# プログラムのページ

担当 吉澤 正

## 6907. 有理式の最良近似式を求めるプログラム

山下眞一郎（富士通株式会社）

ここに述べるプログラムは，重率を考慮した多項式を含む，有理式による最良近似式を求めるもので，相対誤差，または絶対誤差を最小にする多項式，または有理式の近似式を求めることができる．

**計算法**を説明するのに必要な諸定義を，つぎのようにおく．

被近似関数 $F(X)$ (1)

近似区間 $A \leqq X \leqq B$ (2)

近似式 $P_L(X)/Q_M(X)$

$$= \sum_{i=0}^{L} p_i X^i \Big/ \left(1.0 + \sum_{j=1}^{M} q_j X^j\right) \tag{3}$$

重率関数 $W(X)$,

$W(A \leqq X \leqq B) \neq 0$ (4)

誤差関数 $E(X) = W(X)\{F(X) - P_L(X)/Q_M(X)\}$ (5)

近似式の次数 $N = L + M$ (6)

よく知られているように，近似式が最良近似式であるためには，つぎの最良近似の条件が成立しなければならない．

(1) $E(X)$ の相隣る極大値の符号が異なること．

(2) $|E(X)|$ の極大値は，区間内で少なくとも $(N+2)$ 個あること．

(3) $|E(X)|$ の極大値がすべて等しいこと．

実用的な範囲で近似区間の両端は極大点になり，区間内には$N$個の極大点がある．このような関数であることが，このプログラムが正しく動作するための第1条件である．以下のカッコ内の条件番号は，この意味である．

近似区間を $-1 \leqq t \leqq +1$ に変換して考え，$E(X)$ が $N+1$ 次のチェビシェフ多項式 $T_{N+1}(t)$ に定数 $C_{N+1}$ を乗じたものとすれば，最良近似の条件を満たすので，$E(X)$ が $C_{N+1}T_{N+1}(t)$ に類似していると仮定する（第2条件） これにより，$E(X)$ の 0 点と極大点は $T_{N+1}(t)$ のそれとあまり変わらないと仮定できる（第3条件）．したがって

$E(X)$ の 0 点の近似値：

$$X_i = \left(\frac{B-A}{2}\right)\cos\left(\frac{2i+1}{N+1}\frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{B+A}{2}\right) \tag{7}$$

$E(X)$ の極大点の近似値：

$$X_j = \left(\frac{B-A}{2}\right)\cos\left(\frac{2j}{N+1}\frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{B+A}{2}\right) \tag{8}$$

最良近似式は以下に述べるように，近似式を逐次補正して求める．何回目かの近似式を $P_L(X)/Q_M(X)$ とし，最良近似式を $P_L^*(X)/Q_M^*(X)$ とする．この誤差関数をそれぞれつぎのように表わす．

$$\left.\begin{aligned} E(X) &= W(X)\{F(X) - P_L(X)/Q_M(X)\} \\ E^*(X) &= W(X)\{F(X) - P_L^*(X)/Q_M^*(X)\} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$P_L(X)$ を $\Delta P_L(X), Q_M(X)$ を $\Delta Q_M(X)$ 補正すれば，$P_L^*(X)$, $Q_M^*(X)$ が得られるとする．すなわち

$$\left.\begin{aligned} P_L^*(X) &= P_L(X) + \Delta P_L(X) \\ Q_M^*(X) &= Q_M(X) + \Delta Q_M(X) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$E(X)$ の極大点を $X_j$ とし，$E(X)$ の極大点と $E^*(X)$ の極大点があまり変わらないと仮定する（第4条件）．これから，次式を仮定する（第5条件）．

$$E^*(X_j) = (-1)^j \rho;\ \rho = \text{定数},\quad j = 0, 1, 2, \cdots N, N+1 \tag{11}$$

このとき

$$\begin{aligned} E(X_j) - E^*(X_j) &= W(X_j)\{F(X_j) - P_L(X_j)/Q_M(X_j)\} \\ &\quad - W(X_j)\{F(X_j) - P_L^*(X_j)/Q_M^*(X_j)\} \\ &= W(X_j)\{P_L^*(X_j)/Q_M^*(X_j) - P_L(X_j)/Q_M(X_j)\} \\ &= W(X_j)\frac{\Delta P_L(X_j)\,Q_M(X_j) - \Delta Q_M(X_j)\,P_L(X_j)}{Q_M(X_j)\{Q_M(X_j) + \Delta Q_M(X_j)\}} \\ &= E(X_j) - (-1)^j \rho \end{aligned} \tag{12}$$

$Q_M(X_j)$ に比べて $\Delta Q_M(X_j)$ が十分小さいと仮定する（第6条件）．これにより，(12)式の分母の $\Delta Q_M(X_j)$ が無視できるので，$\Delta P_L, \Delta Q_M(X)$ および $\rho$ に

関して，$(N+2)$ 元連立一次方程式となる．

$$\Delta P_L(X)=\sum_{i=0}^{L}\Delta p_i X^i,\ \Delta Q_M(X)=\sum_{i=1}^{M}\Delta q_i X^i$$

とおき，(12)式の $j$ の相隣る式を加え，$\rho$ を消去すると，つぎの $(N+1)$ 元連立一次方程式を得る．

$$\sum_{k=0}^{L}\left\{\frac{W(X_j)X_j^k}{Q_M(X_j)}+\frac{W(X_{j+1})X_{j+1}^k}{Q_M(X_{j+1})}\right\}\Delta p_k$$
$$+\sum_{k=0}^{M}\left\{-\frac{W(X_j)X_j^k P_L(X_j)}{Q_M{}^2(X_j)}-\frac{W(X_{j+1})X_{j+1}^k P_L(X_{j+1})}{Q_M{}^2(X_{j+1})}\right\}\Delta q_k$$
$$=E(X_j)+E(X_{j+1}),\quad j=0,1,\cdots,N \tag{13}$$

この方程式を解き，$\Delta P_L(X)$，$\Delta Q_M(X)$ を得て，$P_L(X)$, $Q_M(X)$ を(10)式で補正する．逐次近似を行なうための初期解は，(7)式の点で $F(X)$ と $P_L(X)/Q_M(X)$ が一致するような $P_L(X)$, $Q_M(X)$ を用いる．

$$\left.\begin{array}{l} F(X_i)-P_L(X_i)/Q_M(X_i)=0 \\ \therefore\ P_L(X_i)-F(X_i)\{Q_M(X_i)-1.0\}=F(X_i) \\ \therefore\ \sum_{k=0}^{L}(X_i{}^k)p_k+\sum_{k=1}^{M}(-F(X_i)X_i{}^k)q_k=F(X_i) \end{array}\right\} \tag{14}$$

(14)式は(13)式と同様に $(N+1)$ 元連立一次方程式であるので，0回目の近似式はすべて0と考え，(14)式を解くことが1回目の補正と考えるとつごうがよい．この方程式は，いわゆるタチの悪い方程式であるが，右辺の精度以上の精度で解けなければならない(第7条件)．

**計算手順**について以下に述べる．$L$, $M$ に特別な制限がないので，$L\geqq 0$，$M\geqq 0$ に対して計算できることを意味している．プログラムは $L+M\geqq 1$ に対して計算できるようにした．計算の手順はつぎのとおりである．

(A) $P_L(X)$, $Q_M(X)$ の初期値を0としておく．また，(8)式に従って，$E(X)$ の極大点の近似値を計算しておく．

(B) (14)式に従う $(N+1)$ 元連立一次方程式を，(7)式を計算しながら立てる．

(C) $(N+1)$ 元連立一次方程式を掃き出し法で解く．

(D) $P_L(X)$, $Q_M(X)$ を補正する．

(E) 新しい極大点を求める．両端は極大点として特別に扱う．中間の$N$個は山登り法によって求める．あまり精度を要さないが，これが成功する必要がある(第8条件)．

(F) 極大値を求め，絶対値の最大と最小を求める．その差と最大との比が小さければ，最良近似式が求められたと判断し，(H)より計算する．

(G) (13)式に従う $(N+1)$ 元連立一次方程式を立てて，(C)より繰り返す．

(H) つぎのものを印刷する．近似式，誤差の極大点と極大値．最後に近似区間を等分して，101点の誤差を求め，最大誤差を50に正規化して，誤差グラフを描く．

**プログラム**は FACOM 230-60 FORTRAN で作った．他の計算機では，後述の点に関して，手なおしが必要であろう．とくに，実数型定数，変数，関数が倍精度型であることに注意されたい．演算桁数は精度の高い近似式や高次の近似式を作るとき，十分大きくなければならない．そうでないと，第7, 8条件が満たされずに，ループするかもしれない．それゆえ，演算桁数が可変長である FACOM 230-20/30 MCP Ⅲ FORTRAN などで計算するとよい．主プログラムでは，近似式の次数，関数，重率，誤差，収束判定定数を定義している．計算はMARIで行なう．手順(A)～(H)はそれを実行する前のところに注釈行として入れた．POL は多項式の値を求め，PQ は有理式の値を求める．YAMA は極大点を求め，CURVE はグラフを描く．主プログラムおよびその結果は，平方根の近似式の相対誤差を最小にするものである．絶対精度を最小にするためには，重率関数を $W(X)=1.0$ とすればよい．数紙の関係で結果は一部を示した．なお，有理式近似では，分子または分母の最高次数の係数を 1.0 とすれば，乗算回数が1回少なくてすむ．

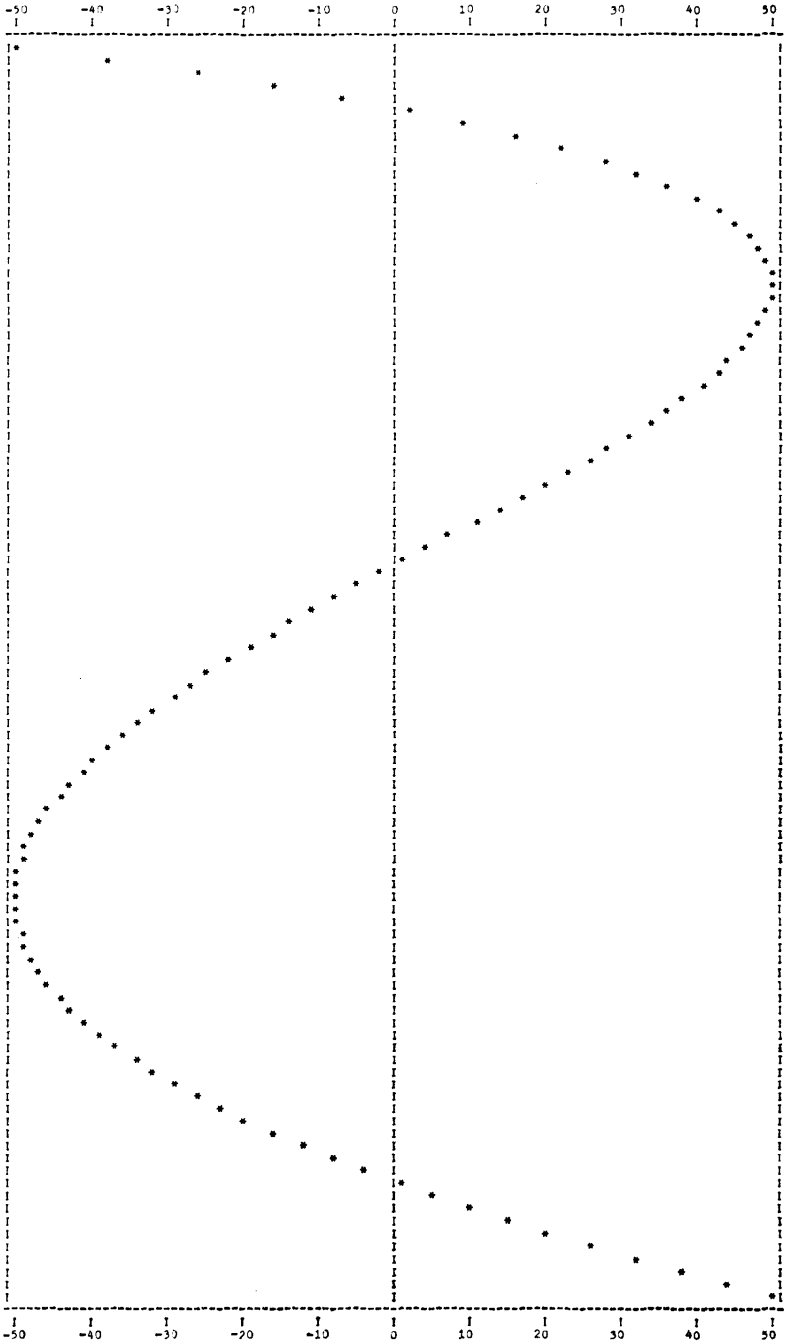
このプログラムを他の計算機用に記述するためには，つぎの点に注意して書き換えが必要である．

1. 添字式が式になっている．
2. DO のパラメータが式になっている．
3. 書式の文字表現が "文字列" となっている．
4. 書式の中のカンマ "," が省略されている．
5. 実引数に文関数，文番号が使われている．
6. 多重代入文が使われている．
7. 混合演算が使われている．
8. 印刷の1行が136文字である(グラフのところだけ，100字を越えている)．
9. 数値は最大約 $10^{+77}$ まで表現できる．
10. 倍精度実数は約 18 桁の精度がある．

このように，書き換えの必要な文には，文の内部番号に丸印をつけておいた．

第 1 表 第3表の結果の誤差のグラフ

| X | E |
|---|---|
| 0.50000 | -0.323E-03 |
| 0.50500 | -0.243E-03 |
| 0.51000 | -0.170E-03 |
| 0.51500 | -0.103E-03 |
| 0.52000 | -0.427E-04 |
| 0.52500 | 0.120E-04 |
| 0.53000 | 0.613E-04 |
| 0.53500 | 0.105E-03 |
| 0.54000 | 0.144E-03 |
| 0.54500 | 0.179E-03 |
| 0.55000 | 0.209E-03 |
| 0.55500 | 0.235E-03 |
| 0.56000 | 0.257E-03 |
| 0.56500 | 0.276E-03 |
| 0.57000 | 0.291E-03 |
| 0.57500 | 0.303E-03 |
| 0.58000 | 0.312E-03 |
| 0.58500 | 0.318E-03 |
| 0.59000 | 0.322E-03 |
| 0.59500 | 0.323E-03 |
| 0.60000 | 0.322E-03 |
| 0.60500 | 0.318E-03 |
| 0.61000 | 0.313E-03 |
| 0.61500 | 0.306E-03 |
| 0.62000 | 0.297E-03 |
| 0.62500 | 0.287E-03 |
| 0.63000 | 0.275E-03 |
| 0.63500 | 0.262E-03 |
| 0.64000 | 0.248E-03 |
| 0.64500 | 0.233E-03 |
| 0.65000 | 0.217E-03 |
| 0.65500 | 0.200E-03 |
| 0.66000 | 0.183E-03 |
| 0.66500 | 0.165E-03 |
| 0.67000 | 0.146E-03 |
| 0.67500 | 0.127E-03 |
| 0.68000 | 0.108E-03 |
| 0.68500 | 0.880E-04 |
| 0.69000 | 0.682E-04 |
| 0.69500 | 0.483E-04 |
| 0.70000 | 0.283E-04 |
| 0.70500 | 0.840E-05 |
| 0.71000 | -0.114E-04 |
| 0.71500 | -0.310E-04 |
| 0.72000 | -0.504E-04 |
| 0.72500 | -0.695E-04 |
| 0.73000 | -0.882E-04 |
| 0.73500 | -0.107E-03 |
| 0.74000 | -0.124E-03 |
| 0.74500 | -0.142E-03 |
| 0.75000 | -0.159E-03 |
| 0.75500 | -0.175E-03 |
| 0.76000 | -0.190E-03 |
| 0.76500 | -0.205E-03 |
| 0.77000 | -0.219E-03 |
| 0.77500 | -0.233E-03 |
| 0.78000 | -0.245E-03 |
| 0.78500 | -0.257E-03 |
| 0.79000 | -0.268E-03 |
| 0.79500 | -0.278E-03 |
| 0.80000 | -0.287E-03 |
| 0.80500 | -0.295E-03 |
| 0.81000 | -0.302E-03 |
| 0.81500 | -0.308E-03 |
| 0.82000 | -0.313E-03 |
| 0.82500 | -0.317E-03 |
| 0.83000 | -0.320E-03 |
| 0.83500 | -0.322E-03 |
| 0.84000 | -0.323E-03 |
| 0.84500 | -0.322E-03 |
| 0.85000 | -0.321E-03 |
| 0.85500 | -0.318E-03 |
| 0.86000 | -0.314E-03 |
| 0.86500 | -0.309E-03 |
| 0.87000 | -0.303E-03 |
| 0.87500 | -0.295E-03 |
| 0.88000 | -0.286E-03 |
| 0.88500 | -0.276E-03 |
| 0.89000 | -0.265E-03 |
| 0.89500 | -0.252E-03 |
| 0.90000 | -0.238E-03 |
| 0.90500 | -0.223E-03 |
| 0.91000 | -0.206E-03 |
| 0.91500 | -0.188E-03 |
| 0.92000 | -0.169E-03 |
| 0.92500 | -0.148E-03 |
| 0.93000 | -0.126E-03 |
| 0.93500 | -0.103E-03 |
| 0.94000 | -0.786E-04 |
| 0.94500 | -0.527E-04 |
| 0.95000 | -0.254E-04 |
| 0.95500 | 0.325E-05 |
| 0.96000 | 0.333E-04 |
| 0.96500 | 0.647E-04 |
| 0.97000 | 0.974E-04 |
| 0.97500 | 0.132E-03 |
| 0.98000 | 0.167E-03 |
| 0.98500 | 0.204E-03 |
| 0.99000 | 0.242E-03 |
| 0.99500 | 0.282E-03 |
| 1.00000 | 0.323E-03 |
| X | E |




MAX ERROR= 0.32281E-03

新しい関数について，近似式を求めるときは，主プログラムだけ作り変えればよい．そして，つぎのものを用意する．

1. 被近似関数 $F(X)$
2. 重率関数 $W(X)$
3. 誤差関数 $E(X)$
4. 近似区間の両端 $A,\ B;\ A<B$
5. 近似式の次数 $L,\ M,\ N;\ N=L+M$
6. 収束判定用定数 $EPS\,1,\ EPS\,2$

第 2 表 FACOM 230-60 による最良近似式を求めるプログラム

```
      OPTION  LIST,MAP,DOUBLE
      COMMON  L,M,N,P(40),Q(40),Z(40,41)
      COMMON/PARAM/A,B,EPS1,EPS2
C FUNCTION
      F(X)=SQRT(X)
C WEIGHT FUNCTION
      W(X)=1.0/SQRT(X)
C ERROR FUNCTION
      E(X)=W(X)*(F(X)-PQ(X))
C
      A=0.5
      B=1.0
      EPS1=EPS2=1.0E-4
      DO 10 N=1,6
      DO 10 L=0,N
      M=N-L
   10 CALL  MARI(F,E,W,*300)
  300 FORMAT(1H1///10X,'SQRT(X)'//)
      STOP
      END
```

```
      SUBROUTINE  MARI(F,E,W,FMT)
      COMMON  L,M,N,P(40),Q(40),Z(40,41)
      COMMON/PARAM/A,B,EPS1,EPS2
      DIMENSION FMT(1),X(101),EX(101)
      A1= 0.5*(B-A)
      A2= 0.5*(B+A)
      PN=1.5707963/FLOAT(N+1)
C (A)
      DO 7 I=1,L+1
    7 P(I)=0.0
      DO 8 I=1,M+1
    8 Q(I)=0.0
      Q(1)=1.0
      X(1)= B
      DO 10 I=1,N
   10 X(I+1) = A1*COS(FLOAT(2*I)*PN) + A2
      X(N+2)= A
C (B)
      DO 20 I=1,N+1
      U = A1*COS(FLOAT(2*I-1)*PN) + A2
      FU= F(U)
      Z(I,1)= 1.0
      IF(L.EQ.0) GO TO 21
      DO 22 J=1,L
   22 Z(I,J+1)=Z(I,J)*U
   21 IF(M.EQ.0) GO TO 23
      Z(I,L+2)= -FU*U
      IF(M.EQ.1) GO TO 23
      DO 24 J=2,M
   24 Z(I,L+J+1)= Z(I,L+J)*U
   23 Z(I,N+2)=FU
   20 CONTINUE
C (C)
   99 DO 31 K=1,N+1
      DO 32 I=K+1,N+2
   32 Z(K,I)= Z(K,I)/Z(K,K)
      DO 33 I=1,N+1
      IF(K-I) 34,33,34
   34 DO 36 J=K+1,N+2
   36 Z(I,J)= Z(I,J) -Z(I,K)*Z(K,J)
   33 CONTINUE
   31 CONTINUE
C (D)
      IF(M.LE.0) GO TO 41
      DO 42 I=1,M
   42 Q(I+1) = Z(L+I+1,N+2) + Q(I+1)
   41 DO 40 I=1,L+1
   40 P(I) = Z(I,N+2) + P(I)
C (E)
      DO 43 I=1,N
      XA=0.5*(X(I+2)+X(I+1))
      XB=0.5*(X(I+1)+X(I))
   43 CALL YAMA(E,EPS1,X(I+1),XA,XB)
C (F)
      EMAX=0.0
      EMIN=1.0E+70
      DO 51 I=1,N+2
      EE=EX(I)=E(X(I))
      IF(ABS(EE).GT.EMAX)FMAX=ABS(EE)
   51 IF(ABS(EE).LT.EMIN)FMIN=ABS(EE)
      IF(EMAX-EMIN.LT.EPS2*EMAX)GO TO 90
C (G)
      U = X(1)
      FP=POL(P,L,U)
      FQ=POL(Q,M,U)
      WU=W(U)
      Z(1,1)=WU/FQ
      IF(L.EQ.0) GO TO 81
      DO 82 J=1,L
   82 Z(1,J+1) = Z(1,J)*U
   81 IF(M.EQ.0) GO TO 83
      Z(1,L+2)=-WU*FP*U/(FQ*FQ)
      IF(M.EQ.1) GO TO 83
      DO 84 J= 2,M
   84 Z(1,L+J+1)= Z(1,L+J)*U
   83 Z(1,N+2)=E(U)
      DO 85 I=1,N+1
      U = X(I+1)
      FP=POL(P,L,U)
      FQ=POL(Q,M,U)
      WU=W(U)
      Z(I+1,1)=WU/FQ
      IF(L.EQ.0) GO TO 86
      DO 87 J=1,L
   87 Z(I+1,J+1) = Z(I+1,J)*U
   86 IF(M.EQ.0) GO TO 88
      Z(I+1,L+2)=-WU*FP*U/(FQ*FQ)
      IF(M.EQ.1) GO TO 88
      DO 89 J= 2,M
   89 Z(I+1,L+J+1) = Z(I+1,L+J)*U
   88 Z(I+1,N+2)=E(U)
      DO 95 J= 1,N+2
   95 Z(I,J) = Z(I,J) + Z(I+1,J)
   85 CONTINUE
      GO TO 99
C (H)
   90 WRITE(6,FMT)
      WRITE(6,101)(I,P(I+1),I=0,L)
  101 FORMAT(5X2HP=I5,E30.18/(7XI5,E30.18))
      WRITE(6,102)(I,Q(I+1),I=0,M)
  102 FORMAT(/5X2HQ=I5,E30.18/(7XI5,E30.18))
      WRITE(6,201)(I,X(I),EX(I),I=1,N+2)
  201 FORMAT(/(5X,I5,2E20.8))
      DO 60 I=1,101
      X(I)=A+(B-A)*(I-1)/100.0
   60 EX(I)=E(X(I))
      CALL CURVE(101,X,EX,EMAX)
      RETURN
      END
```

```
      FUNCTION  POL(A,N,X)
      DIMENSION  A(N)
      POL=A(N+1)
      IF(N.EQ.0)RETURN
      DO 10 I=N,1,-1
   10 POL=POL*X+A(I)
      RETURN
      END
```

```
      FUNCTION  PQ(X)
      COMMON  L,M,N,P(40),Q(40),Z(40,41)
      PX = P(L+1)
      IF(L.EQ.0) GO TO 15
      DO 10 I=1,L
   10 PX = PX*X + P(L+1-I)
   15 QX= Q(M+1)
      IF(M.EQ.0) GO TO 25
      DO 20 I=1,M
   20 QX = QX*X + Q(M+1-I)
   25 PQ = PX/QX
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE  CURVE(N,X,E,AMAX)
      DIMENSION IA(103),IB(103),IC(11)
      DIMENSION X(101),E(101)
      DATA IA/103*1H /,IB/103*1H-/
      DATA   IK,II,IS/1H*,1HI,1H  /
      DATA IC/-50,-40,-30,-20,-10,
     C               0,10,20,30,40,50/
      WRITE(6,20)
   20 FORMAT(1H1//)
      WRITE(6,40) IC
   40 FORMAT(22X,5I10,I9,5I10)
      WRITE(6,50) II
   50 FORMAT(30X,10(1HI,9X),A1)
      WRITE(6,70) IB
   70 FORMAT(1H ,5X,1HX,14X,1HE,7X,103A1)
      DO 100 I=1,N
      IV=50.0*E(I)/AMAX+52.5
      IA(1)=IA(52)=IA(103)=II
      IA(IV)=IK
      WRITE(6,200)X(I),E(I),IA
  100 IA(IV)= IS
  200 FORMAT(1H ,F10.5,3X,E13.3,2X,103A1)
      WRITE(6,70) IB
      WRITE(6,50) II
      WRITE(6,40) IC
      WRITE(6,300)AMAX
  300 FORMAT(1H  ,10HMAX ERROR=  ,E15.5)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE  YAMA(F,EPS,X,XA,XB)
      KEY=9
      H=(XB-XA)*0.25
      F0=ABS(F(X))
   99 CONTINUE
      X1=X+H
      IF(X1.GT.XB) X1=XB
      X2=X-H
      IF(X2.LT.XA) X2=XA
      F1=ABS(F(X1))
      F2=ABS(F(X2))
      IF(F2.LE.F0.AND.F0.GE.F1) GO TO 10
      IF(F2-F1) 1,10,2
    1 X=X1
      F0=F1
      IF(KEY.EQ.2) H=0.5*H
      KEY=1
      GO TO 99
    2 X=X2
      F0=F2
      IF(KEY.EQ.1) H=0.5*H
      KEY=2
      GO TO 99
   10 H=0.5*H
      IF(ABS(F0-F1)+ABS(F0-F2)
     C      .GE. EPS*F0) GO TO 99
      RETURN
      END
```

第 3 表 相対誤差の平方根の結果の例

SQRT(X) RANGE $0.5 \leq x \leq 1.0$

| | (次数) | (係数) |
|---|---|---|
| P= | 0 | 0.27820879831529261 8E 00 |
| | 1 | 0.11892076052484073 9E 01 |
| Q= | 0 | 0.10000000000000000 0E 01 |
| | 1 | 0.46789022360616024 0E 00 |

| | (極大点) | (最大誤差) |
|---|---|---|
| 1 | 0.10000000E 01 | 0.32278983E-03 |
| 2 | 0.84072996E 00 | -0.32280973E-03 |
| 3 | 0.59490678E 00 | 0.32279343E-03 |
| 4 | 0.50000000E 00 | -0.32279058E-03 |

本プログラムを完成するにあたって，協力していただいた富士通ソフトウェア技術部第2プログラム課FORTRAN グループの諸氏に謝意を表する．

(昭和 44 年8月 28 日受付)