y_{i+1} - y_i}{l_{i+1}^2} \quad (49)$$

(49)式は(23)式の  $y$  成分だけをとったものと同じになり, したがって, 曲線の形状は接続点において, 左右の曲線の  $y''$  を等しくしたものと全く同じになる. (23)式の  $x(x)$  についても同様な議論がなりたつから, (24)式の条件が成立する.

(46), (48)式より  $y_i'$  等を消去すると  $y_i$  と  $y_i''$  等との関係がつぎのように得られる.

$$y_i - a_i - \lambda_i \delta^2 y_i'' \quad (50)$$

ここで,  $\delta^2 f_i$  の形は,  $(f_{i+1} - f_i)/l_{i+1} - (f_i - f_{i-1})/l_i$  を表わしており,  $\lambda_i$  は曲げ剛性とばね定数との比

$\lambda_i = EI/k_i$  を表わす. (46), (48), (50)式から  $y_i$  等を消去すると,  $y_i''$  だけの方程式が得られる.

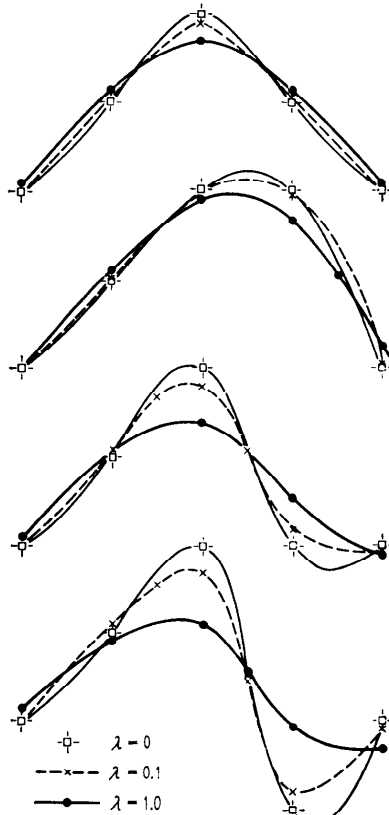
$$l_i y_{i-1}'' + 2y_i''(l_i + l_{i+1}) + l_{i+1} y_{i+1}'' + (6/l_{i+1})(\lambda_{i+1} \delta^2 y_{i+1}'' - \lambda_i \delta^2 y_i'') - (6/l_i)(\lambda_i \delta^2 y_i'' - \lambda_{i-1} \delta^2 y_{i-1}'') = 6\delta^2 a_i \quad (51)$$

(51)式は  $y_i''$  についての5項連立方程式である. それを直接に解いても, あるいは  $\lambda_i$  の小さいことを利用して, 初め0とおいて,  $y_i''$  についての3項方程式を解いて, 逐次近似的に  $y_i''$  等を求めることもできる.  $y_i''$  等が求まれば(50)式によって  $y_i$  が定まる.  $y_i$  や  $y_i''$  が定まると, (9), (11), (45), (46)式より,  $y$  の形状は次式で与えられる.

$$y_{i,i+1} = y_i + (y_{i+1} - y_i)u - (2y_i'' + y_{i+1}'')(l_{i+1}^2/6)p_1(u) + (y_i'' + 2y_{i+1}'')(l_{i+1}^2/6)q_1(u) \quad (52)$$

$$l_{i+1} = x_{i+1} - x_i, \quad u = (x - x_i)/l_{i+1}$$

この方法で計算した平滑化の実例を第7図に示す. 与えられた5点のデータをもとに,  $\lambda=0, \lambda=0.1, \lambda$



第7図 平滑化あてはめ例



=1:0 としたときの平滑化曲線を示し、かつ形状に対する  $\lambda$  の影響をみることができる。 $\lambda=0$  は、いわゆる Spline 曲線に一致する。これでは、まだ変曲点が多く、フェャな曲線になっているとはいえない。 $\lambda$  を 0.1 とすれば、すでにかなり改善されている。

以上は平面内の曲線の平滑化であったが、空間曲線として、 $y(x)$ ,  $z(x)$  が与えられているとき、 $x-y$  面内と  $x-z$  面内とも変形が大きいならば、それぞれの投影面において、平滑化したもので、空間曲線の平滑化が行なわれたとしてよい。その理由は、変形が大きいならば、曲げエネルギーは  $x-y$  面内と  $x-z$  面内の曲げエネルギー之和と考えてよく、棒につけたばねのエネルギーも、それぞれの面内の変位によるエネルギーの和としてよいからである。

測定点が格子状に空間にひろがっている場合、いままでの考え方を拡張して、弾性線が網目を作って、その空間を覆うものとして、なめらかな面の特性値を計算できるようにする。これはつぎの節に述べるように、連続した弾性板をなめらかな曲面のあてはめに用いると、かえって拘束が多すぎ変形が制限されるだけでなく、計算が非常に複雑になる。そのため弾性網モデルを用いて、曲面の平滑化を行なうのが有効であると考えられる。網の節点では縦線と横線は、相互に垂直方向の変位に拘束を与えているだけと仮定すると、1本の弾性線の場合の(50)、(51)式に対応する式は、つぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{i,j} &= a_{i,j} - \lambda_{i,j}(\delta_i^2 \zeta_{i,j}^{(0,2)} + \delta_j^2 \zeta_{i,j}^{(2,0)}) \quad (53) \\ l_i \zeta_{i-1,j}^{(2,0)} + 2\zeta_{i,j}^{(2,0)}(l_i + l_{i+1}) + l_{i+1} \zeta_{i+1,j}^{(2,0)} \\ &+ (6/l_{i+1})(\lambda_{i+1,j} \cdot \delta_i^2 Z_{i+1,j}'' - \lambda_{i,j} \cdot \delta_i^2 Z_{i,j}'') \\ &- (6/l_i)(\lambda_{i,j} \cdot \delta_i^2 Z_{i,j}'' - \lambda_{i-1,j} \cdot \delta_i^2 Z_{i-1,j}'') \\ &= 6\delta_i^2 a_{i,j} \\ m_j \zeta_{i,j-1}^{(0,2)} + 2\zeta_{i,j}^{(0,2)}(m_j + m_{j+1}) \\ &+ m_{j+1} \zeta_{i,j+1}^{(0,2)} + (6/m_{j+1})(\lambda_{i,j+1} \cdot \delta_j^2 Z_{i,j+1}'' \\ &- \lambda_{i,j} \cdot \delta_j^2 Z_{i,j}'') - (6/m_j)(\lambda_{i,j} \cdot \delta_j^2 Z_{i,j}'' \\ &- \lambda_{i,j-1} \cdot \delta_j^2 Z_{i,j-1}'') = 6\delta_j^2 a_{i,j} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

この式で  $\zeta_{i,j}$  は節点  $(i, j)$  における変位、 $a_{i,j}$  は測定値、 $\zeta_{i,j}^{(2,0)}$ ,  $\zeta_{i,j}^{(0,2)}$  は  $x$  方向と  $y$  方向の2階偏微分値、また、その両者の和を  $Z_{i,j}$  とかく。 $l_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $m_j = y_j - y_{j-1}$ ,  $\lambda_{i,j} = EI/k_{i,j}$ ,  $k_{i,j}$  は節点  $(i, j)$  につくばねのばね定数、 $\delta_i^2 f_i$  と  $\delta_j^2 f_j$  は添字  $i$  または  $j$  について階差で  $(f_{i+1} - f_i)/l_{i+1} - (f_i - f_{i-1})/l_i$  あるいは  $(f_{j+1} - f_j)/m_{j+1} - (f_j - f_{j-1})/m_j$  の形である。

(54)式は  $\zeta_{i,j}^{(2,0)}$ ,  $\zeta_{i,j}^{(0,2)}$  についての連立方程式

であり、これを解いてその結果を(53)式に入れて  $\zeta_{i,j}$  は求められる。節点間の線の形状は(52)式と同じ形式になり、両端の節点における  $\zeta_{i,j}$  と  $\zeta_{i,j}^{(2,0)}$ 、あるいは  $\zeta_{i,j}^{(0,2)}$  で定めることができる。

### 7. 曲面のあてはめと平滑化

曲線のなめらかなあてはめのための弾性モデルを拡張して曲面の平滑化に適用する。弾性板の変形によるエネルギーは、変位を  $\zeta(x, y)$ 、板の曲げ剛性を  $D$ 、ポアソン比を  $\nu$  とすると、微小変形の範囲では次式となる。

$$U_1 = \frac{1}{2} D \iint \{ (\zeta^{(2,0)} + \zeta^{(0,2)})^2 - 2(1-\nu)(\zeta^{(2,0)} \cdot \zeta^{(0,2)} + \zeta^{(1,1)^2}) \} dx dy \quad (55)$$

上の式は弾性線の場合に比べて、はるかに変位は少ない場合にしかあてはまらないし、ポアソン比が0でないため縦と横の曲げは干渉する。形状を論ずるのにこれは余分な拘束であるから  $\nu=0$  とすると

$$U_1 = \frac{1}{2} D \iint \{ \zeta^{(2,0)^2} + \zeta^{(0,2)^2} + 2\zeta^{(1,1)^2} \} dx dy \quad (56)$$

となり、さらに、たわみの少ない細かい弾性網とすれば振りに関係する  $\zeta^{(1,1)}$  は考える必要がなくなり

$$U_1 = \frac{1}{2} D \iint \{ \zeta^{(2,0)^2} + \zeta^{(0,2)^2} \} dx dy \quad (57)$$

また、単に各部の平均曲率の2乗の積分を評価関数にとれば

$$U_1 = \frac{1}{2} D \iint \{ \zeta^{(2,0)} + \zeta^{(0,2)} \}^2 dx dy \quad (58)$$

で  $D$  は単に比例定数と考える。 $p_i$  点における測定点を  $a_i$ 、その求める変位を  $\zeta_i$  とすると、ばねに貯えられるエネルギー  $U_2$  は

$$U_2 = \sum_i \frac{1}{2} k_i (\zeta_i - a_i)^2 \quad (59)$$

であるから全エネルギーは  $U = U_1 + U_2$  で、さらにこれに必要な拘束条件を付加したものが評価関数で、それが最小値をとるように  $\zeta(x, y)$  を定めることになる。以下に二、三の方法を述べる。

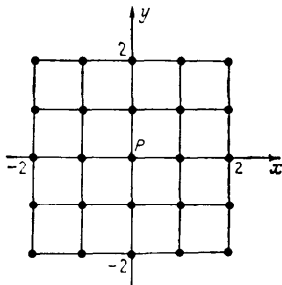
#### (i) 測定点が格子状になっているとき

各格子内の変位を(38)式の形式で表わし、これを評価関数に代入し、各格子点における未定数  $\zeta^{(i,j)}$  等で微分し0とおけば、 $m=1$  の場合でも(48)、(49)式に対応して36項連立方程式が得られる。もし、境界線が格子の線に一致しないときには、積分は境界線までとなり、境界線上の離散点  $(x_k, y_k, z_k)$  に対し、 $\sum \mu_k \{ \zeta(x_k, y_k) - z_k \}$  の項を評価関数に付加し、未知

パラメタ  $\mu_k$  が増加しただけ方程式  $\zeta(x_k, y_k) = z_k$  が増加する。このやり方は正攻法であるが、計算量は多い。

(ii) 境界の条件を満たすことが強調される時

設計において、単に面が境界線を含むだけでなく、そこでの傾斜や曲率が予め規定されるならば、曲面式は(31)式を用い、エネルギー計算のための  $\zeta^{(2,0)}, \zeta^{(0,2)}, \zeta^{(1,1)}$  は(34), (37), (38)式を用いる。評価関数を変化させるパラメタは、境界線上における傾斜や曲率、あるいは中間における変位である。この場合1つの式で表わすことのできる面の範囲はかなり大きくとれるので、解くべき連立方程式のオーダーは、(i)よりもかなり減少させることができるであろう。また、厳密な意味での弾性体モデルを採用するの でなければ、曲面の式には(31)式を用い測定点に対しては最小2乗の関係のあてはめ、あるいはそれに面のエネルギー積分を追加した評価条件で未知パラメタを決定する方法も考えられ、計算は幾分楽になる。



第8図 P点の特性値計算のための測定点のとり方

(iii) 近似法 1

作り上げようとする曲面上の一点の特性値  $\zeta^{(i,j)}$  はその点の周囲の多くの点の測定値から定めることができると考え、例として第8図のような  $5 \times 5$  の格子点での測定値  $a_{ij}$  が与えられたとき、それを覆う曲面を

$$\zeta(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 c_{ij} \psi_i(x) \cdot \psi_j(y) \quad (60)$$

で表わされるとする。  $\psi_i(t)$  は等間隔に与えられた5点の  $t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, t_2$  に対して、つぎのような直交関係をもたす。

$$\sum_{k=-2}^2 \psi_i(t_k) \cdot \psi_j(t_k) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

これは  $\psi_0=1, \psi_1=\frac{1}{2}t, \psi_2=\frac{1}{2}(t^2-1), \psi_3=\frac{1}{6}(5t^3-17t)$  である。(60)式を評価式に入れ未定数  $c_{ij}$  で

微分して0とおくと、直交の条件のためばねの項より生ずる未知数は  $c_{ij}$  だけになり、弾性板の項も  $\psi_i$  の対称、反対称性によって非常に単純化し、  $c_{ij}$  を定める連立方程式は、普通は3元以下に分離し、一番複雑な評価式をとっても、4元の連立方程式は1個現われてくるだけである。これより  $c_{ij}$  は容易に求まり、(60)式より  $x=y=0$  における  $\zeta^{(i,j)}$  も  $c_{i,j}$  の和や差で定められる。このようにして各点の  $\zeta^{(i,j)}$  はまわりの25点の測定値より定め、これを面の式(30)に入れて全体の曲面を定めることができる。 $5 \times 5$  の格子点は  $4 \times 4$ 、あるいはそれ以下にすることも可能で  $\psi_i(t)$  は3次より下げられる。

(iv) 近似法 2

弾性面モデルはかなりきつい拘束を与えているように考察および数値実験例から観察されるので、(53), (54)式で与えた弾性網モデルの式より、連立方程式を解いて  $\zeta^{(i,0)}, \zeta^{(0,j)}$  を各格子点で求める。各格子点での  $\zeta^{(i,0)}$  の値をなめらかに結ぶ曲線は、spline曲線になるとして、(51), (52)式において  $\lambda=0$  とし、  $y$  を  $\zeta^{(i,0)}$  とした式より求められ、端における  $y'$  の値がこの  $\zeta^{(i,1)}$  に対応する。このようにして定めた  $\zeta^{(i,j)}$  を曲面式に採用する方法である。もっと簡略化するやり方は、曲面の縦方向の何箇所かの母線を(50), (51)式の弾性線で平滑化し、それで得られた各平滑線の特値を横方向に平滑化して修正を行なう。これをくり返して収束した特値を面の式に利用する。

以上、いくつかの方法を述べたが、どの方法がよいかということは、専門家による面の作製と比較して決定する以外判定できない。なぜならば、この作業は従来、非常に熟練と芸術的センスに依存していた作業であり、その過程や方法は企業外には公表されにくいものであるからである。これとは別に筆者のわずかな実験では、全般を通じての考え方はかなり有効な結果を与えるように思われる。

む す び

人の意図した形状を計算機を利用して、正確に定めるための基礎となる形状の数学的モデルを作った。これは人の意図する空間曲線や曲面を表現し合成する方法、拘束に適合する曲面を作ったり、測定値を平滑化する方法を与えるものである。また、これらは計算機や図形の入出力機器が取り扱いやすいように考慮されこの分野での諸要求にかなり満足のできる結果を与えるものであろう。しかし、その評価は、実際の仕事に

適用した結果によって判定されなければならない性質のものである。それについての情報が得られるならば著者の考察不足の箇所も明確になり、さらに、改良が行なわれるであろう。この仕事を Computer Aided Design や Interactive Graphics のシステムとして論ずるには、さらに人と計算機との間の通信の方法、内部のデータの構造やその管理の方法等を付加しなければならないが、これらはシステムによっても異なるし、別のところで論ずる機会があろう。また、この論文で展開した理論は、形状設計に利用できるだけでなく、1 価、2 価関数のなめらかなあてはめ、種々の境界条件を満たす 2 価関数の作製に利用できるので方程式の解法にも用いることができるであろう。

最後に、著者が単純な動機で始めた初期の仕事に関心をいだかれ、実際面からの議論、あるいは知識を与えていただいた多くの方々に深く感謝する。

また、ハードウェアに援助を与えられた方々や、機械の製作保守を行なう著者の研究室の吉田良正技官や大学院学生諸氏、また、曲線のディスプレイプログラムを作った大学院学生松下武史氏に厚く感謝する。

#### 参考文献

- 1) 穂坂：自由形状曲面の理論と設計，情報処理，Vol. 8, No. 2, pp. 65~72, 1967. 3; 穂坂，遠藤：図形の発生，処理，記憶，情報処理，Vol. 6, No. 3, pp. 129~139, 1965. 5; 穂坂：任意曲線と曲面の記憶と処理，情報処理学会第 6 回大会予稿，1965. 12.
- 2) Coons, S: Surfaces for Computer Aided Design of Space Forms, Project. MAC. TR-41, 1967. 6, Gellert, G. O.; Geometric Computing, Machine Design, 37, pp. 94~100, 1965. 4; 研野：APT 言語による曲面の創成，機械学会誌，Vol. 70, No. 577, pp. 169~175, 1967. 2.
- 3) 自由形状曲面シンポジウム：精機学会，昭和 42 年 4 月，精密機械，Vol. 34, No. 1, 自由曲面特集号.
- 4) Greville, T. N. E: Spline function, interpolation, and numerical quadrature. Ralstone, Wilf, ed. Mathematical Methods for Digital Computers, Vol. II, pp. 156~168, John Wiley, 1967.
- 5) 穂坂：計算機援助による設計方式，機械学会誌，Vol. 71, No. 590, p. 409, 1968. 3.  
穂坂：自由形状曲面理論補遺，情報処理学会第 8 回大会予稿，p. 47, 1967. 12.
- 6) 穂坂，越川：On line Computing—Fairing と Elastica, 情報処理学会第 8 回大会予稿，p. 49, 1967. 12.

(昭和 44 年 2 月 4 日受付)

訂 正

Vol. 10 No. 3 掲載の穂坂 衛氏の論文「曲線, 曲面および平滑化理論」は下記のとおり誤りがありますので訂正いたします.

	誤	正
p. 121 註	Filing	Fitting
p. 123 (18) 式	$k_{i+1}$	$k_i$
p. 125 (29) 式	$S_0(n, v)$	$S_0(u, v)$
p. 126 (37), (39), (40) 式	$\sum_{i=0}^m$	$\sum_{j=0}^m$
p. 128 (47) 式	$\frac{\partial u}{\partial y_i}, \frac{\partial u}{\partial y_i'}$	$\frac{\partial V}{\partial y_i}, \frac{\partial V}{\partial y_i'}$
p. 128 左下より 1 行目	$f_1$	$f_i$
p. 128 (51) 式	$y_{i+1}$	$y_{i+1}$