

図形処理における輪郭線について*

上内秀隆**

Abstract

It has become important to compute the out-line of three-dimensional objects by digital computers, while the field of computer graphics has played more and more important role in computer science.

In this paper, we give some simple definitions of the out-lines of three-dimensional objects, and then investigate their nature. Because it is difficult to compute the strict out-lines from the set of arbitrary surfaces, instead, we compute the approximate ones by using some nature of the neighborhood of the strict ones on the surfaces. Then we compute the approximate intersections of two arbitrary surfaces. Their approximate computation is not point-by-point, but line-by-line.

Finally we suggest that the form of elementary surfaces in the graphic system should be triangular, and arbitrary surfaces should be occasionally partitioned to many triangles in order to compute out-lines and intersections.

1. まえがき

最近、図形処理に関する研究が盛んになってきたが、I. E. Sutherland¹⁾が指摘した hidden-line 問題が話題によく出る。この問題は、輪郭線問題、相貫曲線問題、影の問題と不可分の関係にあることが指摘されていた。しかし、それらの問題にまで歩を進めたものは少ない^{2), 4)}。

著者も以前に、hidden-line 問題に関する基礎的な考察を行なった³⁾が、輪郭線を求めることは意外と困難であることに気付いた。

そこで本論文で、輪郭線の問題を単純化して、その定義を与え、その性質を調べる。そして、輪郭線の近傍を持つある性質を利用して、近似輪郭線を求める。この結果を応用して、近似的に相貫曲線を求める方法を与える。本論文で与える計算法は point-by-point のものではなく、line-by-line のものである。

2. 基本的な定義

ある曲面で囲まれている物体の輪郭線という概念は、直感的に自明の概念であると考え勝ちであるが、われわれは輪郭線の形式やその計算法をコンピュータ

に入れようとするのであるから、輪郭線の数学的表現形式を厳密に定義しておく必要性が生じる。しかし、直感的に知り得る輪郭線のすべての概念を完全に表現し切るのは非常に困難であるので、次のような見地を固定する。

- (1) 対象とする曲面の数学的表現は与えられている。
- (2) 直感的な概念と、著しくは異ならない輪郭線の概念を採用する。
- (3) 輪郭線の性質は、曲面と視線の性質できめる。

このような見地に立って、輪郭線の定義を行なう。さて、部分集合が曲面 S_1, S_2, \dots, S_n であるような点の集合を Σ とする。視点 P と点 $X \in \Sigma$ の間に視線 PX を考える。そして、

$$\Sigma^*(X) \equiv PX \cap \{\Sigma - \{X\} - \{P\}\}$$

なる $\Sigma^*(X)$ を用いて、次の定義を行なう。

(定義 1.) visibility

$\Sigma^*(X) \neq \emptyset$ のとき、点 X は Σ に関して invisible であるという。 $\Sigma^*(X) = \emptyset$ のとき、点 X は Σ に関して visible であるという。

(定義 2.) 可輪郭線

ある曲面 S 上の点 X が、曲面 S の可輪郭線の要素であることは、次の三つの条件のうち、少なくとも一つを満していることである。

* About the Out-Lines of Three-Dimensional Objects in Computer Graphic Information Processing, by Hidetaka Kamiuchi (Faculty of Engineering, Kyoto University)

** 京都大学工学部

(1) 点 X において, S の一次微分形式の接平面が存在していない。

(2) 点 X において, S の一次微分形式の接平面が存在して, かつ, 点 X を通る視線が, その接平面に含まれる。

(3) 点 X において, 曲面が交っている。

〔定義 3.〕 輪 郭 線

visible である可輪郭線の要素の集合を輪郭線という。

このような定義を行なうと, 議論する必要があるのは, 可輪郭線の条件の検討, すなわち, 一次微分形式の接平面の存在を知る方法および, それが視線を含む条件の検討と, visibility の判定法の定式化⁵⁾であることがわかる。本論文では, おもに前者について考察を進める。

3. 三次元空間内の曲面および視線の

表現形式

対象とする集合 Σ は, 有限個の部分集合 S_i ($i=1, 2, \dots, n$) の要素から成り立っている。このとき S_i の表現形式として, 次の二つの形式が考えられる。一つは三次元空間内の任意の曲面を, 三つの直接変数 x, y, z を用いて表現する直接変数表示法で, 曲面の性質は,

$$Q(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

で与えられ, 形状を示す条件式は

$$q_i(x, y, z) \leq 0 \quad i=1, 2, \dots, N \quad (2)$$

なる不等式系で与えられる。

もう一つは, 三次元空間内の任意の曲面を二つの間接変数 u, t を用いて表現する間接変数表示法で, 曲面の性質は, 三次元ベクトル $R=(x, y, z)$, $F(u, t)=(f_1(u, t), f_2(u, t), f_3(u, t))$ を用いて,

$$R=F(u, t) \quad (3)$$

で与えられ, 形状を示す条件式は

$$q_i(u, t) \leq 0 \quad i=1, 2, \dots, M \quad (4)$$

なる不等式系で与えられる。このときの形状は, 規格化して用いることが多く

$$0 \leq u, t \leq 1 \quad (5)$$

なる形が, 良く用いられる。このときの曲面を patch 曲面⁶⁾とよんで, 曲面の生成, 接続などを行なっている例がある。

視線は, 光路の表現形式で代用する。光路に沿っての線素を dS , 媒質の屈折率を $n(x, y, z)$ とすると, 光が点 X から視点 P に進むとき, 光は, フェ

ルマーの原理によれば

$$[XP] = \int_X^P n(x, y, z) dS \quad (6)$$

が極小値を取るよう進む。したがって視線は, 媒質の特性によって特徴づけられた空間曲線となる。均質, 等方の媒質中では, $n(x, y, z) = \text{const}$ となつて, 光路は直線となることはよく知られている。本論文では議論の簡単のため, 直線である視線を採用することにするが, それでも, 次のような三つの表現形式を持っている。

有限座標を持つ視点 P が与えられたとき, 視線は

$$R=(P-X)S_1+X \quad 0 \leq S_1 \leq 1 \quad (7)$$

か, または

$$R=(X-P)S_2+P \quad 0 \leq S_2 \leq 1 \quad (8)$$

で表わされる。これらは同一経路の異なった表現であるが, それらの間には

$$S_1+S_2=1 \quad (9)$$

なる関係がある。また, 視点が無限遠点にあって, 視線の方向余弦 A のみが与えられるときは, 視線は

$$R=AS+X \quad 0 \leq S \quad (10)$$

で表わされる。前者は一点透視図法における視線群をなすが, 後者は平行光線群となる。

4. 可輪郭線の条件についての検討

4.1 接平面の定義およびその性質

可輪郭線の定義を行なうときに用いた接平面という言葉は無定義であったので, ここで改めて接平面の概念について論じておく。

まず, 直接変数表示(1)式の曲面の接平面の表現について考えることにする。

曲面 Q 上の点 $X=(X_1, X_2, X_3)$ の近傍で, n 階の偏微分係数が存在して連続ならば, テーラー展開によって

$$\begin{aligned} Q(X_1+h_1, X_2+h_2, X_3+h_3) &= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m!} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial h_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial h_2} + h_3 \frac{\partial}{\partial h_3} \right)^m Q(X_1, X_2, X_3) \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial h_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial h_2} + h_3 \frac{\partial}{\partial h_3} \right)^n Q(X_1+\theta h_1, X_2+\theta h_2, X_3+\theta h_3) \\ &\quad 0 < \theta < 1 \end{aligned} \quad (11)$$

と表わされる。いま微小変数 h_1, h_2, h_3 に関して, 二次以上の微小量は無視し, 一次の微小量で点 X の近傍の曲面を近似するとき, この近似曲面を接平面と呼んで,

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial Q(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_i} h_i = 0 \quad (12)$$

なる表現で表わす。これが、曲面 Q の一次微分形式である。ところが

$$\frac{\partial Q(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_i} = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (13)$$

のとき、一次微分形式(12)式は意味を失なう。このとき、点 \mathbf{X} は特異点であるという。点 \mathbf{X} において、一次微分形式の接平面は存在しないが、二次の微小量まで考慮すると、接平面が存在することがある。すなわち

$$\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 Q(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_i \partial X_j} h_i h_j = 0 \quad (14)$$

なる形式で表現されて、1個または2個の接平面を持つことがある。2階の偏微分係数がすべて0になるときは、三次の微小量まで考えると接平面が存在することがある。このような特異点上の接平面は、一次微分形式の接平面とは区別する。本論文中では、特別な場合を除いて一次微分形式の接平面を単に接平面と呼ぶことにする。

さて、間接変数表示(3)式の曲面の接平面について考えよう。曲面 S 上の点 \mathbf{X} での接ベクトルの全体が、二次元ベクトル空間(平面)となるとき、この平面を、曲面 S 上の点 \mathbf{X} での接平面と呼ぶ。すなわち、すべての座標成分が変数 u, t に関して1階偏微分可能であって、かつ、座標成分のどれか二つ、たとえば、 x, y についての関数行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_1}{\partial t} & \frac{\partial f_2}{\partial t} \end{vmatrix} \quad (15)$$

が0でないことを、必要かつ十分条件とする。

接平面を、ベクトル表示すると

$$\mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{F}(u, t)}{\partial u} \eta + \frac{\partial \mathbf{F}(u, t)}{\partial t} \xi + \mathbf{F}(u, t) \quad (16)$$

と表わされる。これを直接変数表示に書き直すと、

$$\begin{vmatrix} f_1(u, t) - x & f_2(u, t) - y & f_3(u, t) - z \\ \frac{\partial f_1(u, t)}{\partial u} & \frac{\partial f_2(u, t)}{\partial u} & \frac{\partial f_3(u, t)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_1(u, t)}{\partial t} & \frac{\partial f_2(u, t)}{\partial t} & \frac{\partial f_3(u, t)}{\partial t} \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

と表現できる。(17)式からすぐわかるように、すべての関数行列式が0であれば、点 \mathbf{X} は特異点となる。このとき、接ベクトルの全体は点または一次元ベクトル

空間に縮退して接平面は存在しなくなる。接ベクトル全体から成る二次元ベクトル空間は、一次微分形式の接平面と呼ぶことができる。

4.2 条件(1)の検討

条件(1)の成立する4通りの場合が考えられる。

- (a) 境界線を共有する隣接する曲面が存在しないところ。
- (b) 境界線を共有する隣接する曲面が存在して、滑らかには接続していないところ。
- (c) 表記変数 x, y, z または u, t について、1階偏微分可能でないところ。
- (d) 特異点になるところ。

輪郭線を求めるわれわれの操作は、曲面の合成、接続などのあとに行なうものである。このため、(a)および(b)の条件を満たすかどうかは、あらかじめ知り得ると考えてもさしつかえない。また、一つのシステム内では、曲面の表現形式は幾通りか固定するものと考え、1階偏微分係数の形は既知と考えることができるから、この係数が発散する箇所は、あらかじめ知り得ると考えてもさしつかえない。また(d)の場合は、条件(2)の意味の特別な場合と見なすことができるので、特別に考慮を払う必要はない。したがって、条件(1)についての詳論は省略する。

〔例 1.〕 三角形の輪郭線 (Fig. 1)

間接変数表示の三角形は

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\omega t + \mathbf{B}t + \mathbf{C} \quad 0 \leq \omega, t \leq 1 \quad (18)$$

なる表現を持つ。可輪郭線は3辺であって、 $\mathbf{R}(\omega=1, 0 \leq t \leq 1)$, $\mathbf{R}(\omega=0, 0 \leq t \leq 1)$, $\mathbf{R}(t=1, 0 \leq \omega \leq 1)$ である。

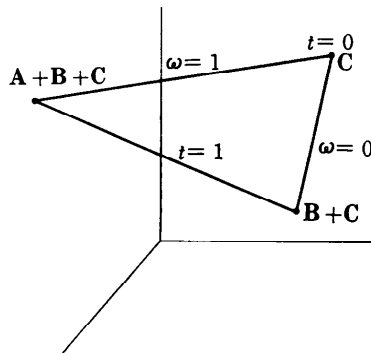


Fig. 1

〔例 2.〕 接平面の縮退 (Fig. 2)

間接変数表示のある曲面が

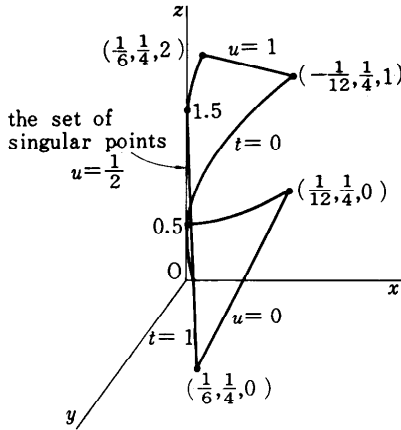


Fig. 2

$$\begin{cases} x = \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 \left(t - \frac{1}{3}\right) \\ y = \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 \\ z = u + t \quad 0 \leq u, t \leq 1 \end{cases} \quad (19)$$

で与えられたとき、1階偏微分係数は $u = \frac{1}{2}$ のとき、

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} \Big|_{u=\frac{1}{2}} = \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{u=\frac{1}{2}} = \frac{\partial y}{\partial u} \Big|_{u=\frac{1}{2}} = \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial t} = 1 \end{cases}$$

となって、接ベクトル空間は直線に縮退する。このとき、

$$u = 1/2 \quad 0 \leq t \leq 1$$

の線分は、条件(1)の意味での可輪郭線とみなされる。

4.3 条件(2)の検討—直接変数表示法—

曲面は(1)式で与えられる。曲面上の点 (X_1, X_2, X_3) を通る接平面の方程式は(12)式から

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_1}(x - x_1) + \frac{\partial Q(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_2}(y - X_2) \\ & + \frac{\partial Q(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_3}(z - X_3) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

となる。可輪郭線であるための条件は、視線が(20)式に含まれることであった。視線として(10)式を用いたとき、可輪郭線の方程式は、

$$\begin{cases} \Lambda_1 \frac{\partial Q}{\partial x} + \Lambda_2 \frac{\partial Q}{\partial y} + \Lambda_3 \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \\ Q(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (21)$$

となる。ただし、(2)式を付帯条件とする。視線として(7)式を採用したとき、可輪郭線の方程式は

$$\begin{cases} (P_1 - x) \frac{\partial Q}{\partial x} + (P_2 - y) \frac{\partial Q}{\partial y} + (P_3 - z) \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \\ Q(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (22)$$

となる。ただし、(2)式を付帯条件とする。

〔例 3.〕 二次曲面の可輪郭線

付帯条件のない直接変数表示の二次曲面

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) = & Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz \\ & + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

について、(21)式の第1式を求めると

$$A_1x + A_2y + A_3z + A_4 = 0 \quad (24)$$

となる。ただし、係数 A_i ($i=1, \dots, 4$) は

$$\begin{cases} A_1 = \frac{\partial Q(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)}{\partial \Lambda_1} - G \\ A_2 = \frac{\partial Q(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)}{\partial \Lambda_2} - H \\ A_3 = \frac{\partial Q(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)}{\partial \Lambda_3} - I \\ A_4 = G\Lambda_1 + H\Lambda_2 + I\Lambda_3 \end{cases} \quad (25)$$

である。また、(22)式の第1式を求めると、

$$\begin{aligned} A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + A_4xy + A_5xz + A_6yz \\ + A_7x + A_8y + A_9z + A_{10} = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

となる。ただし、係数 A_i ($i=1, 2, \dots, 10$) は

$$\begin{cases} A_1 = -2A, A_2 = -2B, A_3 = -2C \\ A_4 = -2D, A_5 = -2E, A_6 = -2F \\ A_7 = \frac{\partial Q(P_1, P_2, P_3)}{\partial P_1} - 2G \\ A_8 = \frac{\partial Q(P_1, P_2, P_3)}{\partial P_2} - 2H \\ A_9 = \frac{\partial Q(P_1, P_2, P_3)}{\partial P_3} - 2I \\ A_{10} = P_1G + P_2H + P_3I \end{cases} \quad (27)$$

となる。

4.4 条件(2)の検討—間接変数表示法—

曲面は(3)式で与えられる。曲面上の点 $(X_1, X_2, X_3) \in \mathbf{R}$ を通る接平面の方程式は、

$$\begin{cases} f_{i, u} = \frac{\partial f_i}{\partial u} \\ f_{i, t} = \frac{\partial f_i}{\partial t} \quad (i=1, 2, 3) \end{cases} \quad (28)$$

とにおいて、新しい間接変数 η, ξ を用いて、(16)式から

$$\begin{cases} x = f_{1, u}\eta + f_{1, t}\xi + f_1 \\ y = f_{2, u}\eta + f_{2, t}\xi + f_2 \\ z = f_{3, u}\eta + f_{3, t}\xi + f_3 \end{cases} \quad (29)$$

と表わされる。

視線として(10)式を用いたとき、次の連立方程式を調べればよい。

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\Lambda_1 & f_{1,u} & f_{1,t} \\ -\Lambda_2 & f_{2,u} & f_{2,t} \\ -\Lambda_3 & f_{3,u} & f_{3,t} \end{pmatrix} \quad (30)$$

とおいて、

$$\mathbf{J} \cdot \begin{pmatrix} S \\ \eta \\ \xi \end{pmatrix} + \mathbf{X} = 0 \quad (31)$$

なる連立方程式が得られる。視線として(7)式を用いるときは、(30)式のかわりに、

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -P_1 + f_1 & f_{1,u} & f_{1,t} \\ -P_2 + f_2 & f_{2,u} & f_{2,t} \\ -P_3 + f_3 & f_{3,u} & f_{3,t} \end{pmatrix} \quad (32)$$

を用いる。

このような \mathbf{J} の性質から、可輪郭線を求める条件が得られることを示そう。

〔定理 1.〕 間接表示の曲面 S について

$$|\mathbf{J}| = 0 \quad 0 \leq u, t \leq 1 \quad (33)$$

が成立する u, t の組が存在すれば、その u, t に対応する点の集合は可輪郭線となる。

〔証明〕 いま、 \mathbf{J} の行を入れ換えて

$$\mathbf{J}^* = \begin{pmatrix} J_{11} & & \mathbf{J}_i^* \\ J_{12} & & \\ J_{13} & J_{23} & J_{33} \end{pmatrix} \quad (34)$$

なる \mathbf{J}^* を作る。このとき、 \mathbf{J}_i^* は曲面 S の関数行列式となる。いま、すべての \mathbf{J}_i^* について、

$$|\mathbf{J}_i^*| = 0 \quad (35)$$

が、成立するならば、たしかに(33)式を満す。このときは接平面は存在せず、特異点となる。したがって、条件(1)の意味での可輪郭線となることがわかる。また、ある \mathbf{J}^* に対して、(35)式を満たさない \mathbf{J}_i^* が存在して、(33)式が成立するならば、接平面が存在して、しかも(32)式の解は、一意的にはきまらない。したがって、 S には、すべての実数値が許される。このことは、視線が接平面に埋め込まれていることを示しているから、条件(2)の意味での可輪郭線となることは明らかである。〔証明終り〕

さて、(30)式を用いたとき、(33)式は、

$$\begin{aligned} \Lambda_1 f_{3,u} f_{2,t} + \Lambda_2 f_{1,u} f_{3,t} + \Lambda_3 f_{2,u} f_{1,t} \\ - \Lambda_1 f_{2,u} f_{3,t} - \Lambda_2 f_{3,u} f_{1,t} \\ - \Lambda_3 f_{1,u} f_{2,t} = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

と書き換えられる。また、(32)式を用いたとき(33)式は

$$\begin{aligned} (p_1 - f_1) f_{3,u} f_{2,t} + (p_2 - f_2) f_{1,u} f_{3,t} \\ + (p_3 - f_3) f_{2,u} f_{1,t} - (p_1 - f_1) f_{2,u} f_{3,t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - (p_2 - f_2) f_{3,u} f_{1,t} - (p_3 - f_3) f_{1,u} f_{2,t} \\ = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

と書き換えられる。

〔例 4.〕 二次形式曲面の可輪郭線

二次形式の曲面は

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}(u, t) = \mathbf{A}u^2 + \mathbf{B}t^2 + \mathbf{C}ut + \mathbf{D}u + \mathbf{E}t + \mathbf{F} \quad (38)$$

と表わされる。このとき(36)式を作ると

$$K_1 u^2 + K_2 t^2 + K_3 ut + K_4 u + K_5 t + K_6 = 0 \quad (39)$$

となる。ただし、係数 $K_i (i=1, 2, \dots, 6)$ は

$$\left\{ \begin{aligned} K_1 = 2 & \begin{vmatrix} A_1 & A_1 & C_1 \\ A_2 & A_2 & C_2 \\ A_3 & A_3 & C_3 \end{vmatrix}, & K_2 = 2 & \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \\ K_3 = -4 & \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & A_1 \\ A_2 & B_2 & A_2 \\ A_3 & B_3 & A_3 \end{vmatrix} \\ K_4 = 2 & \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 & E_1 \\ C_2 & A_2 & E_2 \\ C_3 & A_3 & E_3 \end{vmatrix} \\ K_5 = 2 & \begin{vmatrix} A_1 & A_1 & E_1 \\ A_2 & A_2 & E_2 \\ A_3 & A_3 & E_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix} \\ K_6 = & \begin{vmatrix} D_1 & A_1 & E_1 \\ D_2 & A_2 & E_2 \\ D_3 & A_3 & E_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \right. \quad (40)$$

となる。また、(37)式を作ると

$$\begin{aligned} K_1 u^3 + K_2 t^3 + K_3 u^2 t + K_4 u t^2 + K_5 u^2 + K_6 t^2 \\ + K_7 u t + K_8 u + K_9 t + K_{10} = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

となる。ただし、係数 $K_i (i=1, 2, \dots, 10)$ は

$$\left\{ \begin{aligned} K_1 = & \begin{vmatrix} A_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix}, & K_2 = - & \begin{vmatrix} B_1 & C_1 & E_1 \\ B_2 & C_2 & E_2 \\ B_3 & C_3 & E_3 \end{vmatrix} \\ K_3 = 2 & \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 & C_1 & E_1 \\ A_2 & C_2 & E_2 \\ A_3 & C_3 & E_3 \end{vmatrix} \\ K_4 = 2 & \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & E_1 \\ A_2 & B_2 & E_2 \\ A_3 & B_3 & E_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} B_1 & C_1 & D_1 \\ B_2 & C_2 & D_2 \\ B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix} \\ K_5 = 2 & \begin{vmatrix} A_1 & C_1 & F_1 - P_1 \\ A_2 & C_2 & F_2 - P_2 \\ A_3 & C_3 & F_3 - P_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A_1 & D_1 & E_1 \\ A_2 & D_2 & E_2 \\ A_3 & D_3 & E_3 \end{vmatrix} \\ K_6 = -2 & \begin{vmatrix} B_1 & C_1 & F_1 - P_1 \\ B_2 & C_2 & F_2 - P_2 \\ B_3 & C_3 & F_3 - P_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} B_1 & D_1 & E_1 \\ B_2 & D_2 & E_2 \\ B_3 & D_3 & E_3 \end{vmatrix} \\ K_7 = 4 & \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & F_1 - P_1 \\ A_2 & B_2 & F_2 - P_2 \\ A_3 & B_3 & F_3 - P_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} C_1 & D_1 & E_1 \\ C_2 & D_2 & E_2 \\ C_3 & D_3 & E_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \right. \quad (42)$$

$$\begin{array}{l}
 K_8 = 2 \begin{array}{|l} A_1 E_1 F_1 - P_1 \\ A_2 E_2 F_2 - P_2 \\ A_3 E_3 F_3 - P_3 \end{array} - \begin{array}{|l} C_1 D_1 F_1 - P_1 \\ C_2 D_2 F_2 - P_2 \\ C_3 D_3 F_3 - P_3 \end{array} \\
 K_9 = -2 \begin{array}{|l} B_1 D_1 F_1 - P_1 \\ B_2 D_2 F_2 - P_2 \\ B_3 D_3 F_3 - P_3 \end{array} + \begin{array}{|l} C_1 E_1 F_1 - P_1 \\ C_2 E_2 F_2 - P_2 \\ C_3 E_3 F_3 - P_3 \end{array} \\
 K_{10} = - \begin{array}{|l} E_1 D_1 F_1 - P_1 \\ E_2 D_2 F_2 - P_2 \\ E_3 D_3 F_3 - P_3 \end{array}
 \end{array}$$

となる。

4.5 条件(3)の検討—相貫曲線—

点 X において、自分自身が交っている場合と、2個以上の曲面が交っている場合とがある。2個以上の曲面が交っているとき、そこは、曲面 S の境界線であるか、または相貫曲線である。おのおのの曲面が(1)式または(3)式で与えられるとき、その相貫曲線を求めることは、おのおのの曲面の性質を表わす方程式を連立させて解くことに等しい。しかし、それを常に解くのは、きわめて困難である。曲面 S の境界線となる場合は、条件(1)の検討でまに合わせる。曲面 S が自分自分で、空間的に交っているとき、直接変数表示法が採用されていれば、それは特異点の集合として現出する。間接変数表示法を採用している場合は、一階偏微係数が存在して特異点とならず、接平面が存在することがある。この場合を自己相貫曲線を形成すると呼ぶが、あらかじめ、その存在を知るのは困難である。われわれは以降では、2個以上の曲面が相貫している場合の近似的相貫曲線を求めることに主眼をおくので、自己相貫曲線等の存在は特に取り上げることはしない。間接変数表示で、自己相貫曲線として現われる部分が、直接変数表示法では特異点として現われる。これの実例を例5で述べよう。

【例5.】自己相貫曲線の例 (Fig. 3)

間接変数表示の曲面

$$\begin{cases} x = 2 \sin 2\pi t \\ y = 4 \cos^3 2\pi t - \cos 2\pi t \\ z = u \quad 0 \leq u, t \leq 1 \end{cases} \quad (43)$$

が与えられる場合

- (1) $t = 1/12, 0 \leq u \leq 1$ のとき, $z = 1$
 $y = 0, 0 \leq z \leq 1, \partial x / \partial t = 2\sqrt{3} \pi, \partial y / \partial t = -8\pi$
- (2) $t = 5/12, 0 \leq u \leq 1$ のとき, $x = 1$
 $y = 0, 0 \leq z \leq 1, \partial x / \partial t = -2\sqrt{3} \pi, \partial y / \partial t = -8\pi$
- (3) $t = 7/12, 0 \leq u \leq 1$ のとき, $x = -1$
 $y = 0, 0 \leq z \leq 1, \partial x / \partial t = -2\sqrt{3} \pi, \partial y / \partial t = 8\pi$

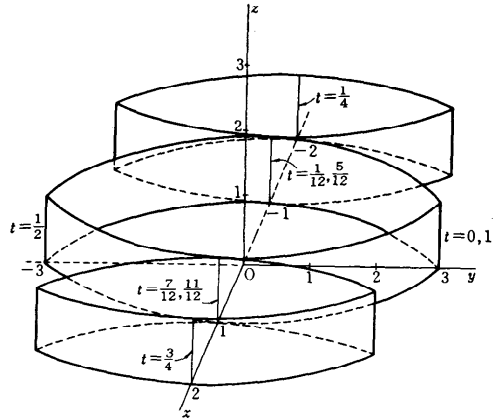


Fig. 3

$$(4) \quad t = 11/12, 0 \leq u \leq 1 \text{ のとき, } x = -1, \\
 y = 0, 0 \leq z \leq 1, \partial x / \partial t = 2\sqrt{3} \pi, \partial y / \partial t = 8\pi$$

であり、どの場合にも共通に

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 0, \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \frac{\partial y}{\partial u} = 0, \frac{\partial z}{\partial u} = 1$$

である。これらのことから

$$x = \pm 1, y = 0, 0 \leq z \leq 1 \quad (44)$$

なる直線は、自己相貫曲線となる。ところが、(43)式を、直接変数表示に書き改めると

$$\begin{cases} Q(x, y, z) = 16y^2 + (x^2 - 1)^2(x^2 - 4) = 0 \\ -2 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 1 \end{cases} \quad (45)$$

と表わされる。ところで、(44)式なる直線上では

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \quad (46)$$

となって、これらの直線は特異点の集合となる。この場合は、自己相貫曲線とは見なされず、条件(1)の意味での可輪郭線となる。

5. 近似可輪郭線

5.1 曲面の三角形近似

点 X_1, X_2, X_3 を頂点とする三角形の間接変数表示の一般形の一つは

$$R = A\omega + Bt + C \quad 0 \leq \omega, t \leq 1 \quad (47)$$

で与えられる。ただし

$$A = X_1 - X_2, B = X_2 - X_3, C = X_3 \quad (48)$$

とする。このような三角形を用いて、任意の間接変数表示(3)式の曲面 $A(u, t)$ を近似するのは容易であり、近似曲面を構成する三角形 $S_{i*}(\omega, t)$ ($i = 1, 2$) の各頂点を

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta\left(\frac{k}{N}, \frac{r}{M}\right) &= {}^1S_{kr}(1, 1) = {}^1X_1^{kr} \\ \Delta\left(\frac{k+1}{N}, \frac{r}{M}\right) &= {}^1S_{kr}(0, 1) = {}^1X_2^{kr} \\ \Delta\left(\frac{k}{N}, \frac{r+1}{M}\right) &= {}^1S_{kr}(\alpha, 0) = {}^1X_2^{kr} \\ \Delta\left(\frac{k+1}{N}, \frac{r}{M}\right) &= {}^2S_{kr}(\alpha, 0) = {}^2X_3^{kr} = {}^1X_2^{kr} \\ \Delta\left(\frac{k}{N}, \frac{r+1}{M}\right) &= {}^2S_{kr}(0, 1) = {}^2X_2^{kr} = {}^1X_3^{kr} \\ \Delta\left(\frac{k+1}{N}, \frac{r+1}{M}\right) &= {}^2S_{kr}(1, 1) = {}^2X_1^{kr} \end{aligned} \right. \quad (49)$$

ときめることができる。ただし、 k, r は $0 \leq k \leq N-1, 0 \leq r \leq M-1$ なる整数である。

5.2 近似可輪郭線

例4, 例5のような割合簡単な例においてさえ、条件(2)の意味での可輪郭線を、具体的に求めるにはかなり複雑な計算を必要とし、その取り扱いもかなり面倒である。そこで、可輪郭線の近傍の性質を用いて、近似的に可輪郭線を計算する方法を工夫してみる。

さて、曲面 S 上の条件(2)の意味での可輪郭線上の点 X 、点 X における一次微分形式の接平面 ΔS 、視点 P を考える。 ΔS の表現が

$$dS(x, y, z) = 0 \quad (51)$$

であれば

$$dS(X_1, X_2, X_3) = dS(P_1, P_2, P_3) = 0 \quad (52)$$

が成立しているはずである。この平面 ΔS は、曲面 S の存在する空間を完全に2分する。そして、曲面 S 上の点 X の任意の近傍から、可輪郭線に関し、曲面 S 上で互に反対側にある2点 Y_1, Y_2 を取り出すと

$$\left\{ \begin{aligned} dS(Y_{11}, Y_{12}, Y_{13}) \cdot dS(Y_{21}, Y_{22}, Y_{23}) &> 0 \\ dS(Y_{11}, Y_{12}, Y_{13}) \cdot dS(Y_{21}, Y_{22}, Y_{23}) &= 0 \\ dS(Y_{11}, Y_{12}, Y_{13}) \cdot dS(Y_{21}, Y_{22}, Y_{23}) &< 0 \end{aligned} \right. \quad (53)$$

のうち、少なくとも一つを満しているはずである。第1式は、条件(2)の意味での可輪郭線であるための十分条件となっている。第2式の場合、点 X の近傍で曲面 S と接平面 ΔS とが一致していることになる。近傍で、このような性質を持っている可輪郭線を認めれば、第2式も十分条件となっていると見なすことができる。第3式が成立する場合は、この式が与えられたからといって、一次微形式の接平面の存在は何ら保障されないので、十分条件とはなり得ない。そこで、このような性質を持つ可輪郭線の存在は無視することにして、可輪郭線を近似的に微小線分ごとに (line-by-

line) 求めることを考える。

曲面 S 上に任意の微小線分 $\overline{X_1 X_2}$ を取り、その線分と視点 P を通る平面 ΔS を考えれば一意的に定まる。この平面 ΔS は、曲面 S の存在する空間を完全に2分しているから、曲面 S 上に互に近傍にあり、かつ線分 $\overline{X_1 X_2}$ の近傍にあって、線分 $\overline{X_1 X_2}$ に関し、互に反対側にあるような2点 X_3, X_4 を取る。このとき接平面 ΔS が

$$dS(x, y, z) = 0 \quad (54)$$

とあらわされているならば、

$$\left\{ \begin{aligned} dS(X_{41}, X_{42}, X_{43}) \cdot dS(X_{31}, X_{32}, X_{33}) &> 0 \\ dS(X_{41}, X_{42}, X_{43}) \cdot dS(X_{31}, X_{32}, X_{33}) &= 0 \\ dS(X_{41}, X_{42}, X_{43}) \cdot dS(X_{31}, X_{32}, X_{33}) &< 0 \end{aligned} \right. \quad (55)$$

のうち、少なくともいずれか一つが成立している。ところが前述によれば、(55)式の第1, 第2式は、可輪郭線であるための十分条件であると考えてもよいことがわかっているから、第1, 第2式のうちのいずれかが成立しているかどうかで、線分 $\overline{X_1 X_2}$ が可輪郭線であるかどうかを判別することができる。

さて、任意の曲面が与えられて、5.1節で述べたような三角形近似がすでになされているものとする。このとき一辺を共有する二つの三角形 $\triangle X_1 X_2 X_3, \triangle X_1 X_2 X_4$ を考える。辺 $\overline{X_1 X_2}$ を通り視線(10)式を含む平面の方程式は

$$R = A_s + (X_1 - X_2)\eta + X_2 - \infty < s, \eta < +\infty \quad (56)$$

とあらわされる。視線(7)式を含むとすれば、

$$R = (P - X_1)s + (X_1 - X_2)\eta + X_2 - \infty < s, \eta < +\infty \quad (57)$$

とあらわされる。(56), (57)式は、同形であるから、以後の議論では(56)式をもっぱら使用する。

さて、(56)式を、直接変数表示に書き直すと、

$$Q(x, y, z) = Ax + By + Cz + D = 0 \quad (58)$$

となる。ただし、各係数は、

$$\left\{ \begin{aligned} A &= A_2(X_{13} - X_{23}) - A_3(X_{12} - X_{22}) \\ B &= A_3(X_{11} - X_{21}) - A_1(X_{13} - X_{23}) \\ C &= A_1(X_{12} - X_{22}) - A_2(X_{11} - X_{21}) \\ D &= A_1(X_{22}X_{13} - X_{23}X_{12}) + A_2(X_{11}X_{23} - X_{13}X_{21}) \\ &\quad + A_3(X_{12}X_{21} - X_{11}X_{22}) \end{aligned} \right. \quad (59)$$

である。

(58)式で用いた $Q(x, y, z)$ は、(55)式で用いた $dS(x, y, z)$ に対応する。すなわち、次のような判

定基準を作ることができる。

(定理 2.)

線分 $\overline{X_1 X_2}$ を共有する二つの三角形 $\triangle X_1 X_2 X_3$, $\triangle X_1 X_2 X_4$ が与えられたとき,

$$Q(X_{31}, X_{32}, X_{33}) \cdot Q(X_{41}, X_{42}, X_{43}) \geq 0$$

が成立するならば, 線分 $\overline{X_1 X_2}$ は近似可輪郭線である。(証明) 自明。(証明終り)

このような判定法は, 微小線分ごと (line-by-line) の判定法である。

5.3 近似相貫曲線 (Fig. 4)

間接変数表示の曲面を 5.1 節で述べた, 三角形近似を行なって, 近似的に相貫曲線を求める方法を考えてみる。

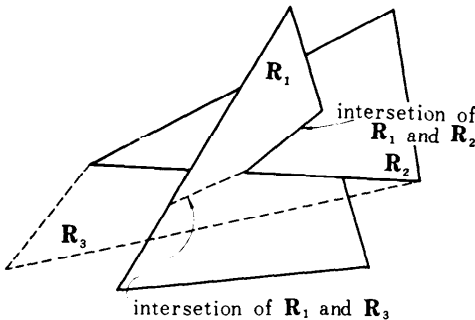


Fig. 4

二つの曲面 S_1, S_2 , 内の任意の近似三角形をそれぞれ

$$R_1 = A_1 \omega t + B_1 t + C_1 \quad 0 \leq \omega, t \leq 1 \quad (60)$$

$$R_2 = A_2 \omega' t' + B_2 t' + C_2 \quad 0 \leq \omega', t' \leq 1 \quad (61)$$

とあらわす。これら二つの三角形の間で, 相貫曲線を求めることで, 三角形近似の任意の二つの曲面の近似相貫曲線を求めることにする。

さて, この二つの三角形 R_1, R_2 は, 少なくとも同一平面上にはないものとする (付録参照)。さて,

$$R_1 = R_2 \quad 0 \leq \omega, t, \omega', t' \leq 1 \quad (62)$$

を満す相貫曲線 (直線) を求める目的で, 計算の簡単化と形式化を考慮して, 補助変数 $\rho_i (i=1, 2)$ と補助ベクトル $A_i (i=1, 2)$ とを導入する。このとき

$$A_{1S_1} + A_1 \omega t + B_1 t = A_2 \omega' t' + B_2 t' + C_2 - C_1 \quad (63)$$

$$A_{2S_2} + A_2 \omega' t' + B_2 t' = A_1 \omega t + B_1 t + C_1 - C_2 \quad (64)$$

において, それぞれの式の行列

$$J_i = \begin{pmatrix} A_{i1} & A_{i2} & B_{i1} \\ A_{i2} & A_{i2} & B_{i2} \\ A_{i3} & A_{i3} & B_{i3} \end{pmatrix} \quad (i=1, 2) \quad (65)$$

の行列式が $|J_i| \neq 0 (i=1, 2)$ であるような A_i を選ぶことが常にできる。(63), (64)式は, それぞれ S_i について一意的に解けて

$$S_1 = -\frac{1}{|J_1|} \left\{ D_1(A_2) \omega' t' + D_1(B_2) t' + D_1(C_2 - C_1) \right\} \quad (66)$$

$$S_2 = -\frac{1}{|J_2|} \left\{ D_2(A_1) \omega t + D_2(B_1) t + D_2(C_1 - C_2) \right\} \quad (67)$$

となる。ただし

$$D_i(V) = \begin{vmatrix} V_1 & A_{i1} & B_{i1} \\ V_2 & A_{i2} & B_{i2} \\ V_3 & A_{i3} & B_{i3} \end{vmatrix} \quad (i=1, 2) \quad (68)$$

である。

(66)式の S_1 , (67)式の S_2 が同時に 0 となるときの R_1 上の (ω, t) に対応する点の集合と, R_2 上の (ω', t') に対応する点の集合との共通集合が二つの三角形の相貫曲線となる。すなわち, 導入した補助変数, 補助ベクトルに関係なく, ω', t' 間では

$$D_1(A_2) \omega' t' + D_1(B_2) t' + D_1(C_2 - C_1) = 0 \quad (69)$$

ω, t 間では

$$D_2(A_1) \omega t + D_2(B_1) t + D_2(C_1 - C_2) = 0 \quad (70)$$

が, 同時に成立することが, 必要十分なる条件となる。

ただし

$$D_1(A_2) \neq 0, D_2(A_1) \neq 0 \quad (71)$$

なるように, 三角形の頂点の順序 (すなわち, 三角形の方程式の係数) を選んであるものとする。もし(71)式が成立しないときは, 三角形の頂点の順序を入れ換えて, 三角形の方程式の係数を変える。たとえば, (48)式で, 順序を入れ換えればよいから, $D_1(A_2) = 0$ のとき, 新しく, 係数を

$$A_2' = A_2 + B_2, B_2' = -B_2, C_2' = B_2 + C_2 \quad (72)$$

とすればよく, $D_2(A_1) = 0$ のときは,

$$A_1' = A_1 + B_1, B_1' = -B_1, C_1' = B_1 + C_1 \quad (73)$$

と書き換えれば, それぞれ,

$$D_1(A_2') \neq 0, D_2(A_1') \neq 0$$

が, 必ず保障される。

それぞれの三角形上の相貫曲線は直線となって, それぞれ

$$R_{10}(t') = \left(B_2 - \frac{K_{12}}{K_{11}} A_2 \right) t' + C_2 - \frac{K_{13}}{K_{11}} A_2 \quad (74)$$

$$R_{20}(t) = \left(B_1 - \frac{K_{22}}{K_{21}} A_1 \right) t + C_1 - \frac{K_{23}}{K_{21}} A_1 \quad (75)$$

とあらわされる。ただし

$$K_{11} = D_1(A_2), \quad K_{12} = D_1(B_2), \quad K_{13} = D_1(C_2 - C_1)$$

$$K_{21} = D_2(A_1), \quad K_{22} = D_2(B_1), \quad K_{23} = D_2(C_1 - C_2)$$

である。ところで、変数 ω, t, ω', t' 間には

$$0 \leq \omega, t, \omega', t' \leq 1$$

なる制限があったから、それらを t, t' についての不等式条件に書き換えると、それぞれ

$$\begin{cases} K_{11}(K_{11} + K_{12})t'^2 + K_{11}K_{13}t' \geq 0 \\ -K_{11}K_{12}t'^2 - K_{11}K_{13}t' \geq 0 \\ 0 \leq t' \leq 1 \end{cases} \quad (76)$$

$$\begin{cases} K_{21}(K_{21} + K_{22})t^2 + K_{21}K_{23}t \geq 0 \\ -K_{21}K_{22}t^2 - K_{21}K_{23}t \geq 0 \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (77)$$

となる。

さて、(74)式、(75)式で表わされた直線は、同一直線の異なる表現であるはずである。すなわち、(76)式、(77)式の制限内で許される領域が、相貫曲線(直線)となるはずである。その領域を求めてみよう。

(76)、(77)式に解があって、それぞれ

$$0 \leq \alpha \leq t' \leq \beta \leq 1 \quad (78)$$

$$0 \leq \gamma \leq t \leq \delta \leq 1 \quad (79)$$

と解かれたものとする。もし、このような解が存在しなければ、相貫曲線(直線)は存在しないことになる。

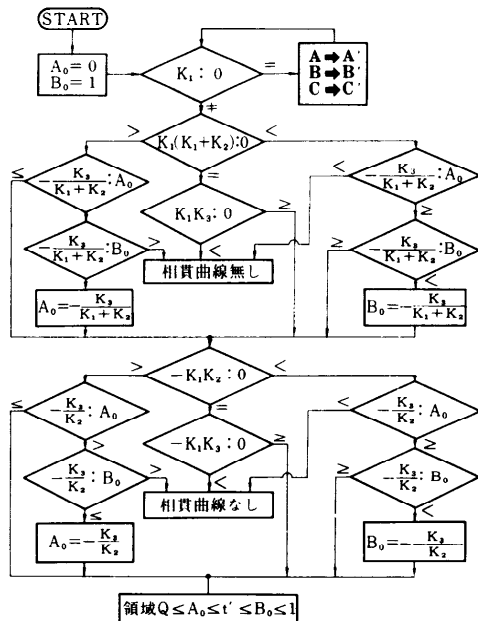


Fig. 5

この解の求め方をフロー・チャートにして、Fig. 5に示す。(76)、(77)式は、このアルゴリズムで完全に解ける。

(74)、(78)両式で表わされる直線の両端 ($t' = \alpha, \beta$ に対応する点)は、(75)式の直線上にも、その対応する点を持っているはずである。そのときの対応する t の値を知れば、必要な直線部分が判明する。そこで、(75)式を t についてまとめて

$$R_{20}(t) - X = Yt \quad (80)$$

ただし

$$X = C_1 - \frac{K_{23}}{K_{21}} A_1, \quad Y = B_1 - \frac{K_{22}}{K_{21}} A_1$$

とおく。そこで

$$\begin{cases} R_{10}(\alpha) - X \equiv Z_1 = Yt_1 \\ R_{10}(\beta) - X \equiv Z_2 = Yt_2 \end{cases} \quad (81)$$

とおいて、 α, β に対応する t_1, t_2 を求める。

実際の数値計算過程で、丸めの誤差などの計算誤差が生じて、点 $R_{10}(\alpha), R_{10}(\beta)$ が必ずしも完全に、(75)式の直線に乗らないことが十分に予想されるので、次のような評価関数 $\varphi_i (i=1, 2)$

$$\varphi_i = (t_i Y_1 - Z_{i1})^2 + (t_i Y_2 - Z_{i2})^2 + (t_i Y_3 - Z_{i3})^2 \quad (82)$$

を最小にするように t_i をきめると、

$$t_i = \frac{Z_{i1}Y_1 + Z_{i2}Y_2 + Z_{i3}Y_3}{Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2} \quad (i=1, 2) \quad (83)$$

と求めることができる。

ここで、(79)式からきまる領域 (γ, δ) と、いま求めた領域 (t_1, t_2) の共通領域を求める。もし $t_1 \leq t_2$

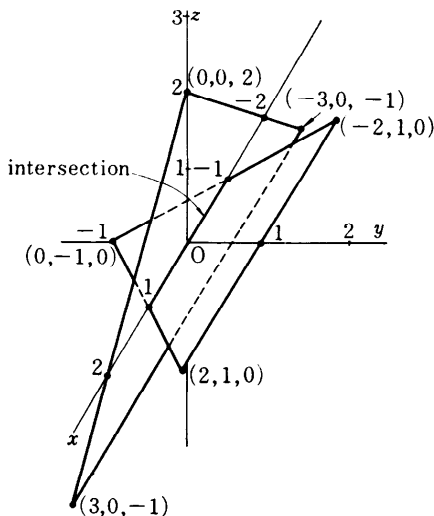


Fig. 6

Table 1

	条 件	領 域
1	$\gamma \geq t_2$	なし
2	$\gamma \leq t_2 \leq \delta, t_1 \leq \gamma$	(γ, t_2)
3	$\gamma \leq t_2 \leq \delta, t_1 > \gamma$	(t_1, t_2)
4	$t_2 > \delta, t_1 \leq \gamma$	(γ, δ)
5	$t_2 > \delta, \gamma \leq t_1 \leq \delta$	(t_1, δ)
6	$\delta < t_1$	なし

であれば、その共通領域は Table 1 によって求められる。 $t_1 > t_2$ のときは、 t_1 と t_2 を入れ換えて、Table 1 を見ればよい。

〔例 6.〕 近似相貫曲線 (Fig. 6)

二つの三角形の頂点が、それぞれ

$$\mathbf{X}_{11} = (0, 0, 2), \mathbf{X}_{12} = (3, 0, -1), \mathbf{X}_{13} = (-3, 0, -1)$$

$$\mathbf{X}_{21} = (-2, 1, 0), \mathbf{X}_{22} = (2, 1, 0), \mathbf{X}_{23} = (0, -1, 0)$$

とすると、三角形の方程式は、それぞれ

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \omega t + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad 0 \leq \omega, t \leq 1$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \omega' t' + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} t' + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 0 \leq \omega', t' \leq 1$$

となる。そこで

$$D_1(\mathbf{V}) = \begin{vmatrix} V_1 & -3 & 6 \\ V_2 & 0 & 0 \\ V_3 & -3 & 0 \end{vmatrix}, D_2(\mathbf{V}) = \begin{vmatrix} V_1 & -4 & 2 \\ V_2 & 0 & 2 \\ V_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

となるので

$$D_2(\mathbf{A}_1) = -24, D_2(\mathbf{B}_1) = 0, D_2(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2) = 8,$$

$$\frac{K_{22}}{K_{21}} = 0, \frac{K_{23}}{K_{21}} = -\frac{1}{3}$$

となる。よって直線は

$$\mathbf{R}_{20}(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。 t の領域は、 $\gamma=1/3, \delta=1$ で与えられる。

さて、 $D_1(\mathbf{A}_2) = 0$ であるから、(72)式を用いて係数を書き換えて

$$\mathbf{A}_2' = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_2' = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C}_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする。このとき

$$D_1(\mathbf{A}_2') = -36, D_1(\mathbf{B}_2') = 36,$$

$$D_1(\mathbf{C}_2' - \mathbf{C}_1) = -18$$

$$\frac{K_{12}}{K_{11}} = 1, \frac{K_{13}}{K_{11}} = \frac{1}{2}$$

となる。よって直線は

$$\mathbf{R}_{10}(t') = - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t' + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。 t' の領域は、 $\alpha=1/2, \beta=1$ となる。

いま

$$\mathbf{R}_{10}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{R}_{10}(1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから、(83)式から、 $t_i (i=1, 2)$ を求めると、 $t_1=5/6, t_2=1/2$ となる。Table 1 を参照して共通領域を求めると $(1/2, 5/6)$ となる。すなわち、

$$\mathbf{R}_{20}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{R}_{20}\left(\frac{5}{6}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となって、点 $(1, 0, 0)$ と点 $(-1, 0, 0)$ とを結ぶ直線が相貫曲線となる。

6. おわりに

本論文では、近似可輪郭線と近似相貫曲線の具体的な求め方を与えた。いずれも三角形近似をその骨格としているので、図形処理システムの曲面のデータ形式としては、容易に三角形近似できるものが望ましいという一つの要請を与えることになる。このような近似法では、計算に要する時間が大きな問題となる。これは絵の regeneration time (modification time) の大きな要素となるので、あらかじめ曲面の複雑さと、処理時間の関係を調べることが要請されるが、本論では触れなかった。対象が N/C マシンである図形処理システムでは、許容誤差 (tolerance) と、曲面の近似誤差の関係を明白に把握する必要があるが、本論では触れなかった。

また、図形処理において、影の部分の計算することが要請されることがあるが、光源を第1視点、通常視点を第2視点と考えれば、原理的には輪郭線の計算と hidden-line の計算とを組み合わせて、影の部分の計算することができる。このことに関しては、機会を改めて論ずるつもりである。

なお、図形処理法は、システム中の図形データの構造に大きく依存する。図形処理法をまず考えて、図形データの構造を設計する方法と、図形データの構造の要請を満す図形処理法を考える方法の二つのアプローチの仕方があるが、そのどちらに対しても本論において議論した問題は、有益な一指針を与えるものであると考えている。

なお、本論文の原稿に目を通して、適切な助言をしてもらったことに対し、房岡璋氏、柏岡誠治氏に感謝の意を表します。また、査読者の適切な助言があったことも、あわせて感謝いたします。

〔付録〕 二つの平面の同定法

(60), (61)式が、同一平面上にあるかどうかを調べる。それぞれの三角形は、それぞれ、

$$Q_1 = A_1\omega + B_1t + C_1 \quad -\infty < \omega, t < \infty \quad (A-1)$$

$$Q_2 = A_2\omega' + B_2t' + C_2 \quad -\infty < \omega', t' < \infty \quad (A-2)$$

なる平面上に存在することは、自明である。(A-1), (A-2) を直接変数表示に書きなおすと

$$D_i x + E_i y + F_i z + G_i = 0 \quad (i=1, 2) \quad (A-3)$$

と書き換えられる。ただし、係数は、それぞれ

$$\left\{ \begin{array}{l} D_i = \begin{vmatrix} A_{i2} & B_{i2} \\ A_{i3} & B_{i3} \end{vmatrix}, \quad E_i = - \begin{vmatrix} A_{i1} & B_{i1} \\ A_{i3} & B_{i3} \end{vmatrix}, \\ F_i = \begin{vmatrix} A_{i1} & B_{i1} \\ A_{i2} & B_{i2} \end{vmatrix}, \\ G_i = -C_{i1}D_i + C_{i2}E_i - C_{i3}F_i = - \begin{vmatrix} A_{i1} & B_{i1} & C_{i1} \\ A_{i2} & B_{i2} & C_{i2} \\ A_{i3} & B_{i3} & C_{i3} \end{vmatrix} \end{array} \right. \quad (A-4)$$

となる。ただし、 $i=1, 2$ である。

ここで

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_i = D_i^2 + E_i^2 + F_i^2 \quad i=1, 2 \\ \varphi_3 = \begin{vmatrix} D_1 & E_1 \\ D_2 & E_2 \end{vmatrix}, \quad \varphi_4 = \begin{vmatrix} E_1 & F_1 \\ E_2 & F_2 \end{vmatrix}, \quad \varphi_5 = \begin{vmatrix} F_1 & G_1 \\ F_2 & G_2 \end{vmatrix} \end{array} \right. \quad (A-5)$$

なる関数を作って、二つの平面が同一平面であるかどうかを調べる。

$\varphi_i \neq 0 (i=1, 2)$ であることは、(A-1), (A-2) が平面であるための必要十分条件である。

いま、ベクトル $\varphi = (\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5)$ を考えたとき、 $\varphi = (0, 0, 0)$ が、(A-1), (A-2) が同一平面であるための必要十分条件となる。したがって、次のように判定すればよい。

(1) $\varphi_i = 0 (i=1, 2)$ のとき、調べるべき平面はなかった。 $\varphi_i \neq 0$ のとき(2)へ行く。

(2) $\varphi = (0, 0, 0)$ のとき、二つの平面は同一平面であった。 $\varphi \neq (0, 0, 0)$ のとき、二つの平面は同一平面ではなかった。

〔例〕 例6で示した二つの三角形について、以上の判定を適用してみる。

$$D_1=0, E_1=18, F_1=0, G_1=0, \varphi_1=284$$

$$D_2=0, E_2=0, F_2=-8, G_2=0, \varphi_2=64$$

$$\varphi_3=0, \varphi_4=-144, \varphi_5=0$$

よって、 $\varphi_i \neq 0 (i=1, 2)$ および $\varphi \neq (0, 0, 0)$ を満しているので、二つの平面は同一平面ではない。

参考文献

- 1) I. E. Sutherland; Computer Graphics—Ten Unsolved Problems, Datamation, Vol. 12, No. 5, pp.22~27 May (1966).
- 2) H. Freeman et al; An Algorithm for The Solution of The Two-Dimensional "Hidden-Line" Problem, IEEE trans. Vol. Ec-16, No. 6, pp.784~790 Dec. (1967).
- 3) Paul G. Comba; A Procedure For Detecting Intersections of Three-Dimensional Objects, J. of ACM, Vol. 15, No. 3, pp.345~366 July (1968).
- 4) A. Appel; Some Technique For Shading Machine Rendering of Solids, Proc. SJCC pp.37~45 (1968).
- 5) 上内: 三次元 Hidden-Line 問題について, 情報処理, 11巻3号, pp.144~154 (1970).
- 6) S. Coons; Surfaces for Computer Aided Desing of Space Form, Project MAC TR-41, June (1967).
- 7) 穂坂, 遠藤: 図形の発生, 処理, 記憶, 情報処理, 6巻3号, pp.129~139 (1965)
- 8) Emerging Concepts in Computer Graphics 1967, University of Illinois Conference, W. A. Benjamin Inc. (1968)

(昭和44年11月24日受付)