

3次元 Hidden-Line Problem について*

上内秀隆**

Abstract

It is necessary to get the solution of the three-dimensional "hidden-line" problem for automatic handling of three-dimensional information by computers.

In this paper, we introduce three new concepts; gazability, visibility and plottability. And we investigate their meanings and the relation among them.

Then an algorithm to get hidden-lines point by point is to be described. Then it is shown with several examples that the problem on concrete criterions of gazability and visibility is reduced to solving some simultaneous equations. We will show several concrete criterions which we can compute numerically without so-called "gradient method". And an experimental result on the computing time is given.

1. 序

Computer Graphics の分野は L. G. Roberts¹⁾, I. E. Sutherland²⁾ らの草分けの画期的な仕事になされて以来, 多方面にわたって, めざましい発展がみられ, 種々の入出力装置が開発されて, 計算機工学や情報処理工学の重要な一分野となってきている。

そして, あまりにも急激に, 多方面にわたって爆発的な発展が行なわれたためと, 問題が相互関係を持っていて, きわめて複雑であるという理由から, 本質的な問題の所在を明確にとらえる必要が生じてきた。このようなとき, I. E. Sutherland は Computer Graphics の分野の研究を進めるうえで, 大きな指針となる問題提起を行なった³⁾。

Hidden-Line 問題とは, そのとき, 彼の提出した "Computer Graphics における未解決の 10 の問題" の第 7 番目の問題である。

Hidden-Line 問題に関連のある分野には, つぎのような分野がある。

(i) Computer System によって自動的に曲面設計を行なったあと, 製図として出力しようとする際, 出力図形が, 見て理解しやすいものである必要がある。そのために, 図形の背面の部分を消しておく必要が

ある。出力図形が, 複雑であればあるほど, この問題は, 重要な意味を持つてくる。

(ii) 曲面の自動設計段階と, 直接に切削したり, 組み立てたりする段階とを, 自動化して結合させようとするときにも生じる問題である。たとえば, 現在の APT system では, part programmer が完成した設計図を見ながら, 曲面を定義し, 刃の行動を記述して, APT program を作成する⁴⁾。このような program を人間の手で作成しなければならない理由の一つに, 刃の動き方を別途指示することによって, よけいなところを削らないようにする必要があることがあげられる。この判断が, system 中に組み込まれた例はいまのところない。ところが, 刃の方向を視線であるとみなすと, この判断の本質的な点は, 視線の走査法と Hidden-Line 問題とにあることがわかる。

(iii) 動画を作成するとき, 対象物体の動作または変化を絵画的にとらえる必要がある。このとき hidden-line を消しておくことが要求されることが多い⁵⁾。

(iv) 光学系のシミュレーションにおいても生起する。新しいレンズとか, 屈折率が場所によって変化する透明体を通して見たときの像をシミュレートしたり, 蜃気楼 (mirage, looming) をシミュレートしたりする場合である。視線は一般の空間曲線として考えられる。

現在までにも, Hidden-Line 問題を取り上げた文献が多数提出されている。これらは, ポリゴンに対する visibility の判定を基礎としていたり⁶⁾⁻⁷⁾, 直接変数で

* About the Three-Dimensional "Hidden-Line" Problem, by Hidetaka Kamiuchi (Faculty of Engineering, Kyoto University)

** 京都大学・工学部

表現された2次元面についての判定を取り扱ったものであった⁹⁾。ところが一方では、これらの考察とは独立に、曲面の自動設計の研究が進められ、曲面の生成、接続、任意曲面の多項式近似の研究^{9)~13)}や intersection の表現方法に関する研究¹⁴⁾などが進められてきた。とくに前者は、自動車のスタイル設計、航空機のスタイル設計、機械部品の設計などの分野で、実用化されている。

本論文では、三つの新しい概念 gazability, visibility, plottability を導入して、曲面設計において提出される曲面の形式とは独立に、Hidden-Line問題の定式化を行ない、曲面の表現形式とは独立に、hidden-line を求めるアルゴリズムのあり方を示す。そして、具体的に曲面の表現形式が与えられると、それらは、制限条件のついた非線形連立方程式の解の性質を調べることに帰着されることを述べる。そのあと、収束形数値計算を行なわなくてもよい範囲内で、解決法を示す。とくに、パラメトリック表示の曲面の場合に、重点を置いて論ずる。

2. 若干の定義と性質

便利のため、つぎのような記号を用いる。

P : 視点, S : 視曲面, Σ : 3次元コークリッド空間内の対象点の集合, K : 検定すべき点の集合 (本論中では、一応 Σ と独立に与えられるものとする), \overline{PX} : 点 P と点 X との間の自分自身とは交わらない空間曲線, $|\overline{PX}|$: \overline{PX} に沿っての点 P と点 X との間の距離, \overline{PX}^* : 点 P を端点とし, X を通る自分自身に交わらない半曲線, $^* \overline{PX}$: 点 P を端点とし, その延長が点 X を通る自分自身には交わらない半曲線^{注1)}, \emptyset : 空集合。

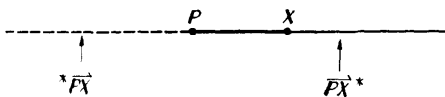
障害集合の定義

3次元空間内に物体が存在しているとき、それは、点の集合としてとらえることができる。 Σ の部分集合は、このような物体を表現するものである。たとえば、いま、物体 A, B, C があるとする。このとき、 Σ は、つぎのように表現される。

$$\Sigma = \{x | x \in A \text{ or } x \in B \text{ or } x \in C\}$$

視線 \overline{PX} は、 P と X とを結ぶ空間曲線である。こ

注1) $^* \overline{PX}, \overline{PX}^*$ はそれぞれ下図のようである。



こしばらくは、視線は、直線であるとは限らずに話しを進めたい。

Σ 上の点 X を視点 P からながめたとする。このとき、視線 \overline{PX} をさえぎる Σ の要素からなる集合を点 X の障害集合と呼び、 $\Sigma^*(X)$ とかく。 $\Sigma^*(X)$ から、解析接続して得られる Σ の部分集合を X の可障害集合と呼び $\Sigma^\circ(X)$ とかく。ここで、つぎのような規約を設ける。

規約 1. 点 X および点 P は $\Sigma^*(X)$ の要素とはしない。すなわち、 $\Sigma^*(X), \Sigma^\circ(X)$ はそれぞれ

$$\Sigma^*(X) = \overline{PX} \cap \{\Sigma - \{X\} - \{P\}\} = \overline{PX} \cap \Sigma^*(X)$$

$$\Sigma^\circ(X) = \{Y | Y \text{ は } \Sigma^*(X) \text{ から解析接続できる. } Y \in \Sigma\}$$

$$\Sigma(X) = \Sigma - \{X\} - \{P\} \cup \Sigma^\circ(X)$$

である。 $\Sigma(X)$ には、特別な名前はつけない。

gazability の定義

対象点を窓を通してながめたとき、その窓は一つの視野を決める。そのアナロジイから、つぎの定義を行なう。

定義 1. $X \in K$ に対して、 $\overline{PX}^* \cap S \neq \emptyset$ のとき、点 X は、gazable であるという。 $\overline{PX}^* \cap S = \emptyset$ のとき、点 X は、ungazable であるという。

写真機の視野決定構造からのアナロジイから、つぎのように定義しても、以下の議論は、ほとんど変わらない。

定義 1'. $X \in K$ に対して、 $^* \overline{PX} \cap S \neq \emptyset$ のとき、点 X は、gazable であるという。 $^* \overline{PX} \cap S = \emptyset$ のとき、点 X は、ungazable であるという。

以下では、定義 1 を主として用いる。

visibility の定義

定義 2. $X \in K$ に対して、 $\Sigma^*(X) \neq \emptyset$ のとき、点 X は invisible であるといい、 $g(X, \Sigma(X)) = 0$ とかく。 $\Sigma^*(X) = \emptyset$ のとき、点 X は、visible であるといい、 $g(X, \Sigma(X)) = 1$ とかく。

すなわち、輪廓線などの集合 K (物体の表面の点ならどこでもよい。物体上の模様も、検定すべき点の間であるから) の要素 X が、3次元空間内の物体となって、出現する点の集合 Σ を障害物とみなしたとき、そのとき、視線 \overline{PX} をさえぎることがないとき visible であるといい、視線がさえぎられるとき、invisible であるということになる。

plottability の定義

gazable な点 X の集合を考える。すると、 $\overline{PX} \cap S = Z \neq \emptyset$ である。このとき

定義 3. 少なくとも一つの $Y \in \overline{PX^*} \cap K$ に対して, $g(Y, \Sigma(Y)) = 1$ が成立するならば, Z は plottable であるといい, $f(Z, \Sigma) = 1$ とかく. すべての Y について, $g(Y, \Sigma(Y)) = 0$ ならば, Z は implottable であるといい, $f(Z, \Sigma) = 0$ とかく.

この定義は, つぎのことを意味する. 視点 P から, 点 X をながめたとき, $\overline{PX^*} \cap S$ が \emptyset ではないから, 点 X は, 視野の中にはいっている. そして, そのとき, 物体 Σ があるにもかかわらず, 点 X が visible であれば, 視面 S 上に, その対応する点を印づけなければならない. このとき, 対応する点 Z は, plottable であると呼んでいる. したがって, 点 X が gazable であっても, visible でなければ, 視面 S 上の対応する点には, なんら印をつけなくてもよい. このとき, 対応する点 Z は implottable であると呼んでいる.

visible な点の集合の特徴

$\overline{PX^*} \cap K$ を論理関数 g を用いて, 相交わらない二つの集合に, 分割することができる.

lemma 1. $\overline{PX^*} \cap K = Y_1 \cup Y_2$

$$\begin{cases} g(Y, \Sigma(Y)) = 1 \text{ for } \forall Y \in Y_1 \\ g(Y, \Sigma(Y)) = 0 \text{ for } \forall Y \in Y_2 \end{cases}$$

$\overline{PX^*}$ が自分自身と交わる曲線であるときは, $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ は, 一般に成立しない.

定理 1. $\Sigma \supset K$ のとき, Y_1 の要素は高々一つである.

$\Sigma \supset K$ のとき, 定理 1 はなりたない. 反例をつぎに述べる. $\overline{PX^*} \cap K = \{X_i\}$, $X_i \in \Sigma$, $X_i \in \{X_i\}$ とする. $|\overline{PX_i^*}| = \min_j |\overline{PX_j^*}|$ であるとする, $\overline{PX_i^*} \cap \Sigma$ が \emptyset であれば, $g(X_i, \Sigma(X_i)) = 1$ となって, X_i は Y_1 の要素となる. X_i を除いた $\{X_j\}$ のうちで, $|\overline{PX_j^*}| = \min_j |\overline{PX_j^*}|$ を考えると, $\overline{PX_j^*} \cap \Sigma = \emptyset$ なる X_j を作る事ができる. このとき Y_1 の要素の数は, 複数となる.

さて, lemma 1. と定義 3 より

$$\begin{aligned} \text{定理 2. } Y_1 \neq \emptyset &\leftrightarrow f(Z, \Sigma) = 1 \\ Y_1 = \emptyset &\leftrightarrow f(Z, \Sigma) = 0 \end{aligned}$$

Σ の部分集合 Δ_i と $\Sigma(X)$ の部分集合 $\Delta_j(X)$

$\Sigma(X) = \bigcup_{j=1}^n \Delta_j(X)$ とする. このとき $\Sigma = \bigcup_{j=1}^n \Delta_j$ であるから, $\Delta_j(X) = \Delta_j - \{X\} - \{P\}$ が成立しているものとする.

lemma 2. $X \in K, \Delta_j(X) \cap \overline{PX^*} = \Delta_j^*(X)$ とする.

$$\begin{aligned} \Delta_j^*(X) \neq \emptyset &\leftrightarrow g(X, \Delta_j(X)) = 0 \\ \Delta_j^*(X) = \emptyset &\leftrightarrow g(X, \Delta_j(X)) = 1 \end{aligned}$$

すると, つぎの定理が成立する.

$$\text{定理 3. } g(X, \Sigma(X)) = \bigcap_{j=1}^n g(X, \Delta_j(X))$$

すなわち

$$\begin{aligned} \text{定理 4. } f(Z, \Sigma) &= \bigcup_{X \in \overline{PX^*} \cap K} g(X, \Sigma(X)) \\ &= \bigcap_i f(Z, \Delta_i) \end{aligned}$$

定理 3 と定理 4 から

$$\begin{aligned} \text{cor. 1. } &\bigcup_{X \in \overline{PX^*} \cap K} \bigcap_i g(X, \Delta_i(X)) \\ &= \bigcap_i \bigcup_{X \in \overline{PX^*} \cap K} g(X, \Delta_i(X)) \end{aligned}$$

視線が直線であるときの第 2 の規約について

$\overline{PX^*} \cap K$ の要素が 2 個以上あるとき, 対応する $\overline{PX^*} \cap S$ 上の点は縮退を受けているという. $\overline{PX^*} \cap S$ の要素は複数でもよい. このとき, つぎのような規約を設ける.

規約 2. 視点 P の任意の近傍を含む単一平面, 単一直線の合併集合 L の要素は, 任意の X の障害集合 $\Sigma^*(X)$ の要素にはならないものとする.

すなわち, $\Sigma^*(X)$ はつぎのように書き替えられる.

$$\begin{aligned} \Sigma^*(X) &= \overline{PX^*} \cap \Sigma(X) \\ \Sigma(X) &= \Sigma - \{X\} - \{P\} - L \end{aligned}$$

このことから, plottability に関し, つぎの式が成立する.

$$\text{lemma 3. } f(Z, \Sigma) = f(Z, \Sigma - L)$$

さて, つぎのような条件が成立する場合を考えてみる.

$$\text{COND } \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \text{ は単一平面, 単一直線の合併集合である.} \\ K \text{ は } \Sigma \text{ のすべての境界線を含む曲線の合併集合である.} \end{array} \right.$$

定理 5. $\overline{PX^*} \cap K$ の要素の近傍からなる Σ の部分集合 ϕ を考えると $Z \in \overline{PX^*} \cap S$ において,

$$f(Z, \phi) = 1$$

が, COND 成立下で常に成立する.

$$\text{Cor. 2. } f(Z, \Sigma) = f(Z, \Sigma - \phi)$$

3. plottability を調べるアルゴリズム

Δ_i が単体注2) であるように Σ を分割したとき, その分割法を最大分割という. Σ が与えられれば, 最大分割は常に可能である. ところで, K 上の点は, 通常

注 2) Δ_i の性質がただ一つの方程式系, たとえば, (5.1), (5.3), (5.6) で表現されているとき, 単体であるということにする.

は連続濃度 c を持っている。いま、十分小さな半径 r の球を考えると、有限個の球で K をおおうことができる。この球の中心に名前をつけて、 X_1, X_2, \dots, X_n とする。このとき $X_j \in K$ とする。 r は、SCAN 精度という。ここでは K の代わりに $\{X_i\}$ を用いることにする。さて、有限個の X_j に対応する $\overline{PX_j} \cap S = Z$ の plottability を調べることにする。このときのアルゴリズムは、つぎようになる。

- (1) $j=1$ に set する。
- (2) もし、 $j=n+1$ なら 13 へ jump する。
- (3) $i=1$ に set する。
- (4) gazability を調べて、gazable なら ($g=1$ なら) 5 へ、ungazable なら ($g=0$ なら)、11 へ jump する。
- (5) もし、 $i=M+1$ なら 10 へ jump する。
- (6) $g(X_j, \Delta_i(X_j))$ の値を求める。
- (7) $g=0$ なら 11 へ jump する。
- (8) $i=i+1$
- (9) 5 へ jump する。
- (10) Z は plottable であるから、 S 上または S の射影上に plot する。
- (11) $j=j+1$
- (12) 2 へ jump する。
- (13) 終了。

(7) における jump は、定理 4 の結果を用いたものである。(5) の M は $\sum_{i=1}^M \Delta_i$ の M である。

以上のことから、(4) の gazability、(6) の visibility の具体的な判定法を与えればよいことがわかる。次節以降では、具体的な判定法について述べる。(10) の操作は、出力の形式であって drafting-machine などに、hard-copy として出力する場合と、データファイルを通して、CRT ディスプレイ装置に出力する場合とが考えられる。ここでは、これらについては、詳述するつもりはない。

4. 視点、視線、視曲面

フェルマーの原理によれば、光が X から P へ進むとき、光路に沿っての線素を ds 、媒質の屈折率を $n(x, y, z)$ とすると

$$[XP] = \int_X^P n(x, y, z) ds \quad (4.1)$$

が、極値を取るように入む¹⁶⁾。いま、曲線に沿っての長さを s とすると、一般には

$$f_1(x, y, z, s) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} f_2(x, y, z, s) &= 0 \\ f_3(x, y, z, s) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

なる空間曲線上で (4.1) を積分したとき、 $[XP]$ が極値を持てば、(4.2) は光路である。一般に $[XP]$ を光路長という。ところで、均質・等方の媒質中では、 $n(x, y, z) = \text{const.}$ であるから、光路は、直線となる。前節の使用記号とつきあわせると $[XP] = |\overline{PX}|$ である。われわれは、光路と視線とは、同義であると考えて注 3)。

直線である視線の方程式は、正規化して、つぎのように 3 種類の表現ができる。

$$R = (P - X)s_1 + X \quad 0 \leq s_1 \leq 1 \quad (4.3)$$

$$R = (X - P)s_2 + P \quad 0 \leq s_2 \leq 1 \quad (4.4)$$

$$R = As + X \quad 0 \leq s \quad (4.5)$$

R, P, X, A はベクトル、 s_1, s_2, s はスカラー量である。(4.3)、(4.4) が同一径路を表わす場合

$$s_1 + s_2 = 1 \quad (4.6)$$

が成立している。ここで s_1, s_2 の目盛りは必ずしも、光路長と一致しているとは限らない。(4.5) の場合は視点は、視線の方程式中に表現されていると考える。

さて、視曲面 S は、一般には、非線形連立方程式系で表現されて

$$\left. \begin{aligned} s_1(x, y, z, p, q) &= 0 \\ s_2(x, y, z, p, q) &= 0 \\ s_3(x, y, z, p, q) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

である。このとき、この曲面の形状は

$$\varphi_i(p, q) \leq 0 \quad i=1, 2, \dots, n \quad (4.8)$$

で表わされる。いま、とくに、視平面

$$S = Ap + Bq + C \quad (4.9)$$

を考えて、形状は (4.8) を正規化して

$$0 \leq p, q \leq 1 \quad (4.10)$$

であるとする。このとき、 A, B, C の決定の仕方、図形の回転、伸縮、平行移動を考慮することができる。

gazability はつぎのようにして調べる。視線の方程式 (4.2) と視曲面の方程式 (4.7) と連立させる。このとき、制限条件 (4.8) を満たす (p, q) の組があれば、点 X は gazable であり、なければ ungazable である。たとえば、制限条件 (4.10) のもとで、視線 (4.5) と視平面 (4.9) とを連立させる。このとき

$$As + X = Ap + Bq + C \quad (4.11)$$

の解 s, p, q がそれぞれ

$$s > 0, 0 \leq p, q \leq 1 \quad (4.12)$$

注 3) ある点を見る視線と、その点から視点までの光路は、一致しているはずである。

を満たせば、点 X は gazable であり、それ以外は ungazable である。この場合の gazability の計算のためには、5. の例4を借用すればよい。

5. Δ_i の表現法と visibility の判定法について

5.1 基本的な考え方

ここでは、単体 Δ_i の表現法の種類と、その表現法に依存する visibility の判定法について述べる。

Δ_i の表現法として、つぎの3種類のものが考えられる。

第1の方法 3次元空間内の任意の曲面を直接変数 x, y, z によって表現するもので、曲面の性質を

$$Q(x, y, z) = 0 \quad (5.1)$$

で考え、曲面の形状を決定する境界条件を

$$q_i(x, y, z) \leq 0 \quad i=1, 2, \dots, n \quad (5.2)$$

なる不等式系で与えるものである。

第2の方法 3次元空間内の任意の曲面を二つのパラメータ u, t を用いて表現するもので、曲面の性質を

$$R = F(u, t) \quad (5.3)$$

で考え、曲面の形状を決定する境界条件を一般には

$$q_i(u, t) \leq 0 \quad i=1, 2, \dots, r \quad (5.4)$$

で与えるが、簡単化と標準化のため、(5.4)の代わりに

$$0 \leq u, t \leq 1 \quad (5.5)$$

を用いる。

第3の方法 3次元空間内の任意の物体を三つのパラメータ u, v, t を用いて表現するもので、曲面の性質を

$$R = F(u, v, t) \quad (5.6)$$

で考え、その形状を決定する境界条件を、一般には

$$q_i(u, v, t) \leq 0 \quad i=1, 2, \dots, n \quad (5.7)$$

で与えるが、簡単化と標準化のため、(5.7)の代わりに次式で与える。

$$0 \leq u, v, t \leq 1 \quad (5.8)$$

さて、これらのおのおの場合の表現法についての visibility の判定法について考えるため、視線の方程式として、まず、(4.5)を採用することにする。

いま、(5.1)、(5.2)、(5.3)、(5.5)、(5.6)、(5.8)を連立させると、それぞれ、つぎようになる。

$$\left. \begin{aligned} Q(A_{1s} + X_1, A_{2s} + X_2, A_{3s} + X_3) &= 0 \\ q_i(A_{1s} + X_1, A_{2s} + X_2, A_{3s} + X_3) &\leq 0 \quad i=1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

$$As + X = F(u, t) \quad 0 \leq u, t \leq 1 \quad (5.10)$$

$$As + X = F(u, v, t) \quad 0 \leq u, v, t \leq 1 \quad (5.11)$$

さて、(5.9)、(5.10)、(5.11)を満たす s の解集合をそれぞれ、 H_i, H_{ii}, H_{iii} とする。いま、正実数の集合を R^+ とすると、visibility の判定は、つぎのようにして行なうことができる。

$$\begin{cases} H_r \cap R^+ = \emptyset \Rightarrow \text{点 } X \text{ は visible である.} \\ H_r \cap R^+ \neq \emptyset \Rightarrow \text{点 } X \text{ は invisible である.} \end{cases}$$

ただし、 $r=i, ii, iii$ である。

(4.5)の代わりに、(4.3)または(4.4)を視線として用いたときは

$$R^+ = \{x | 0 < x < 1\}$$

と定義しなおせば、上記の判定法を、そのまま使用することができる。

ところで、(5.9)において、一般に s が explicit に求められるのは、制限条件がなければ、 s について4次までの多項式に整理される場合である。しかし、4次の多項式になると、判定は実際にはたいへんにめんどうなものとなる。(5.10)において、 s が explicit に求められるのは、 u, t に関し、線形化できる場合と、特殊な2次形式で表現できる場合である。(5.11)については、連立不等式系の解の性質を調べる必要がある。

5.2 判定例

決定的に判定できる具体的な判定例を示すことにする。

例1. Δ_i が直接変数表示の平面であるとき、平面の式は、 $a_i (i=1 \sim 4)$ を定数として、つぎのように与えられる。

$$Q(x, y, z) = a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 = 0 \quad (5.12)$$

(4.5)を(5.12)に代入して、 s について解くと

1. $Q(A_1, A_2, A_3) \neq a_4$ のとき

$$s = -\frac{Q(X_1, X_2, X_3)}{Q(A_1, A_2, A_3) - a_4}$$

2. $Q(A_1, A_2, A_3) = a_4$ のとき

2' $Q(X_1, X_2, X_3) = 0$ であれば、 s は任意の実数。

2'' $Q(X_1, X_2, X_3) \neq 0$ であれば、 s は存在しない。

visibility の判定は、つぎようになる。

(i) 1. で $s \leq 0$ であるか、または2''であれば、点 X は visible である。

(ii) 1. で $s > 0$ であるか、または2'であれば、点 X は invisible である。

(iii) 2' で COND が成立しているときは、点 X

は, visible であるとみなしても, さしつかえはない.

例 2. A_i が直接変数表示の 2 次曲面であるとき⁸⁾, 2 次曲面は, a_i を定数として, つぎのように与えられる.

$$Q(x, y, z) = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 + a_4 xy + a_5 zy + a_6 zx + a_7 x + a_8 y + a_9 z + a_{10} = 0 \quad (5.14)$$

(4.5) を (5.14) に代入して, s について整理すると

$$As^2 + Bs + C = 0 \quad (5.15)$$

ただし, A, B, C は

$$A = Q(A_1, A_2, A_3) - a_7 A_1 - a_8 A_2 - a_9 A_3 - a_{10}$$

$$B = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial X_i} Q(X_1, X_2, X_3) A_i$$

$$C = Q(X_1, X_2, X_3) \quad (5.16)$$

したがって, visibility の判定は, $A \neq 0$ のとき

1. $AC < 0$ のとき, 点 X は invisible.
 2. $B^2 - 4AC > 0$, $AB \leq 0$ または $B^2 - 4AC \geq 0$, $AB < 0$ のとき, 点 X は invisible.
 3. 1, 2, 以外のとき, 点 X は visible.
- $A = 0$ のときは, 例 1 の判定に準ずる.

例 3. A_i が直接変数表示の 3 次曲面であるとき 3 次曲面は, a_i を定数として, つぎのように与えられる.

$$Q(x, y, z) = a_1 x^3 + a_2 y^3 + a_3 z^3 + a_4 xy^2 + a_5 xz^2 + a_6 yx^2 + a_7 yz^2 + a_8 zx^2 + a_9 zy^2 + a_{10} xyz + a_{11} x^2 + a_{12} y^2 + a_{13} z^2 + a_{14} xy + a_{15} yz + a_{16} xz + a_{17} x + a_{18} y + a_{19} z + a_{20} = 0 \quad (5.17)$$

(4.5) を (5.17) に代入して, s について整理すると

$$R(s) = As^3 + Bs^2 + Cs + D = 0 \quad (5.18)$$

ただし,

$$A = a_1 A_1^3 + a_2 A_2^3 + a_3 A_3^3 + a_4 A_1 A_2^2 + a_5 A_1 A_3^2 + a_6 A_2 A_1^2 + a_7 A_2 A_3^2 + a_8 A_3 A_1^2 + a_9 A_3 A_2^2 + a_{10} A_1 A_2 A_3$$

$$B = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial A_i} Q(A_1, A_2, A_3) X_i - a_{17} - a_{18} - a_{19}$$

$$C = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial X_i} Q(X_1, X_2, X_3) A_i$$

$$D = Q(X_1, X_2, X_3) \quad (5.19)$$

したがって, visibility の判定は, $A \neq 0$ のとき

1. $AD < 0$ のとき, 点 X は invisible.

2. $AD \geq 0$. $B^2 - 3AC > 0$,

$$E = \max \left\{ \frac{-B - \sqrt{B^2 - 3AC}}{3A}, \frac{-B + \sqrt{B^2 - 3AC}}{3A} \right\} \geq 0$$

$AR(E) < 0$ のとき, 点 X は invisible.

3. 1, 2 以外のとき, 点 X は visible である.

$A = 0$ のときは, 例 2 の判定に準ずる.

例 4. A_i がパラメトリック表示の平行四辺形であるとき, 平行四辺形は, つぎのように与えられる.

$$R = Au + Bt + C \quad 0 \leq u, t \leq 1 \quad (5.20)$$

(4.5) と (5.20) を連立させると

$$J \begin{pmatrix} s \\ u \\ t \end{pmatrix} = C - X, \quad J = \begin{pmatrix} A_1 & -A_1 & -B_1 \\ A_2 & -A_2 & -B_2 \\ A_3 & -A_3 & -B_3 \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

となる. $|J| \neq 0$ のとき, (5.21) は一意的に解けて

$$s = \frac{1}{|J|} \begin{vmatrix} C_1 - X_1 & -A_1 & -B_1 \\ C_2 - X_2 & -A_2 & -B_2 \\ C_3 - X_3 & -A_3 & -B_3 \end{vmatrix}$$

$$u = \frac{1}{|J|} \begin{vmatrix} A_1 & C_1 - X_1 & -B_1 \\ A_2 & C_2 - X_2 & -B_2 \\ A_3 & C_3 - X_3 & -B_3 \end{vmatrix}$$

$$t = \frac{1}{|J|} \begin{vmatrix} A_1 & -A_1 & C_1 - X_1 \\ A_2 & -A_2 & C_2 - X_2 \\ A_3 & -A_3 & C_3 - X_3 \end{vmatrix} \quad (5.22)$$

このとき

1. $s > 0$, $0 \leq u, t \leq 1$ のとき, 点 X は invisible.
2. 1 以外のとき, 点 X は visible.

と判定される. $|J| = 0$ のときは, 別考を要する. 定理 5 より, もし, COND が成立しておれば, 点 X は visible であるとみなしても plottability にはなんらさしつかえがない. COND が成立していないときは

$$J_k = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ A_j & B_j \end{pmatrix}, \quad |J_k| \neq 0 \quad (5.23)$$

$$i, j, k = 1, 2, 3, \quad i \neq j, \quad j \neq k, \quad i \neq k$$

なる J_k を 1 個選ぶ注 4). このような i, j について

$$\left. \begin{aligned} A_i s - A_i u - B_i t - C_i + X_i &= 0 \\ A_j s - A_j u - B_j t - C_j + X_j &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

となる. このとき, u, t について一意的に解けて

$$u = \frac{1}{|J_k|} (Ds - E)$$

$$t = \frac{1}{|J_k|} (Fs - G) \quad (5.25)$$

注 4) $|J_k| \neq 0$ なる J_k が存在しないと, (5.20) は平面の方程式ではなくなる. したがって, このような J_k は必ず存在する.

となる。ただし

$$\left. \begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} A_i & B_i \\ A_j & B_j \end{vmatrix}, & E &= \begin{vmatrix} C_i - X_i & B_i \\ C_j - X_j & B_j \end{vmatrix} \\ F &= \begin{vmatrix} A_i & A_j \\ A_i & A_j \end{vmatrix}, & G &= \begin{vmatrix} A_i & A_j \\ C_i - X_i & C_j - X_j \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

したがって

$$\left. \begin{aligned} |J_k|E \leq |J_k|Ds \leq |J_k|^2 + |J_k|E \\ |J_k|G \leq |J_k|Fs \leq |J_k|^2 + |J_k|G \\ s > 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

を満たす s が存在すれば、点 X は invisible であり、存在しなければ、visible であると判定される。

例 5. A_i がパラメトリック表示の三角形であるとき、三角形はつぎのように与えられる。

$$R = A\omega t + Bt + C \quad 0 \leq \omega, t \leq 1 \quad (5.28)$$

(4.5) と (5.28) を連立して、 $\omega t = u$ とおくと (5.21) が得られる。 $|J| \neq 0$ のとき、 s, ω, t について解けて

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{1}{|J|} \begin{vmatrix} C_1 - X_1, -A_1, -B_1 \\ C_2 - X_2, -A_2, -B_2 \\ C_3 - X_3, -A_3, -B_3 \end{vmatrix} \\ t &= \frac{1}{|J|} \begin{vmatrix} A_1, -A_1, C_1 - X_1 \\ A_2, -A_2, C_2 - X_2 \\ A_3, -A_3, C_3 - X_3 \end{vmatrix} \\ \omega &= \begin{vmatrix} A_1, C_1 - X_1, -B_1 \\ A_2, C_2 - X_2, -B_2 \\ A_3, C_3 - X_3, -B_3 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} A_1, -A_1, C_1 - X_1 \\ A_2, -A_2, C_2 - X_2 \\ A_3, -A_3, C_3 - X_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

このとき

1. $t=0$ のとき、 $s>0$ なら点 X は invisible.
2. $t \neq 0$ のとき、 $s>0, 0 \leq \omega, t \leq 1$ のとき点 X は invisible.
3. 1, 2 以外の場合、点 X は visible.

$|J|=0$ のとき、例 4 と同様に $|J_i| \neq 0$ なる i を選ぶ。

$$\left. \begin{aligned} \omega &= (Ds - E) / (Fs - G) \\ t &= \frac{1}{|J_i|} (Fs - G) \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

と表わされる。そして、 ω, t の条件から

$$\left. \begin{aligned} (Ds - E)(Fs - G) \geq 0 \\ \{(F - D)s + E - G\}(Fs - G) \geq 0 \\ |J_i|G \leq |J_i|Fs \leq |J_i|^2 + |J_i|G \\ s > 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.31)$$

を満たす s が存在すれば、点 X は invisible であり、存在しなければ、点 X は visible である。

例 6. A_i がパラメトリック表示の 2 次形式のと

き、任意の 4 点を通る 2 次表示の曲面の一つは

$$R = A ut + Bu + Ct + D \quad 0 \leq u, t \leq 1 \quad (5.32)$$

で与えられる。このとき、(4.5) と (5.32) を連立させると

$$As + X = A ut + Bu + Ct + D \quad (5.33)$$

となる。 s を消去すると

$$A' ut + B' u + C' t + D' = 0 \quad (5.34)$$

となる。ただし

$$\left. \begin{aligned} A' &= \begin{pmatrix} A_1 A_2 - A_2 A_1 \\ A_1 A_3 - A_3 A_1 \end{pmatrix}, & B' &= \begin{pmatrix} B_1 A_2 - B_2 A_1 \\ B_1 A_3 - B_3 A_1 \end{pmatrix} \\ C' &= \begin{pmatrix} C_1 A_2 - C_2 A_1 \\ C_1 A_3 - C_3 A_1 \end{pmatrix} \\ D' &= \begin{pmatrix} (D_1 - X_1) A_2 - (D_2 - X_2) A_1 \\ (D_1 - X_1) A_3 - (D_3 - X_3) A_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

(5.34) を u, t について整理すると

$$\left. \begin{aligned} A_1'' t^2 + B_1'' t + C_1'' &= 0 \\ A_2'' u^2 + B_2'' u + C_2'' &= 0 \\ A_1'' t + A_2'' u + C_3'' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

ただし、係数は

$$\left. \begin{aligned} A_1'' &= A_2' C_1' - A_1' C_2' \\ A_2'' &= A_2' B_1' - A_1' B_2' \\ B_1'' &= A_2 D_1 - A_1 D_2 + B_2 C_1 - B_1 C_2 \\ B_2'' &= A_2 D_1 - A_1 D_2 + B_1 C_2 - B_2 C_1 \\ C_1'' &= D_1 B_2 - D_2 B_1 \\ C_2'' &= D_1 C_2 - D_2 C_1 \\ C_3'' &= A_2 D_1 - A_1 D_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.37)$$

である。

さて、このときの判定は、つぎようになる。

$A_i \neq 0$ なる i を選んで

$$s(u, t) = (-X_i + A_i ut + B_i u + C_i t + D_i) / A_i$$

とする。

1. $A_1'' \neq 0, A_2'' \neq 0$ のとき

$$u_{\pm} = \frac{-B_1'' \pm \sqrt{B_1''^2 - 4 A_1'' C_1''}}{2 A_1''}$$

$$t_{\pm} = -\frac{A_1'' u_{\pm} + C_3''}{A_2''}$$

$$s_{\pm} = s(u_{\pm}, t_{\pm})$$

2. $A_1'' = 0, A_2'' \neq 0, B_1'' \neq 0$ のとき

$$u = -\frac{C_1''}{B_1''}, \quad t = -\frac{C_3''}{A_2''}, \quad s = s(u, t)$$

3. $A_1 \neq 0, A_2 = 0, B_2'' \neq 0$ のとき

$$u = -\frac{C_3''}{A_1''}, \quad t = -\frac{C_2''}{B_2''}, \quad s = s(u, t)$$

4. $A_1'' = 0, A_2'' = 0, B_1'' \neq 0, B_2'' \neq 0$ のとき

- $u = -\frac{C_1''}{B_1''}, t = -\frac{C_2''}{B_2''}, s = s(u, t)$
5. $A_1''=0, A_2''=0, B_1''=0, B_2'' \neq 0$ のとき
 $u = \text{任意の実数}, t = -\frac{C_2''}{B_2''}$
 $\min(s(0, t), s(1, t)) \leq s \leq \max(s(0, t), s(1, t))$
6. $A_1''=0, A_2''=0, B_1'' \neq 0, B_2''=0$ のとき
 $u = -\frac{C_1''}{B_1''}, t = \text{任意の実数}$
 $\min(s(u, 0), s(u, 1)) \leq s \leq \max(s(u, 0), s(u, 1))$
7. $A_1''=0, A_2''=0, B_1''=0, B_2''=0$ のとき
 このような状態はないはずである。

となるから、判定は

1. の場合、 $0 \leq u, t \leq 1, s > 0$ であるか、または
 $0 \leq u, t \leq 1, s > 0$ のとき、点 X は invisible であり、
 その他のときは visible である。

2.~4. の場合、 $0 \leq u, t \leq 1, s > 0$ のとき点 X は
 invisible であり、その他のときは visible である。

5. の場合、 $0 \leq t \leq 1, \max(s(0, t), s(1, t)) > 0$ なら
 点 X は invisible であり、その他のときは visible である。

6. の場合、 $0 \leq u \leq 1, \max(s(u, 0), s(u, 1)) > 0$ なら、
 点 X は invisible であり、その他のときは visible である。

7. の場合、(5.32) は縮退を起こしているの、点
 または線分である。点 X は visible であるとみなしても、
 通常はさしつかえがない。

例 7. パラメトリック表示の平行六面体のとき、
 平行六面体は、つぎのように与えられる。

$$R = Au + Bv + Ct + D \quad 0 \leq u, v, t \leq 1 \quad (5.38)$$

(4.5) と (5.38) を連立させたとき

$$|J| = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \equiv J \neq 0$$

であるから注5) u, v, t について解けて

$$\left. \begin{aligned} u &= (Es + F)/J \\ v &= (Gs + H)/J \\ t &= (Is + K)/J \end{aligned} \right\} \quad (5.39)$$

となる。ただし、それぞれの係数は

$$E = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad F = \begin{vmatrix} X_1 - D_1 & B_1 & C_1 \\ X_2 - D_2 & B_2 & C_2 \\ X_3 - D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} G &= \begin{vmatrix} A_1 & A_1 & C_1 \\ A_2 & A_2 & C_2 \\ A_3 & A_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad H = \begin{vmatrix} A_1 & X_1 - D_1 & C_1 \\ A_2 & X_2 - D_2 & C_2 \\ A_3 & X_3 - D_3 & C_3 \end{vmatrix} \\ I &= \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & A_1 \\ A_2 & B_2 & A_2 \\ A_3 & B_3 & A_3 \end{vmatrix}, \quad K = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & X_1 - D_1 \\ A_2 & B_2 & X_2 - D_2 \\ A_3 & B_3 & X_3 - D_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (5.40)$$

となる。このとき、調べるべき s の解集合は、つぎの不等式系で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq J(Es + F) \leq J^2 \\ 0 &\leq J(Gs + H) \leq J^2 \\ 0 &\leq J(Is + K) \leq J^2 \\ 0 &\leq s \end{aligned} \right\} \quad (5.41)$$

例 8. パラメトリック表示の3角錐のとき、三角錐は、つぎのように与えられる。

$$R = Auv + Bvt + Ct + D \quad 0 \leq u, v, t \leq 1 \quad (5.42)$$

(4.5) と (5.42) とを連立させて

$$uv + vt = U, \quad vt = V \quad (5.43)$$

とおくと、例7と同形となる。そこで

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{J(Es + F)}{(Gs + H)(Is + K)} \\ v &= (Gs + H)/(Is + K) \\ t &= (Is + K)/J \end{aligned} \right\} \quad (5.44)$$

が求められる。したがって、調べるべき s の解集合は、つぎの不等式系で表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq (Gs + H)(Is + K) \\ 0 &\leq (Is - Gs + K - H)(Is + K) \\ 0 &\leq J(Es + F) \\ 0 &\leq GIs^2 + (IH + GK - JE)s + HK - JF \\ 0 &\leq s \end{aligned} \right\} \quad (5.45)$$

6. パラメトリック表示の A_i の近似法について

A_i は patch⁹⁾ と呼ばれることがあるが、一つのシステム中では、正規化した曲面形式で表現されているものとする。とくに、2個のパラメータを用いている場合、多次の多項式であることが多い⁹⁾⁻¹¹⁾。このため、visibility の計算に用いる式 (5.10) は、非線形連立方程式となる。すなわち、一般には、 s, u, t を explicit に得ることができないので、Gradient Method 法などの収束形の数値計算を行なうことが要求される。ところで、このような収束形計算においては、つぎのような大きな困難がある。

1. 解が存在しないときは、あるいは許容誤差内に落ちつかないとき、計算はループにはいる。

注 5) $J=0$ のとき、(5.38) は平行六面体でなくなる。

2. 計算がループにはいるかどうかを、あらかじめ知るアルゴリズムを得るのとは不可能に近い。
3. 解をすべて抽出するのは、困難である。
4. Δ_i の形式によっては、計算時間をあらかじめ予測しがたいので、modification time の推定が困難である。

さて、これらの困難を避けるため、 Δ_i を曲面素 $\delta_{kr'}$ で近似して、 Δ_i に関する判定を、 $\delta_{kr'}$ に関する判定に置き替えることによって、収束形の計算を避けることにする。このとき、 $\delta_{kr'}$ の曲面形式としては、例 5、例 6 に示したもののどちらかを採用する。

例 5 を採用するときは、つぎのようにその頂点を決定する。 $\Delta_i(x, y), \delta_{kr'}(u, v)$ はそれぞれ $\Delta_i, \delta_{kr'}$ 上の点を示す。

$$\left. \begin{aligned} \Delta_i\left(\frac{k}{N}, \frac{r}{N}\right) &= {}^1\delta_{kr'}(1, 1) \\ \Delta_i\left(\frac{k+1}{N}, \frac{r}{N}\right) &= {}^1\delta_{kr'}(0, 1) \\ \Delta_i\left(\frac{k}{N}, \frac{r+1}{N}\right) &= {}^1\delta_{kr'}(\alpha, 0) \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta_i\left(\frac{k+1}{N}, \frac{r}{N}\right) &= {}^2\delta_{kr'}(\alpha, 0) \\ \Delta_i\left(\frac{k}{N}, \frac{r+1}{N}\right) &= {}^2\delta_{kr'}(0, 1) \\ \Delta_i\left(\frac{k+1}{N}, \frac{r+1}{N}\right) &= {}^2\delta_{kr'}(1, 1) \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

α は任意の数値である。 $k, r=1, 2, \dots, N-1$ 。

また、例 6 を用いるときは、 $\delta_{kr'}$ として 4 点が必要である。それらはつぎのように決定できる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta_i\left(\frac{k}{N}, \frac{r}{N}\right) &= \delta_{kr'}(0, 0) \\ \Delta_i\left(\frac{k+1}{N}, \frac{r}{N}\right) &= \delta_{kr'}(0, 1) \\ \Delta_i\left(\frac{k}{N}, \frac{r+1}{N}\right) &= \delta_{kr'}(1, 0) \\ \Delta_i\left(\frac{k+1}{N}, \frac{r+1}{N}\right) &= \delta_{kr'}(1, 1) \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

このような近似法を用いたときは、COND は一般には成立しない。

7. 結 論

これらの議論のうち、例 5 の方法を用いることについては、坂梨暢泰氏の協力を得て、modification time の測定を行なった¹⁷⁾。これは、隣り合った三角形 32 個を対象点の全集合 \mathcal{S} とし、それらの各辺を 5 等分して、全体で 280 個の点の集合を K として、実験を行

なった。1 点ごとの visibility の判定に要した時間は、FACOM 230-10 FORTRAN で約 78 秒、HITAC-5020 FORTRAN で約 0.1 秒であった。すなわち、例 5 の判定には、それぞれ約 2.4 秒および約 0.003 秒かかった。ただしこのとき、COND は成立しているものとして判定した。1 枚の絵を計算するには、それぞれ約 6 時間、および約 26 秒を要することがわかる。したがって、HITAC-5020 級の Computer であれば、I. E. Sutherland が要求している modification time³⁾ を満たすことが十分予想されるので、実用に併せるものと思われる。

なお、実際面では、このほかに集合 K を自動的に計算する手法を、見つけることが重要であるが、集合 K は、輪廓線や、intersection の形や、曲面上の模様を含むので、与えられた任意の曲面の性質だけから、それらを自動的に算出するのは、すこぶる困難な問題である。本論中では、それらは、すでに与えられているものとして議論を進めた。

8. 謝 辞

本論文は、著者の修士論文¹⁸⁾の一部に手を加えたものであるが、その研究途上、いろいろな人々の援助を得た。萩原宏教授を初めとする研究室の方々の、親切な討論に対して感謝する。とくに、めんどうな program の coding を精力的になし、modification time の測定を行なって下さった坂梨暢泰氏、そして、原稿を詳細に目を通して、適切な注意・助言を与えて下さった上原徹三氏、柏岡誠治氏に対して、深く感謝している。氏らの援助がなかったならば、本論文は発表されなかったかも知れない。しかし、本論文に対する責任は、その全部を著者がおっていることには、変わりがない。

参 考 文 献

- 1) L. C. Robert: Machine Perception of Three-Dimensional Solid, Lincoln Laboratory, Tech. Rep., 315, 22 (May 1963).
- 2) I. E. Sutherland: SKETCHPAD Man-Machine Graphical Communication System, Proc. SJCC, pp. 329-346 (1963).
- 3) I. E. Sutherland: Computer Graphics—Ten Unsolved Problems, Datamation, Vol. 12, No. 5, pp. 22-27 (May 1966).
- 4) IIT Research Institute: APT Part Programming, McGraw-Hill (1967).
- 5) C. Wylie, et al.: Half-Tone Drawings By

- Computer, Proc. FJCC, pp. 49-58 (1967).
- 6) G. A. Chapman, et al.: VISTA—Computed Motion Pictures For Space Research, Proc. FJCC, pp. 59-63 (1967).
 - 7) H. Freeman, et al.: An Algorithm for the Solution of the Two-Dimensional “Hidden-Line” Problem, IEEE Trans, Vol. EC-16, No. 6, pp. 784-790 (Dec. 1967).
 - 8) R. A. Weiss: BE VISION A Package of IBM 7090 Fortran Programs to Draw Orthographic Views of Combinations of Planes and Quadric Surface, J. of ACM, Vol. 13, No. 2, pp. 194-204 (1966).
 - 9) 穂坂, 他: 図形の発生, 記憶と処理について, 情報処理, Vol. 6, No. 3, pp. 129-138 (May 1965).
 - 10) 穂坂 衛: 自由形状曲面の理論と設計, 情報処理, Vol. 8, No. 2, pp. 65-72 (May 1967).
 - 11) Piere Bézier: Procédé De Définition Numérique Des Courbe et Surfaces Non Mathématiques, Automatisme-TOM XII, No. 5, pp. 189-196 (May 1968).
 - 12) S. H. Shasen, et al.: Experience in the Application of Interactive Graphics, Emerging Concepts in Computer Graphics 1967, University of Illinois Conference, W. A. Benjamin Inc. (1968).
 - 13) B. Herzog: Computer Graphics for Designers, Emerging Concepts in Computer Graphics 1967, University of Illinois Conference, W. A. Benjamin Inc. (1968).
 - 14) P. G. Comba: A Procedure for Detecting Intersections of Three-Dimensional Objects, J. of ACM, Vol. 15, No. 3, pp. 345-366 (July 1968).
 - 15) 萩原, 上内: 3次元 “Hidden-Line” 問題の基礎的考案, 信学会オートマトン・インフォメーション研究, A 68-47 (1969-1).
 - 16) 久保田 広: 光学, 岩波書店 (1964).
 - 17) 坂梨暢泰: 昭和43年度特別研究報告書.
 - 18) 上内秀隆: 昭和43年度修士論文.

〔付録〕 連立不等式の処理

(5.20), (5.28), (5.38), (5.42) は, それぞれ凸体である。したがって, (5.27), (5.31), (5.41), (5.45) の解集合は, Φ であるか, 要素がただ一つであるか, ただ一つの区間であるかのいずれかである。このため解集合は

$$\{s|0 < a \leq s \leq b\}$$

とかけることがわかる。

さて, (5.27), (5.41) の処理は簡単であるから, こ

こでは (5.31) の処理を考える。(5.45) は, 本質的に (5.31) と同形である。

さて, (5.31) より

$$\left. \begin{aligned} DF\left(s - \frac{E}{D}\right)\left(s - \frac{G}{F}\right) &\geq 0 \\ (F-D)F\left(s - \frac{G-E}{F-D}\right)\left(s - \frac{G}{F}\right) &\geq 0 \\ |J_i|F\left(s - \frac{G}{F}\right) &\geq 0 \\ |J_i|F\left(s - \frac{|J_i|+G}{F}\right) &\leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (A.1)$$

となる。ところが, これら4式のうち前2式は

$$\alpha(s-\beta)(s-\gamma) \geq 0 \quad (\beta \geq \gamma) \quad (A.2)$$

なる式で代表されると考えることができる。また, 後2式は

$$\alpha(s-\beta) \geq 0 \quad (A.3)$$

で代表されると考えることができる。

(A.1) の不等式が解けるためには, (A.2), (A.3) が解ければ, よく, その解をおのおの比較することによって, a, b を求めることができる。

コンピュータの内部では, $+\infty, -\infty$ なる数は, 扱えないけれど, 扱いうる最大の数で, その数と代理することにして, 実際の処理にあたるものと約束して, 記号 $+\infty, -\infty$ をそのまま用いることにする。

(A.2) を (A.1) の第 i 式 ($i=1, 2$) に合わせて解くとき, その解はつぎのようにする。

$$\left. \begin{aligned} \alpha > 0 \text{ のとき} & \left\{ \begin{array}{l} a_{-i} = -\infty, b_{-i} = \gamma \\ a_{+i} = \beta, b_{+i} = +\infty \end{array} \right\} \\ \alpha < 0 \text{ のとき} & \left\{ \begin{array}{l} a_{-i} = \gamma, b_{-i} = \beta \\ a_{+i} = \gamma, b_{+i} = \beta \end{array} \right\} \\ \alpha = 0 \text{ のとき} & \left\{ \begin{array}{l} a_{-i} = -\infty, b_{-i} = +\infty \\ a_{+i} = -\infty, b_{+i} = +\infty \end{array} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (A.4)$$

(A.3) を (A.1) の第 j 式 ($j=3, 4$) に合わせて解くと, その解は明らかに

$$\left. \begin{aligned} \alpha > 0 \text{ のとき} & a_j = \beta, b_j = +\infty \\ \alpha < 0 \text{ のとき} & a_j = -\infty, b_j = \beta \\ \alpha = 0 \text{ のとき} & a_j = -\infty, b_j = +\infty \end{aligned} \right\} \quad (A.5)$$

である。

解 (A.4) の組み合わせ方は四とおりある。すなわち, (A.1) の第 i 式の解は

$$\{x|a_{-i} \leq x \leq b_{-i}\} \cup \{x|a_{+i} \leq x \leq b_{+i}\}$$

と表わされるから, (A.1) の前2式の解としては

$$\left\{ \begin{aligned} & \{x|a_{-1} \leq x \leq b_{-1}\} \cap \{x|a_{-2} \leq x \leq b_{-2}\} \cup \\ & \{x|a_{-1} \leq x \leq b_{-1}\} \cap \{x|a_{+2} \leq x \leq b_{+2}\} \cup \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \{x|a_{+1} \leq x \leq b_{+1}\} \cap \{x|a_{-2} \leq x \leq b_{-2}\} \cup \\ \{x|a_{+1} \leq x \leq b_{+1}\} \cap \{x|a_{+2} \leq x \leq b_{+2}\} \end{array} \right\} \quad (\text{A.6})$$

と表わされる。このため、(A-1)の解集合 φ は

$$\varphi_i = \{x|c_i \leq x \leq d_i\}$$

とおくと

$$\varphi = \bigcup_{i=0}^{i=4} \varphi_i$$

と求められることになる。一つ例をあげると

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & \{x|a_{-1} \leq x \leq b_{-1}\} \cap \{x|a_{-2} \leq x \leq b_{-2}\} \\ & \cap \{x|a_3 \leq x \leq b_3\} \cap \{x|a_4 \leq x \leq b_4\} \end{aligned}$$

とすればよい。 $\varphi_2 \sim \varphi_4$ も(A.6)の第2~4項に対応

して、作ることができる。

ところが、最初に述べたように、 φ は、

$$\varphi = \{x|a \leq x \leq b\}$$

なる形にならなくてはならない。このため、 a, b は、 $c_i, d_i (i=1, 4)$ から、一意的に決められることが保障されている。このことから、 c_i, d_i の大小比較のみで、 a, b を求めることができる。このようにして求めた φ は、(5.1)で与えられている H_r となるので、visiblityの判定が可能であり、確定的に行なえることがわかった。

(昭和44年9月3日受付)