3次元 Hidden-Line Problem について II*

上 内 秀 隆**

Abstract

It is the well-known fact for engineers in the field of computer graphics that there exists the necessity of solving the three-dimensional hidden-line problem completely.

Since 1960's, many men have tried to solve the problem and to give the complete algorithm for elimination of hidden-lines. They have partially solved the problem by computing hidden-lines point-by-point, and we discussed the approximate solution of the problem in the particle [2] using the point-by-point method. However remains the difficulty that any method discussed needs long computing time.

In this paper, we give the way of computing hidden-lines line-by-line under the condition that every surface treated here is triangular and the set of hidden-lines is the set of linear lines. Then we show that solving the problem is reduced to solving some inequalities, and give the algorithm of solving the inequalities. Thus we compute hidden-lines without partitioning them to many points.

1. 序

Hidden-Line の消去法を与えることが，Computer Graphics の分野における重要な問題の一つであることが指摘[1] されてから久しい．いろいろな解決法が，指摘されてきたが，われわれも，過去に，収束型計算をしないでもすむ範囲での point-by-point の計算法を提出してきた[2]．しかし，ある線分を検定する際，visible な部分が，実数内の，整数のような関係にあることは，まず，ありえない．すなわち，visible な部分は，一つの線分を形成すると考えてもよいのである．このため，point-by-point に，hidden-line の要素を計算するのは，効率が悪いから，line-by-line の計算が要求される．

P. P. Loutrel は，このような方向へ向かう一つの方法を提出したが[3]，まだ，point-by-point の計算法を完全には，脱していない．そこでの対象としての稜線は，すべて，直線で，物体をかこむ面はすべて，平面であるものである．このような，多角形の多面体から，その表面の平面の法線ベクトル，隣り合う2つの平面のなす角，稜線を走査する方向などを用いて，invisible な稜線を消去するものであった．

われわれは本論文では全く異なる観点から，完全な line-by-line の計算法を与える．ただし，対象を三角形にしぼってあるが，任意の曲面の三角形近似が，常に可能であることからみれば，このことは，応用範囲を，限定するというよりも，むしろ，拡大するものである．

以下では，計算法が，結局のところ，2次形式の連立不等式系を解くことに帰着されることを述べて，それを解く具体的なアルゴリズムと，invisible な領域の処理を述べる．

2. 問題設定

対象とする3次元空間内の物体は，総計 n_1 個の三角形 $\Delta^r(1\leq r\leq n_1)$ で，近似された曲面で囲まれているものとする．ただし，各三角形 Δ^r の要素 $\boldsymbol{Y}$ は

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}^r\omega t+\boldsymbol{B}^r t+\boldsymbol{C}^r \qquad 0\leq\omega,\ t\leq 1 \qquad (2\text{-}1)$$

で表わされる．このとき，対象点の集合 Σ は

$$\Sigma=\{\boldsymbol{X}\,|\,\boldsymbol{X}\in\Delta^r,\ \exists r,\ 1\leq r\leq n_1\} \qquad (2\text{-}2)$$

と表わされる．

* About the Three-Dimensional "Hidden-Line" Problem II, by Hidetaka Kamiuchi (Faculty of Engineering, Kyoto University)

** 京都大学・工学部

検点しようとする点は，総計 n_2 個の直線 $\boldsymbol{L}^r(1\leq r\leq n_2)$ の要素であるとする．各直線 $\boldsymbol{L}^r$ の要素 $\boldsymbol{Y}$ は

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{D}^r\eta+\boldsymbol{E}^r \quad 0\leq\eta\leq 1 \tag{2-3}$$

で，表わされるとする．このとき，検定すべき点の集合 $\boldsymbol{K}$ は

$$\boldsymbol{K}=\{\boldsymbol{X}\,|\,\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{L}^r,\ \ni r,\ 1\leq r\leq n_2\} \tag{2-4}$$

と表わされる．

視線の方向余弦 $\boldsymbol{\Lambda}$ が与えられたとき，点 $\boldsymbol{X}$ を通る視線の要素 $\boldsymbol{Y}$ を

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{\Lambda}s+\boldsymbol{X} \quad s>0 \tag{2-5}$$

と表わし，視点 $\boldsymbol{P}$ が与えられたときの点 $\boldsymbol{X}$ を通る視線 $\overrightarrow{\boldsymbol{PX}}$ の要素 $\boldsymbol{Y}$ を

$$\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{P})s+\boldsymbol{P} \quad 0<s<1 \tag{2-6}$$

と表わすことにする．

さて，任意の $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{K}$ をとってきて

$$\Sigma^*(\boldsymbol{X})=\overrightarrow{\boldsymbol{PX}}\cap\{\Sigma-\{\boldsymbol{X}\}-\{\boldsymbol{P}\}\}$$

を作る．すると，点 $\boldsymbol{X}$ の Σ に関するつぎのような visibility が，定義できる[2)]．

定　義

もし，$\Sigma^*(\boldsymbol{X})\neq\Phi$ ならば，点 $\boldsymbol{X}$ は，Σ に関して invisible であるという．もし，$\Sigma^*(\boldsymbol{X})=\Phi$ ならば，点 $\boldsymbol{X}$ は，Σ に関して，visible であるという．

ところで

$$\Sigma=\Delta^1\cup\Delta^2\cup\cdots\cup\Delta^{n_1}$$

であったから

$$\Sigma^*(\boldsymbol{X})=\Delta^{1*}(\boldsymbol{X})\cup\Delta^{2*}(\boldsymbol{X})\cup\cdots\cup\Delta^{n_1*}(\boldsymbol{X})$$

とかける．このことから，$\Delta^{r*}(\boldsymbol{X})$ の性質を調べることで，$\Sigma^*(\boldsymbol{X})$ の性質を調べることに等価になることがわかる．

われわれは，過去に，いろいろの形式をもつ $\Delta^{r*}(\boldsymbol{X})$ が Φ か否かを調べるアルゴリズムを提出した．そして，収束型の計算を行なわないですむ判定法を，提出した．しかし，そこでは，点ごと (point-by-point) の判定法を与えるにとどまっていた[2)]．

われわれは，点ごとの判定を行なう代わりに，$\boldsymbol{L}^r\subset\boldsymbol{K}$ ごとに，線ごと (line-by-line) の判定法を与えることを考える．議論の容易さと，実用性とを考慮して，Δ^r の形式は，三角形に限ることにする．

3. visibility の判定と連立不等式

三角形 Δ^r の要素が

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}\omega t+\boldsymbol{B}t+\boldsymbol{C} \quad 0\leq\omega,\ t\leq 1 \tag{3-1}$$

で表わされ，視点 $\boldsymbol{P}$ が与えられて，検定すべき点の要素が直線 $\boldsymbol{L}$ の要素として

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{D}\eta+\boldsymbol{E} \quad 0\leq\eta\leq 1 \tag{3-2}$$

で表わされているものとする．このとき，視線 $\overrightarrow{\boldsymbol{PX}}$ の要素は

$$\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{P})s+\boldsymbol{P} \quad 0\leq s\leq 1 \tag{3-3}$$

と表わされる(注 1)．

いま，(3-1), (3-2), (3-3) を連立させると

$$(\boldsymbol{D}\eta+\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P})s+\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}\omega t+\boldsymbol{B}t+\boldsymbol{C}$$
$$0\leq s,\omega,t,\eta\leq 1 \tag{3-4}$$

なる連立方程式系が得られる．この方程式系の解の組 (s,ω,t,η) の集合を $\boldsymbol{H}$ として

$$\boldsymbol{H}=\{(s,\omega,t,\eta)\,|\,s,\omega,t,\eta \text{ は(3-4)式を満たす}\}$$

を作ったとき，$\boldsymbol{H}\neq\Phi$ ならば，直線(3-2)上に，invisible な点が存在し，$\boldsymbol{H}=\Phi$ ならば，直線(3-2)上は，すべて visible である．

また

$$\boldsymbol{F}=\{\eta\,|\,\eta \text{ は，(3-4)式を満たす}\}$$

を作ったとき

$$\boldsymbol{L}_1=\{\boldsymbol{X}\,|\,\boldsymbol{X}=\boldsymbol{D}\eta+\boldsymbol{E},\ \eta\in\boldsymbol{F}\}$$

は，(3-2)式で与えられる直線の invisible な部分集合となる．このときと

$$\boldsymbol{L}_1\supset\boldsymbol{L}$$

なれば，直線 $\boldsymbol{L}$ は，invisible であったことがわかる．

(3-1) は凸体であるから，$\boldsymbol{L}_1$ も凸領域になる．したがって，$\boldsymbol{F}$ も，単領域のはずで，ある α,β によって

$$\boldsymbol{F}=\{\eta\,|\,0\leq\alpha\leq\eta\leq\beta\leq 1\}$$

となり．$\boldsymbol{F}$ が，一意的に決定するか，または，$\boldsymbol{F}=\Phi$ であることになる．

われわれは，$\boldsymbol{F}$ を決定する．α,β を (3-1), (3-2), (3-3) の式の係数から決めることを考える．

(3-4)式を，不等式の条件を無視して，s,t,ω について解くと

$$\left\{\begin{array}{l} s=C'/|\boldsymbol{J}| \\ t=(D'\eta+E')/|\boldsymbol{J}| \\ \omega=(F'\eta+G')/(D'\eta+E') \end{array}\right. \tag{3-5}$$

となる，ただし

$$|\boldsymbol{J}|=A'\eta+B'\neq 0$$

$$A'=\begin{vmatrix} D_1 & -A_1 & -B_1 \\ D_2 & -A_2 & -B_2 \\ D_3 & -A_3 & -{}_3B \end{vmatrix}$$

$$B'=\begin{vmatrix} E_1-P_1 & -A_1 & -B_1 \\ E_2-P_2 & -A_2 & -B_2 \\ E_3-P_3 & -A_3 & -B_3 \end{vmatrix}$$

注 1　$\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{X})s+\boldsymbol{X}$　$0\leq s\leq 1$ を用いてもよいが，(3-3)式の方が使いやすい．

$$C'=\begin{vmatrix} C_1-P_1 & -A_1 & -B_1 \\ C_2-P_2 & -A_2 & -B_2 \\ C_3-P_3 & -A_3 & -B_3 \end{vmatrix}$$

$$D'=\begin{vmatrix} D_1 & -A_1 & C_1-P_1 \\ D_2 & -A_2 & C_2-P_2 \\ D_3 & -A_3 & C_3-P_3 \end{vmatrix}$$

$$E'=\begin{vmatrix} E_1-P_1 & -A_1 & C_1-P_1 \\ E_2-P_2 & -A_2 & C_2-P_2 \\ E_3-P_3 & -A_3 & C_3-P_3 \end{vmatrix}$$

$$F'=\begin{vmatrix} D_1 & C_1-P_1 & -B_1 \\ D_2 & C_2-P_2 & -B_2 \\ D_3 & C_3-P_3 & -B_3 \end{vmatrix}$$

$$G'=\begin{vmatrix} E_1-P_1 & C_1-P_1 & -B_1 \\ E_2-P_2 & C_2-P_2 & -B_2 \\ E_3-P_3 & C_3-P_3 & -B_3 \end{vmatrix} \tag{3-6}$$

である(注2)．これらの式から．$\boldsymbol{F}=\{\eta\}$ を求めると，(3-4)式の不等式条件から

$$\begin{cases} 0\leq\dfrac{C'}{A'\eta+B'}\leq 1 \\ 0\leq\dfrac{D'\eta+E'}{A'\eta+B'}\leq 1 \\ 0\leq\dfrac{F'\eta+G'}{D'\eta+E'}\leq 1 \\ 0\leq\eta\leq 1 \end{cases} \tag{3-7}$$

を満たす η が，$\boldsymbol{F}$ の要素となる．

(3-7)を書き換えると

$$\begin{cases} C'(A'\eta+B')\geq 0 \\ (A'\eta+B')(A'\eta+B'-C')\geq 0 \\ (A'+B\eta')(D'\eta+E')\geq 0 \\ (A'\eta+B')((A'-D')\eta+B'-E')\geq 0 \\ (D'\eta+E')(F'\eta+G')\geq 0 \\ (D'\eta+E')((D'-F')\eta+E'-G')\geq 0 \\ 1\geq\eta\geq 0 \end{cases} \tag{3-8}$$

となる．

よって，$\boldsymbol{F}$ を求めるには，(3-8)の2次不等式系を解けばよいことがわかった．

視点 $\boldsymbol{P}$ の代わりに，方向余弦 $\boldsymbol{\Lambda}$ が与えられた場合は，(3-3)式の代わりに

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{\Lambda}s+\boldsymbol{X} \qquad s\geq 0 \tag{3-9}$$

が，採用される．

このとき，(3-1)，(3-2)，(3-9)式を連立させると

$$\boldsymbol{\Lambda}s+\boldsymbol{D}\eta+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}\omega t+\boldsymbol{B}t+\boldsymbol{C}$$
$$s\geq 0,\ 0\leq\eta,\ \omega,\ t\leq 1 \tag{3-10}$$

となる．不等式条件を無視して，(3-10)を s,ω,t について解くと

$$\begin{aligned} s&=(B'-A'\eta)/|\boldsymbol{J}| \\ t&=(D'-C'\eta)/|\boldsymbol{J}| \\ \omega&=(F'-E'\eta)/(D'-C'\eta) \end{aligned} \tag{3-11}$$

となる．ただし

$$|\boldsymbol{J}|=\begin{vmatrix} \Lambda_1 & -A_1 & -B_1 \\ \Lambda_2 & -A_2 & -B_2 \\ \Lambda_3 & -A_3 & -B_3 \end{vmatrix}\neq 0$$

$$A'=\begin{vmatrix} D_1 & -A_1 & -B_1 \\ D_2 & -A_2 & -B_2 \\ D_3 & -A_3 & -B_3 \end{vmatrix}$$

$$B'=\begin{vmatrix} C_1-E_1 & -A_1 & -B_1 \\ C_2-E_2 & -A_2 & -B_2 \\ C_3-E_3 & -A_3 & -B_3 \end{vmatrix}$$

$$C'=\begin{vmatrix} \Lambda_1 & -A_1 & D_1 \\ \Lambda_2 & -A_2 & D_2 \\ \Lambda_3 & -A_3 & D_3 \end{vmatrix}$$

$$D'=\begin{vmatrix} \Lambda_1 & -A_1 & C_1-E_1 \\ \Lambda_2 & -A_2 & C_2-E_2 \\ \Lambda_3 & -A_3 & C_3-E_3 \end{vmatrix}$$

$$E'=\begin{vmatrix} \Lambda_1 & D_1 & -B_1 \\ \Lambda_2 & D_2 & -B_2 \\ \Lambda_3 & D_3 & -B_3 \end{vmatrix}$$

$$F'=\begin{vmatrix} \Lambda_1 & C_1-E_1 & -B_1 \\ \Lambda_2 & C_2-E_2 & -B_2 \\ \Lambda_3 & C_3-E_3 & -B_3 \end{vmatrix} \tag{3-12}$$

である(注3)．

よって，不等式条件を入れると

$$\begin{cases} |\boldsymbol{J}|(B'-A'\eta)\geq 0 \\ |\boldsymbol{J}|(D'-C'\eta)\geq 0 \\ |\boldsymbol{J}|(C'\eta+|\boldsymbol{J}|-D')\geq 0 \\ (D'-C'\eta)(F'-E'\eta)\geq 0 \\ (D'-C'\eta)((E'-C')\eta+D'-F')\geq 0 \\ 1\geq\eta\geq 0 \end{cases} \tag{3-13}$$

を満たす η の集合が，この場合は，$\boldsymbol{F}$ を形成することがわかる．

視線として，(3-3)，(3-9)のいずれの式を用いても，連立2次不等式系の解の性質を調べることに帰着されたことがわかる．

4. 連立不等式の処理法と invisible な領域

4-1 連立不等式の処理

(3-8)から，η 領域を具体的に求めることを考えてみよう．

注2　$A'=0$，$B'=0$ のときは，この Λ^r に関する visibility は，plottability には何ら影響を与えないので，visible であるとみなしてもよい．

注3　$|\boldsymbol{J}|=0$ のとき，注2と同じ理由で，visible とみなしてもよい．

(3-8)の第 i $(i=1,2,\cdots,6)$ 式を満たす η の領域を

$$\tilde{F}^i{}_{j(i)}=\{\eta \mid a^i{}_{j(i)}\leq\eta\leq b^i{}_{j(i)}\}$$

としよう．ただし，$j(i)=0,1$ である．このとき

$$F^i{}_{j(i)}=\{\eta \mid a^i{}_{j(i)}\leq\eta\leq b^i{}_{j(i)}\},\quad 0\leq\eta\leq 1$$
$$=\tilde{F}^i{}_{j(i)}\cap\{\eta \mid 0\leq\eta\leq 1\}$$

とおけば，(3-8)を満たす η の集合 F は

$$F=\bigcap_{i=1}^{6}\left\{\bigcup_{j(i)}F^i{}_{j(i)}\right\}=\bigcup_{j(i)}\bigcap_{i=1}^{6}F^i{}_{j(i)} \tag{4-1}$$

と表わされる．$\varDelta$ が凸体であったから，F は単一領域であるか，または，空である．よって

$$F=\{\eta \mid 0\leq a\leq\eta\leq b\leq 1\}$$

と表現されるか，$F=\varPhi$ である．このことは，$a^i{}_{j(i)}$ および $b^i{}_{j(i)}$ から，a および b が一意的に決まることを要請している．

さて，各係数 $a^i{}_{j(i)}, b^i{}_{j(i)}$ は，つぎのようにして決められる．(3-8)式の第 i 式 $(i=1)$ は

$$\alpha_1(s-\beta_1)\geq 0$$

なるタイプの不等式である．このとき

$$a_0{}^1=-1,\quad b_0{}^1=-1$$

と，する．そして

(i) $\alpha_1>0$ のとき

もし，$\beta_1<0$ ならば，$a_1{}^1=0$，$b_1{}^1=1$

もし，$1\geq\beta_1\geq 0$ ならば，$a_1{}^1=\beta_1$，$b_1{}^1=1$

もし，$\beta_1>1$ ならば，$a_1{}^1=-1$，$b_1{}^1=-1$

(ii) $\alpha_1=0$ のとき　$a_1{}^1=0$，$b_1{}^1=1$

(iii) $\alpha_1<0$ のとき

もし，$\beta_1<0$ ならば，$a_1{}^1=-1$，$b_1{}^1=-1$

もし，$1\geq\beta_1\geq 0$ ならば，$a_1{}^1=0$，$b_1{}^1=\beta_1$

もし，$\beta_1\geq 1$ ならば，$a_1{}^1=0$，$b_1{}^1=1$

と，決められる．

(3-8)式の第 i 式 $(i=2,3,\cdots,6)$ は

$$\alpha_i(s-\beta_i)(s-\gamma_i)\geq 0\qquad \beta_i\leq\gamma_i$$

なるタイプの不等式である．そこで

(i)　$\alpha_i>0$ のとき

(i-1)

もし，$\beta_i<0$ ならば，$a_0{}^i=-1$，$b_0{}^i=-1$

もし，$1\geq\beta_i\geq 0$ ならば，$a_0{}^i=0$，$b_0{}^i=\beta_i$

もし，$\beta_i>1$ ならば，$a_1{}^1=0$，$b_0{}^i=1$

(i-2)

もし，$\gamma_i<0$ ならば，$a_1{}^1=-1$，$b_1{}^1=-1$

もし，$1\geq\gamma_i\geq 0$ ならば，$a_1{}^1=\gamma_i$，$b_1{}^1=1$

もし，$\gamma_i>1$ ならば，$a_1{}^1=-1$，$b_1{}^1=-1$

(ii)　$\alpha_i=0$ のとき

$$a_0{}^i=-1,\quad b_0{}^i=-1,\quad a_1{}^i=0,\quad b_1{}^i=1$$

(iii)　$\alpha_i<0$ のとき　$a_0{}^i=-1$，$b_0{}^i=-1$

もし，$\beta_i>1$ ならば，$a_1{}^1=-1$，$b_1{}^1=-1$

もし，$\gamma_i<0$ ならば，$a_1{}^i=-1$，$b_1{}^i=-1$

もし，$0\leq\beta_i\leq\gamma_i\leq 1$ ならば，$a_1{}^i=\beta_i$，$b_1{}^i=\gamma_i$

もし，$\beta_i<0\leq 1\leq\gamma_i$ ならば，$a_1{}^i=0$，$b_1{}^i=\gamma_i$

もし，$0\leq\beta_i\leq 1\leq\gamma_i$ ならば，$a_1{}^i=\beta_i$，$b_1{}^i=1$

もし，$\beta_i<0$，$1<\gamma_i$ ならば，$a_1{}^i=0$，$b_1{}^i=1$

と決められる．

ここで，-1 なる数字を用いたが，これは，$F^i{}_{j(i)}$ が空集合であることを示すもので，空集合を仮に

$$\varPhi\equiv\}\eta \mid -1\leq\eta\leq -1\}$$

と定義して，取り扱いやすくするための，便法である．

このようにして，おのおのの $F^i{}_{j(i)}$ は，完全に記述されたことがわかる．

4-2　領域の和と積

(4-1)式は，積の和形式である．そして $2^6=64$ 項の和形式となっている．ところが，前節の記述からもわかるように，12 個の $F^i{}_{j(i)}$ のうち，かなりの個数が，空集合であることがある．目的は，空集合でない．F を求めたいのであるから，計算の回数を減らすため，$F^i{}_{j(i)}(=\varPhi)$ をうまく利用することが，望まれる．

いま

$$c^i{}_{j(i)}\begin{cases}=1 & \text{if}\quad a^i{}_{j(i)}=-1\qquad j(i)=0,1\\ =0 & \text{if}\quad a^i{}_{j(i)}\neq -1\qquad j(i)=0,1\end{cases}$$

なる $c^i{}_{j(i)}$ を定義しよう．また

$$d^i=c_0{}^i+c_1{}^i$$

なる d^i を定義しよう．

このとき，$c^i{}_{j(i)}=1$ ならば，$F^i{}_{j(i)}$ を含む項は，すべて，$\varPhi$ となり，$d^i=2$ なる d^i が存在すれば，F は $\varPhi$ となることは．容易に判明する．

さらにもし，すべての d^i が，0，または，1 であれば，F が，空集合でない可能性が残る．そこで，すべての d^i が，0，または，1 である場合について考えることにしよう．このとき集合 F は

$$F\{\bigcap_{\substack{d_r=1\\ c^r{}_{j(r)}=0}}F^r{}_{j(r)}\}\cap\{\bigcup_{j(i)}\bigcap_{d^i=0}F^i{}_{j(i)}\} \tag{4-2}$$

と書ける．このように記述すれば，積の和形式としてみた場合，$2^{(6-\sum_{r=1}^{6}d^r)}$ 個の項から成る．つまり，多くの項の計算を省略できることがわかる．ただし，すべての r について $d^r\neq 2$ の場合のみ．

さて，F の各項は，$F^i{}_{j(i)}$ の作り方から，互いに共通部分を持たないことがわかる．一方，F は，単一領域であることが保障されているのだから，F が空集合でなければ，ただ一つの項のみが，空集合ではない．

すなわち，空集合でない項は，高々1個であることがわかる．このことは，空集合でない項を見つければ，それが，$\boldsymbol{F}$ そのものであることを示している．

したがって，領域の和を求めることは，必要でなく，積のみで $\boldsymbol{F}$ を求めることができることがわかる．よって，ここでは，2つの単一領域の積の処理法について，述べることにする．

いま，

$$\boldsymbol{F}^1=\{\eta \mid a^1\leq\eta\leq b^1\}$$

$$\boldsymbol{F}^2=\{\eta \mid a^2\leq\eta\leq b^2\}$$

なる2つの集合 $\boldsymbol{F}^1, \boldsymbol{F}^2$ の積 $\boldsymbol{F}^3$

$$\boldsymbol{F}^3=\{\eta \mid a^3\leq\eta\leq b^3\}$$

を求めるアルゴリズムを記述しよう．それは

もし，$a_2\leq b_2\leq a_1\leq b_1$ ならば，$a_3=-1$，$b_3=-1$
もし，$a_2\leq a_1\leq b_2\leq b_1$ ならば，$a_3=a_1$，$b_3=b_2$
もし，$a_2\leq a_1\leq b_1\leq b_2$ ならば，$a_3=a_1$，$b_3=b_1$
もし，$a_1\leq a_2\leq b_2\leq b_1$ ならば，$a_3=a_2$，$b_3=b_2$
もし，$a_1\leq a_2\leq b_1\leq b_2$ ならば，$a_3=a_2$，$b_3=b_1$
もし，$a_1\leq b_1\leq a_2\leq b_2$ ならば，$a_3=-1$，$b_3=-1$

と決められる．

これによって，(4-2)は，簡単に計算できる．

4-3 Σ に関する invisible な領域

前節の議論により，Δ^r に関する $\boldsymbol{L}^t$ の invisible な領域 $\boldsymbol{F}_{(t)}{}^{(r)}$ が求まった．しかし，$\boldsymbol{L}^t$ の Σ に関する invisible な領域 $\boldsymbol{F}_{(t)}$ は

$$\boldsymbol{F}_{(t)}=\bigcup_{r=1}^{n_1}\boldsymbol{F}_{(t)}{}^{(r)} \tag{4-3}$$

と表わされるから，$\boldsymbol{F}_{(t)}$ は，単一領域であるとは限らない．$\boldsymbol{F}_{(t)}$ の中の可能な単一領域の数を $N_{(t)}$ とすると

$$0\leq N_{(t)}\leq n_1$$

が，常に成立している．よって，(4-3)式は，n_1 個以下の項の和で書き表わされることになる．通常 n_1 は，10^2～10^6 にも及ぶ．しかし，Δ^r は，いくつか連結して，曲面を作っているのが普通なので，連結した曲面の数からみると，その数は，10～10^3 の範囲を考えれば，十分であろう．このような，条件のもとでは，$\boldsymbol{F}_{(t)}$ の項は，(4-3)の演算の結果，高々，10～10^3 個の項にまとめられる．予想としては，高々10～100個の項の和となると考えれば，十分ではないかと考えているが，まだ，実験して，確かめてはない．

(4-3)の $\boldsymbol{F}_{(t)}{}^{(r)}$ は，単領域であるから

$$\boldsymbol{F}_{(t)}{}^{(r)}=\{\eta \mid 0\leq a_t{}^r\leq\eta\leq b_t{}^r\leq 1\}$$

と，表わされているはずであり，$\boldsymbol{F}_{(t)}$ は，

$$\boldsymbol{F}_{(t)}=\sum_{i=1}^{N(t)}\boldsymbol{E}_{(t)}{}^i$$

とも，表わせるはずである．ただし

$$\boldsymbol{E}^i{}_{(t)}=\{\eta \mid 0\leq\alpha_i\leq\eta\leq\beta_i\leq 1\}$$

である．われわれが，$a_t{}^r, b_t{}^r$ から，α_i, β_i を一意的に決めることができれば，$\boldsymbol{L}^t$ 上の Σ に関する invisible な領域 $\boldsymbol{F}_{(t)}$ は求まったことになる．

$\boldsymbol{F}_{(t)}{}^{(r)}$，すなわち，$a_t{}^r, b_t{}^r$ が，与えられたとき，$\boldsymbol{E}_{(t)}{}^i$ の表を更新する手続きを与えることにしよう．

(i) 初期状態の指定

$\alpha(1)=-1$, $\beta(1)=-1$, $\alpha(2)=2$,
$\beta(2)=2$, $N=2$

(ii) $\alpha(2)=0$, $\beta(2)=1$ ならば，(vi)へ．

(iii) $a_t{}^r, b_t{}^r(1\leq r\leq n_1)$ を与える．このとき

$\alpha(n)<a_t{}^r\leq\alpha(n+1)$ $N\geq n\geq 1$
$\beta(m)<b_t{}^r\leq\beta(m+1)$ $N\geq m\geq 1$

を満たす n, m の対を求める．

(iv) α, β 表の更新

(iv-1) $a_t{}^r\leq\beta(n)$, $b_t{}^r<\alpha(m+1)$ のとき

$\alpha(n+i)\leftarrow\alpha(m+i)$ $1\leq i\leq N-m$
$\beta(n+i)\leftarrow\beta(m+i)$ $1\leq i\leq N-m$
$\beta(n)\leftarrow b_t{}^r$
$N\leftarrow N-m+n$

(iv-2) $a_t{}^r\leq\beta(n)$, $b_t{}^r\geq\alpha(m+1)$ のとき

$\alpha(n+i)\leftarrow\alpha(m+i+1)$ $1\leq i\leq N-m-1$
$\beta(n+i)\leftarrow\beta(m+i+1)$ $1\leq i\leq N-m-1$
$\beta(n)\leftarrow\beta(m+1)$
$N\leftarrow N-m+n-1$

(iv-3) $a_t{}^r>\beta(n)$, $b_t{}^r<a(m+1)$ のとき

$\alpha(n+i+1)\leftarrow\alpha(m+i)$ $1\leq i\leq N-m$
$\beta(n+i+1)\leftarrow\beta(m+i)$ $1\leq i\leq N-m$
$\alpha(n+1)\leftarrow a_t{}^r$
$\beta(n+1)\leftarrow b_t{}^r$
$N\leftarrow N-m+n+1$

(iv-4) $a_t{}^r>\beta(n)$, $b_t{}^r\geq\alpha(m\div 1)$ のとき

$\alpha(n+i+1)\leftarrow\alpha(m+i+1)$ $1\leq i\leq N-m-1$
$\beta(n+i+1)\leftarrow\beta(m+i+1)$ $1\leq i\leq N-m-1$
$\alpha(n+1)\leftarrow a_t{}^r$
$\beta(n+1)\leftarrow\beta(m+1)$
$N\leftarrow N-m+n$

(v) $r=n_1+1$ まで，$r\leftarrow r\div 1$ して，(ii)へもどる．$r=n_1+1$ のとき(vi)へ．

(vi) α, β の表は完成した．

だいたい，上記の手続きの如くなる．(vi)の結果

$$F_t=\bigcup_{i=2}^{N-1}\{\eta\,|\,\alpha(i)\le\eta\le\beta(i)\}$$

と求められるる．したがって，visible な領域 $\tilde{F}_t$ は

$$\tilde{F}_t=\bigcup_{i=2}^{N-2}\{\eta\,|\,\beta(i)\le\eta\le\alpha(i+1)\}$$
$$\cup\,\varphi\cdot\{\eta\,|\,0\le\eta\le\alpha(2)\}$$
$$\cup\,\psi\cdot\{\eta\,|\,\beta(N-1)<\eta\le 1\}$$

となる．ただし

$$\varphi=\begin{cases}1 & \text{if } \alpha(2)\neq 0\\ 0 & \text{if } \alpha(2)=0\end{cases}$$

$$\psi=\begin{cases}1 & \text{if } \beta(N-1)\neq 1\\ 0 & \text{if } \beta(N-1)=1\end{cases}$$

である．

このようにして，われわれは，F_t を，具体的に求めることができたが，α,β 表の更新は，結構にやっかいである．

また，(iv-3) において，$n=m$ であれば，表はその項目を一つ増加させるので，このときの，情報の転送の順序には，注意を払っておく必要がある．すなわち，i を大きい方から，小さくなる方へ変化させせつつ $\alpha(k)$' $\beta(k)$ を転送する必要があることである．

5. むすび

4. は，(3-8) 式の処理について，詳述したが，(3-13) 式の処理についても，全く同じ考え方で，対処できる．

実用に際して，残る問題は，$\alpha(N),\beta(N)$ の表の大きさを，どの程度にとったらよいかという問題である．N の最大値は，Δ^r の数 n_1，すなわち，データの数に，大きく依存する．しかし，本文中にも述べたように，$10\sim10^2$ の数を見込めば，十分でないかと考える．

point-by-point の計算法に比べて，有利なことは，scan 精度に関係なく，hidden-line の計算に要する時間が決まることで，高精度の計算には，むいている．point-by-point の計算では，scan 精度が 2 倍になれば，hidden-line の計算時間は，2 倍かかっていた．

また，本論文の方法は，文献(4)と合わせると，基本曲面を三角形とする場合の line-by-line の計算法をほぼ完全に与えている．

本論文の方法は，hidden-line の計算時間に，大幅な，改善を与えるものと考えられるから，十分，実用価値があるものと信ぜられる．

謝辞 萩原教授を初めとする研究室の方々に感謝する．

参 考 文 献

1) I. E. Sutherland: Computer Graphics-Ten Unsolved Problems, Datamation, Vol. 12, No. 5, pp. 22～27 (May 1966)
2) 上内秀雄：3次元 Hidden-Line Problem について，情報処理，Vol. 11, No. 3, pp. 144～154 (March 1970)
3) P. P. Loutrel: A Solution to the Hidden-Line Problem for Computer-Drawn Polyhedra, trans. IEEE, Vol. C-19, No. 3, pp. 205～213, (March 1970)
4) 上内秀隆：図形処理における輪廓線について，情報処理，Vol. 11, No. 5, pp. 274～285 (May 1970)

(昭和 45 年 4 月 25 日受付)