周波数が大きいばあいの有限 Fourier 積分のある数値計算法について*

今　田　直　孝**

Abstract

In the machine calculation of the finite Fourier integrals $F(\omega)=\int_a^b f(t)e^{-i\omega t}dt$ by the ordinary approximation formulas of numerical integration, such as Simpson's a difficulty arises for large frequency ω. We must note that the same situation occurs also in applying faster algorithm like Goertzel's or Cooley-Tukey's.

Filon's method, which approximate $f(t)$ by series of parabolic arcs and use the integration by parts on the series, covers this fault to the extent of $O(1/\omega^2)$ as $\omega\to\infty$. As long as we use such an approximation, it seems that we can not improve on this error bound.

Extending Filon's idea, we produce formulas which agree with $F(\omega)$ with the error of $O(1/\omega^{n+2})$ as $\omega\to\infty$, where n stands for the natural number. Our formulas do not make it necessary to compute any derivatives, but consiste in combining values, which are taken at different points in the complex domain, of the analytic continuation of $f(t)$.

あ ら ま し

有限 Fourier 積分 $F(\omega)=\int_a^b f(t)e^{-i\omega t}dt(-\infty<a<b<+\infty)$ を，Simpson の公式などの普通の数値積分の近似公式によって数値計算するばあい，一般には大きな周波数 ω に対しては困難となる．なんとならば，小さい周波数と同じ精度を保つためには，数値積分の刻み幅を小さくしなければならないからである．

このことは Goertzel 法や Cooley-Tukey 法を使うばあいにもあてはまるから，気をつけなければならない．それは，これらの方法は，Simpson らの普通の近似公式を，演算回数の少ない独特の形へ代数的な変形を施したものであって，求める量そのものは，変形前のと同じだからである．

与えられた関数 $f(t)$ を放物線の弧の集まりで近似し，その近似した関数について部分積分して，その公式を導くところの Filon 法は，この欠点をある程度補っている．しかし，この方法の打切り誤差は，一般には $O(1/\omega^2)(\omega\to\infty)$ よりよくすることはできない．

この Filon の idea を拡張して，$F(\omega)$ と打切り誤差が $O(1/\omega^{n+2})(\omega\to\infty)$ 程度まで完全に一致するある公式を開発した．ここに n は任意の正の整数にとれる．この公式は，微分方程式の数値積分公式の Runge-Kutta 法のように，$f(t)$ の微係数はいっさい計算しないで，$f(t)$ を複素変数の複素関数に解析的に延長して，複素平面上の異なる点の関数値のある加重平均を計算する方法をとる．このとき使用する定数の組を Table 2, 3 に示す．

1. ま え が き

表題の有限 Fourier 積分とは

$$F(\omega)=\int_a^b f(t)e^{-i\omega t}dt \tag{1.1}$$

なる形で，$-\infty<a<b<+\infty$ なるものをさす．周波数 ω は実数であるが，**2.** 以降はとくに $|\omega|$ が大きいばあいについて考えよう．関数 $f(t)$ は **1.**，**2.** では，実変数 t の実関数とし，**3.** 以降では複素関数とする．

ここから **1.** の終わりまで，$a=0$，$b=2\pi$，$\omega=\Omega$（整数）としよう．区間 $(0,2\pi)$ を N 等分して，$f_k=f(kh)$（刻み幅 $h=2\pi/N$）とおくと式 (1.1) の最も簡単な近似公式としてよく引き合いに出されるのは，階段関数近似公式の

---

* On a numerical calculation of the finite Fourier integrals with the large frequency, by Naotaka Imada (The 1st Research Center of Technical Research and Development Institute, Japan Defense Agency)

** 防衛庁技術研究本部・第1研究所

$$\tilde{F}_1(\Omega)=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i\frac{2\pi}{N}\Omega k} \qquad (1.2)$$

である．Simpson の公式もしばしば用いられるが，それは適当に変形すると式 (1.2) の形になる．

式 (1.2) におけるNをどのように選ぶかは，一般にはむずかしい．関数 $f(t)$ が $N/2$ より大きい周波数を含まない程度に，十分大きくNを選ぶことができれば問題ないが，そうでないと，Ω が大きいところでは，無視できないくらいの大きな誤差を生ずることがある．

たとえば，

$$f(t)=-\frac{1}{2}(t-\pi)\ (0<t<2\pi),$$

$$f(0)=f(2\pi)=0$$

のばあいに，$F(\Omega)$ と $\tilde{F}_1(\Omega)$ との比較をしてみよう．簡単な計算で

$$F(\Omega)=-i\pi/\Omega \qquad (1.3)$$

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{F}_1(\Omega)=-i\dfrac{\pi h}{2}\cot\dfrac{1}{2}\Omega h\\ (\Omega \fallingdotseq N \text{ の整数倍})\end{array}\right\} \qquad (1.4)$$

を得る．$N=32$にとってこれらを数値計算し，表にしたものが Table 1 である．

①～④の各項は左側が実数部，右側が虚数部を表わす．①と③の実数部は，有限桁演算であるための noise が現われていることを示す．①の虚数部にも④の虚数部とくらべて，この程度の noise は生じているはずであるが，有効桁のかげにかくれて見えないのである．

公式誤差 $E_1(\Omega)\equiv\tilde{F}_1(\Omega)-F(\Omega)(=①-②)$ は Ω が大きくなるに従って，著しく増大している．

なお，本論文で使用している Table は，TOSBAC-3400-30 E（1語 48 ビット構成，仮数部 36 ビット）によって作成したものである．

ここで，式(1.2)の計算に，Goertzel 法[2]や Cooley-Tukey 法[1]を適用する問題について考える．いま，$\tilde{F}_1(\Omega)$ を $\Omega=0,1,2,\cdots,N-1$ まで計算するものとしよう．掛算と加減算のそれぞれ1回ずつを合わせて演算の1単位とすると，式 (1.2) を直接計算するばあいは，N^2 回の演算が必要となるが，差分方程式を利用する Goertzel 法を使えば，約 $1/2\,N^2$ 回の演算で済む[4]．さらに，比較的最近になって開発された Cooley-Tukey 法を使えば，$2CN\log_2 N$ (C は1に近い定数) 回程度の演算で済む[4]．しかし，いま見てきたように，これは誤差の大きな周波数のところまで，一挙に算出してしまう方法であるから，それほど得にならないことがある．たとえば，誤差が大きくなるところをはぶいて，$\Omega=0,1,2,\cdots,\log_2 N$ までしか計算しないばあいには，直接計算法や Goertzel 法の方がかえって演算回数は少なくなる．

一般に，周波数の大きい $F(\Omega)$ を求めるのに，式 (1.2) によって近似計算するばあいは，刻み幅hを小さく，従ってNを大きくとって計算する必要がある．

ところが，Nを大きくしないでも，関数 $f(t)$ の性質が急変するところで積分区間を分割して計算する，という方法が考えられるが，それについて以下に述べよう．

2. Filon 法の拡張

本節で用いる考え方は，Filon 法[3]の考え方と基本的には同じである．

式 (1.1) において $|\omega|>1$ とし，区間 (a,b) はいくつかの部分区間 $(t_{k-1},t_k)\ (k=1,2,\cdots,N)$ よりなるものとし，$f(t)$ は部分的に，$f(t)=g_k(t)\,(t\in(t_{k-1},t_k))$ のように定義されるものとする．ただし，各 $g_k(t)$ は，閉区間 $[t_{k-1},t_k]$ を含むある開区間において，$n+2$ 回連続微分可能とする．

$F(\omega)$ をN個の積分の和で表わし，部分積分法を用いて

$$F(\omega)=\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)e^{-i\omega t}dt$$
$$=\sum_{k=1}^{N}F_k^*(\omega) \qquad (2.1)$$

を計算する．ただし

$$F_k^*(\omega)=\int_{t_{k-1}}^{t_k} g_k(t)e^{-i\omega t}dt$$
$$=\left\{\frac{g_k(t_{k-1})}{i\omega}+\frac{g_k'(t_{k-1})}{(i\omega)^2}+\cdots\cdots+\frac{g_k^{(n)}(t_{k-1})}{(i\omega)^{n+1}}\right\}e^{-i\omega t_{k-1}}$$
$$-\left\{\frac{g_k(t_k)}{i\omega}+\frac{g_k'(t_k)}{(i\omega)^2}+\cdots\cdots+\frac{g_k^{(n)}(t_k)}{(i\omega)^{n+1}}\right\}e^{-i\omega t_k}+E_k^*(\omega) \qquad (2.2)$$

である．打切り誤差 $E_k^*(\omega)$ は

$$E_k^*(\omega)=\int_{t_{k-1}}^{t_k} g_k^{(n+1)}(t)\frac{1}{(i\omega)^{n+1}}e^{-i\omega t}dt$$
$$=O(1/\omega^{n+2})\ (\omega\to\infty) \qquad (2.3)$$

である．ここで，$g_0(t)=g_{N+1}(t)\equiv 0$ として

$$I_k^{(l)}\equiv g_{k+1}^{(l)}(t_k)-g_k^{(l)}(t_k)$$
$$(k=0,1,2,\cdots,N) \qquad (2.4)$$

とおくと，$F(\omega)$ の近似公式は

$$\tilde{F}_2(\omega)=\sum_{k=0}^{N}\left\{\sum_{l=0}^{n}\frac{I_k^{(l)}}{(i\omega)^{l+1}}\right\}e^{-i\omega t_k} \tag{2.5}$$

なる形に書ける．このようにまとめるのは，$e^{-i\omega t_k}$ の計算が重複するのを避けるためである．打切り誤差は

$$E_2(\omega)\equiv\tilde{F}_2(\omega)-F(\omega)=O(1/\omega^{n+2}) \quad (\omega\to\infty) \tag{2.6}$$

である．

実数部と虚数部を分離した形に書くと

$$\left.\begin{aligned}\tilde{F}_c(\omega)&\equiv\mathrm{Re}\tilde{F}_2(\omega)\\&=\sum_{k=0}^{N}(a_\omega{}^k\cos\omega t_k+b_\omega{}^k\sin\omega t_k)\\\tilde{F}_s(\omega)&\equiv-I_m\tilde{F}_2(\omega)\\&=\sum_{k=0}^{N}(a_\omega{}^k\sin\omega t_k-b_\omega{}^k\cos\omega t_k)\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

となる．ただし

$$\left.\begin{aligned}a_\omega{}^k&=-\frac{I_k^{(1)}}{\omega^2}+\frac{I_k^{(3)}}{\omega^4}-\frac{I_k^{(5)}}{\omega^6}+\cdots\\&\quad+(-1)^{m+1}\frac{I_k^{(2m+1)}}{\omega^{2m+2}}+\cdots\\&\quad+(-1)^{\frac{n_0+1}{2}}\frac{I_k^{(n_0)}}{\omega^{n_0+1}}\\&\quad\left(m=0,1,\cdots,\frac{n_0-1}{2}\right),\\b_\omega{}^k&=-\frac{I_k^{(0)}}{\omega}+\frac{I_k^{(2)}}{\omega^3}-\frac{I_k^{(4)}}{\omega^5}+\cdots\\&\quad+(-1)^{m+1}\frac{I_k^{(2m)}}{\omega^{2m+1}}+\cdots\\&\quad+(-1)^{n_e/2+1}\frac{I_k^{(n_e)}}{\omega^{n_e+1}}\\&\quad\left(m=0,1,\cdots,\frac{n_e}{2}\right),\\n_0&=\begin{cases}n-1\cdots n=2n'\\n\quad\cdots n=2n'+1\end{cases}\\n_e&=\begin{cases}n\quad\cdots n=2n'\\n-1\cdots n=2n'+1\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

である．

関数 $f(t)$ を放物線の弧の集まりで近似し

$$\left.\begin{aligned}I_k^{(1)}&=-\frac{1}{2h}(f_{2k+2}-4f_{2k+1}+6f_{2k}\\&\quad-4f_{2k-1}+f_{2k-2})\\I_k^{(2)}&=\frac{1}{h^2}(f_{2k+2}-2f_{2k+1}+2f_{2k-1}\\&\quad-f_{2k-2})\\&\quad(f_k=f(a+kh))\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

のように計算するのが Filon 法である．

ところが任意の関数 $f(t)$ を放物線で近似するのでは，一般に近似関数の第1階の微係数に，したがって，$I_k^{(1)}$ なる量にすでに誤差を含む可能性がある．そして，このときの打切り誤差の order は $O(1/\omega^2)$ $(\omega\to\infty)$ となってしまう．放物線以外のもっと高次の曲線で近似してもやはり $I_k^{(1)}$ なる量に誤差を含むことに変わりはない．これを防ぐには関数 $f(t)$ そのものを用いる必要がある．しかし，そうすると今度は，個々の微係数 $f'(t)$, $f''(t)$, $\cdots$ に誤差を含めないで計算することが困難となる．つまり，個々に $I_k^{(l)}$ を直接計算するのでは，式 (2.6) よりも order の大きな誤差がはいり込む危険がある．式(2.6) なる近似度を保ったまま式 (2.5) の値は求められないものであろうか．これに対する一つの解答が次節に述べる方法であり，この方法は微分方程式の数値解法における Runge-Kutta 法のように，$f(t)$ の $t=t_k$ の近傍における値だけを使った精度のよい計算法である．

3. 近似公式 $\tilde{F}_3(\omega)$

以下においては，2. における関数 f, g_k は複素関数と考える．つまり

$$f(z)=g_k(z)\,(\mathrm{Re}\,z\in(t_{k-1},t_k)) \quad (k=1,2,\cdots,N) \tag{3.1}$$

とし，$g_k(z)$ は閉区間〔t_{k-1}, t_k〕を含むある複素領域で正則な複素関数とする．また，便宜上 $g_0(z)=g_{N+1}(z)\equiv0$ とおく．

この仮定のもとで，つぎの定理が成立する．これが，2. において予告したところのものである．

定理　有限 Fourier 積分 $F(\omega)$ の近似公式として

$$\tilde{F}_3(\omega)=\frac{1}{i\omega}\sum_{k=0}^{N}\left[\sum_{j=1}^{n}c_j\left\{g_{k+1}\left(t_k+\frac{p_j}{i\omega}\right)-g_k\left(t_k+\frac{p_j}{i\omega}\right)\right\}\right]e^{-i\omega t_k} \tag{3.2}$$

なる形のものが得られる．ただし，定数の組 $\{p_j, c_j\}$ は連立方程式

$$\sum_{j=1}^{n}c_jp_j{}^l=l!\quad(l=0,1,2,\cdots,n) \tag{3.3}$$

より決められる．このときの誤差は

$$E_3(\omega)\equiv\tilde{F}_3(\omega)-F(\omega)=O(1/\omega^{n+2}) \quad (\omega\to\infty) \tag{3.4}$$

である．

証明　前節と同じように考えて $F(\omega)$ の近似式

$$\tilde{F}_*(\omega)=\sum_{k=0}^{N}\left\{\sum_{l=0}^{n}\frac{g_{k+1}{}^{(l)}(t_k)-g_k{}^{(l)}(t_k)}{(i\omega)^{l+1}}\right\}e^{-i\omega t_k} \tag{3.5}$$

を得る.

ここで

$$\Phi(n,\varphi,t,\eta)\equiv\varphi(t)+\varphi'(t)\eta+\varphi''(t)\eta^2+\cdots+\varphi^{(n)}(t)\eta^n \tag{3.6}$$

なる η の多項式を考える. これは $\varphi(z)(z=t+\eta)$ の点 t を中心の Taylor 展開と比較して, $\eta^l\,(l=0,1,2,\cdots,n)$ の係数が $l!$ 倍の多項式があることに注意する. 式 (3.5) を関数 Φ を使って表わすと

$$\tilde{F}_*(\omega)=\frac{1}{i\omega}\sum_{k=0}^{N}\Phi\left(n,\,g_{k+1}-g_k,\,t_k,\,\frac{1}{i\omega}\right)e^{-i\omega t_k} \tag{3.7}$$

となる. さらに

$$\Psi(n,\varphi,t,\eta)\equiv\sum_{j=1}^{n}c_j\varphi(t+p_j\eta) \tag{3.8}$$

なる関数を考える. 次節において述べるように, この Ψ と式(3.6)の Φ が, η^n の係数まで一致するように定数の組 $\{p_j,c_j\}\,(j=1,2,\cdots,n)$ を定めることができるから, 式 (3.7) より $F(\omega)$ の近似公式として

$$\tilde{F}_3(\omega)=\frac{1}{i\omega}\sum_{k=0}^{N}\Psi\left(n,\,g_{k+1}-g_k,\,t_k,\,\frac{1}{i\omega}\right)e^{-i\omega t_k} \tag{3.9}$$

が得られる. ただし, 関数 Ψ は式 (3.8) で定義される.

式(3.9)の誤差 $E_3(\omega)$ が $O(1/\omega^{n+2})$ であることは, 式(3.5)の打切り誤差が $O(1/\omega^{n+2})$ であることと, 関数 Ψ の作り方から明らかである (証終).

4. $\{p_j, c_j\}$ の算出法

式 (3.8) を

$$\Psi=\left(\sum_{j=1}^{n}c_j\right)\varphi(t)+\left(\sum_{j=1}^{n}c_jp_j\right)\varphi'(t)\eta+\left(\frac{1}{2!}\sum_{j=1}^{n}c_jp_j^2\right)\varphi''(t)\eta^2+\cdots+\left(\frac{1}{n!}\sum_{j=1}^{n}c_jp_j^n\right)\varphi^{(n)}(t)\eta^n+\cdots$$

なる形に変形し, これと式(3.6)の Φ とが η^n の係数まで一致するものとすると, 係数比較によって

$$\sum_{j=1}^{n}c_jp_j^l=l!\quad(l=0,1,2,\cdots,n) \tag{4.1}$$

なる連立方程式ができる. 式 (4.1) は変数が $2n$ 個, 方程式が $n+1$ 個だから $n-1$ 個の変数へそれぞれに異なる任意の値を与えて, これらを既知数とすることができる. これらを $p_1,p_2,\cdots,p_{n-1}$ とする (p_n は未知数とする). とくに, $\varphi(t)$ 自身の値が用いられることが普通であるから以後 $p_1=0$ として進み, もう少し後で他の既知数 $p_2,p_3,\cdots p_{n-1}$ へ値を与えることにする.

これより $\{p_n,c_1,c_2,\cdots,c_n\}$ を求めるわけであるが, まず, p_n を $\{p_2,p_3,\cdots,p_{n-1}\}$ で表わし, 次いで $\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$ は連立一次方程式の解法によって求めることにする.

まず, 簡便のため

$$H(n,k)\equiv H(p_2,p_3,\cdots,p_{k+2};\,n,k)\equiv\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_{k+1}=n-k-1}p_2^{i_1}p_3^{i_2}\cdots p_{k+2}^{i_{k+1}} \tag{4.2}$$

なる関数を定義する. いくつか例示すると

$$H(2,0)=\sum_{i_1=1}p_2^{i_1}=p_2,$$

$$H(3,0)=\sum_{i_1=2}p_2^{i_1}=p_2^2,$$

$$H(n-1,0)=\sum_{i_1=n-2}p_2^{i_1}=p_2^{n-2},$$

$$H(n,0)=\sum_{i_1=n-1}p_2^{i_1}=p_2^{n-1},$$

$$H(3,1)=\sum_{i_1+i_2=1}p_2^{i_1}p_3^{i_2}=p_3+p_2,$$

$$H(4,1)=\sum_{i_1+i_2=2}p_2^{i_1}p_3^{i_2}=p_3^2+p_3p_2+p_2^2,$$

$$H(n-1,1)=\sum_{i_1+i_2=n-3}p_2^{i_1}p_3^{i_2}=p_3^{n-3}+p_3^{n-4}p_2+\cdots+p_2^{n-3},$$

$$H(n,1)=\sum_{i_1+i_2=n-2}p_2^{i_1}p_3^{i_2}=p_3^{n-2}+p_3^{n-3}p_2+\cdots+p_2^{n-2},$$

$$H(4,2)=\sum_{i_1+i_2+i_3=1}p_2^{i_1}p_3^{i_2}p_4^{i_3}=p_4+p_3+p_2,$$

$$H(5,2)=\sum_{i_1+i_2+i_3=2}p_2^{i_1}p_3^{i_2}p_4^{i_3}=p_4^2+p_4p_3+p_3^2+p_3p_2+p_2^2+p_2p_4,$$

$$H(n-1,2)=\sum_{i_1+i_2+i_3=n-4}p_2^{i_1}p_3^{i_2}p_4^{i_3}=p_4^{n-4}+p_4^{n-5}p_3+\cdots+p_3^{n-4}+(p_4^{n-5}+p_4^{n-6}p_3+\cdots+p_3^{n-5})p_2+\cdots+p_2^{n-4},$$

$$H(n,2)=\sum_{i_1+i_2+i_3=n-3}p_2^{i_1}p_3^{i_2}p_4^{i_3}=p_4^{n-3}+p_4^{n-4}p_3+\cdots+p_3^{n-3}+(p_4^{n-4}+p_4^{n-5}p_3+\cdots+p_3^{n-4})p_2+\cdots+p_2^{n-3},$$

$$H(n-1,n-3)=\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_{n-2}=1}p_2^{i_1}p_3^{i_2}\cdots p_{n-1}^{i_{n-2}}=p_{n-1}+p_{n-2}+\cdots+p_2,$$

$$H(n,n-3)=\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_{n-2}=2} p_2^{i_1}p_3^{i_2}\cdots p_{n-1}^{i_{n-2}}$$
$$=p_{n-1}^2+p_{n-1}p_{n-2}+\cdots+p_2^2,$$
$$H(n,n-2)=\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_{n-1}=1} p_2^{i_1}p_3^{i_2}\cdots p_n^{i_{n-1}}$$
$$=p_n+p_{n-1}+\cdots+p_2. \tag{4.3}$$

さて，$p_1=0$ に選んでいるから，式(4.1)より

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{j=2}^{n} c_j p_j=1!,\\
&\sum_{j=2}^{n} c_j p_j^2=2!,\\
&\sum_{j=2}^{n} c_j p_j^3=3!,\\
&\sum_{j=2}^{n} c_j p_j^4=4!,\\
&\quad\cdots\cdots,\\
&\sum_{j=2}^{n} c_j p_j^{n-1}=(n-1)!,\\
&\sum_{j=2}^{n} c_j p_j^{n}=n!
\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

を得る．

式(4.4)の第1式に，$H(2,0),H(3,0),\cdots,H(n-1,0),H(n,0)$ を掛けて，第2式，第3式，…，第 $n-1$ 式，第 n 式から辺々引くと

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{j=3}^{n} c_j p_j(p_j-p_2)=2!-H(2,0),\\
&\sum_{j=3}^{n} c_j p_j(p_j-p_2)(p_j+p_2)\\
&\quad=3!-H(3,0),\\
&\sum_{j=3}^{n} c_j p_j(p_j-p_2)(p_j^2+p_jp_2+p_2^2)\\
&\quad=4!-H(4,0),\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&\sum_{j=3}^{n} c_j p_j(p_j-p_2)(p_j^{n-3}\\
&\qquad+p_j^{n-4}p_2+\cdots+p_2^{n-3})\\
&\quad=(n-1)!-H(n-1,0),\\
&\sum_{j=3}^{n} c_j p_j(p_j-p_2)(p_j^{n-2}\\
&\qquad+p_j^{n-3}p_2+\cdots+p_2^{n-2})\\
&\quad=n!-H(n,0)
\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

が得られる．式(4.5)の第1式に $H(3,1),H(4,1),\cdots,H(n-1,1)$，$H(n,1)$ を掛けて第2式，第3式，…，第 $n-2$ 式，第 $n-1$ 式から辺々引くと

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{j=4}^{n} c_j p_j(p_j-p_2)(p_j-p_3)\\
&\quad=3!-H(3,0)\\
&\qquad-H(3,1)\{2!-H(2,0)\},\\
&\sum_{j=4}^{n} c_j p_j(p_j-p_2)(p_j-p_3)(p_j+p_3+p_2)\\
&\quad=4!-H(4,0)-H(4,1)\{2!-H(2,0)\},\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&\sum_{j=4}^{n} c_j p_j(p_j-p_2)(p_j-p_3)\{p_j^{n-4}\\
&\qquad+p_j^{n-5}p_3+\cdots+p_3^{n-4}\\
&\qquad+(p_j^{n-5}+p_j^{n-6}p_3+\cdots\\
&\qquad+p_3^{n-5})p_2+\cdots+p_2^{n-4}\}\\
&\quad=(n-1)!-H(n-1,0)\\
&\qquad-H(n-1,1)\{2!-H(2,0)\},\\
&\sum_{j=4}^{n} c_j p_j(p_j-p_2)(p_j-p_3)\{p_j^{n-3}\\
&\qquad+p_j^{n-4}p_3+\cdots+p_3^{n-3}\\
&\qquad+(p_j^{n-4}+p_j^{n-5}p_3+\cdots\\
&\qquad+p_3^{n-4})p_2+\cdots+p_2^{n-3}\}\\
&\quad=n!-H(n,0)-H(n,1)\{2!-H(2,0)\}
\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

が得られる．

この操作を $n-2$ 回繰返すと，それぞれの左辺に c_n の一次の項を一つだけ含んだ二つの式

$$\left.\begin{aligned}
&c_np_n(p_n-p_2)(p_n-p_3)\cdots(p_n-p_{n-1})\\
&\quad=(n-1)!-H(n-1,0)-H(n-1,1)\\
&\qquad\times\{2!-H(2,0)\}-H(n-1,2)\\
&\qquad\times[3!-H(3,0)-H(3,1)\\
&\qquad\times\{2!-H(2,0)\}]-\cdots-H(n-1,n-3)\\
&\qquad\times((n-2)!-H(n-2,0)\\
&\qquad-H(n-2,1)\{2!-H(2,0)\}-\cdots\\
&\qquad-H(n-2,n-4)[(n-3)!-H(n-3,0)\\
&\qquad-H(n-3,1)\{2!-H(2,0)\}]),\\
&c_np_n(p_n-p_2)(p_n-p_3)\cdots(p_n-p_{n-1})\\
&\qquad\times(p_n+p_{n-1}+p_{n-2}+\cdots+p_2)\\
&\quad=n!-H(n,0)-H(n,1)\{2!-H(2,0)\}\\
&\qquad-H(n,2)[3!-H(3,0)\\
&\qquad-H(3,1)\{2!-H(2,0)\}-\cdots\\
&\qquad-H(n,n-3)((n-2)!-H(n-2,0)\\
&\qquad-H(n-2,1)\{2!-H(2,0)\}-\cdots\\
&\qquad-H(n-2,n-4)[(n-3)!-H(n-3,0)\\
&\qquad-H(n-3,1)\{2!-H(2,0)\}])
\end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

が残る．これらの比をとれば，p_n が求められるわけであるが，実際には次のようにすればよい．

新しい関数 $G(n,k)$ を漸化式

$$\left.\begin{aligned}
&G(n,1)=n!-H(n,0),\\
&G(n,k+1)=G(n,k)-H(n,k)G(k+1,k)\\
&\qquad\qquad(k=1,2,\cdots,n-3)
\end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

Table 1 Table of values of $\tilde{F}_1(\Omega)$, $F(\Omega)$, $E_1(\Omega)$ for the function

$$f(t)=-\frac{1}{2}(t-\pi)\ (0<t<2\pi),\quad f(0)=f(2\pi)=0$$

Ω	① $\tilde{F}_1(\Omega)$ ((1.2))*		② $F(\Omega)$ ((1.3))		③ $E_1(\Omega)$ (=①−②)		④ $\tilde{F}_1(\Omega)$ ((1.4))	
0	0.28573E-11	0.	0.	0.	0.28573E-11	0.	0.	0.
1	-0.14286E-10	-0.31315E 01	0.	-0.31416E 01	-0.14286E-10	0.10100E-01	0.	-0.31315E 01
2	-0.14286E-11	-0.15506E 01	0.	-0.15709E 01	-0.14286E-11	0.20238E-01	0.	-0.15506E 01
3	0.30001E-10	-0.10167E 01	0.	-0.10472E 01	0.30001E-10	0.30456E-01	0.	-0.10167E 01
4	0.10395E-22	-0.74460E 00	0.	-0.78540E 00	0.10395E-22	0.40794E-01	0.	-0.74460E 00
5	-0.18572E-10	-0.57702E 00	0.	-0.62832E 00	-0.18572E-10	0.51296E-01	0.	-0.57702E 00
6	0.71432E-11	-0.46159E 00	0.	-0.52360E 00	0.71432E-11	0.62008E-01	0.	-0.46159E 00
7	0.29287E-10	-0.37582E 00	0.	-0.44880E 00	0.29287E-10	0.72982E-01	0.	-0.37582E 00
8	-0.42859E-11	-0.30843E 00	0.	-0.39270E 00	-0.42859E-11	0.84274E-01	0.	-0.30843E 00
9	-0.85718E-11	-0.25312E 00	0.	-0.34907E 00	-0.85718E-11	0.95948E-01	0.	-0.25312E 00
10	-0.71432E-11	-0.20608E 00	0.	-0.31416E 00	-0.71432E-11	0.10808E 00	0.	-0.20608E 00
11	0.16631E-21	-0.16486E 00	0.	-0.28560E 00	0.16631E-21	0.12074E 00	0.	-0.16486E 00
12	0.10395E-22	-0.12775E 00	0.	-0.26180E 00	0.10395E-22	0.13405E 00	0.	-0.12775E 00
13	-0.42859E-11	-0.93560E-01	0.	-0.24166E 00	-0.42859E-11	0.14810E 00	0.	-0.93560E-01
14	0.21429E-10	-0.61350E-01	0.	-0.22440E 00	0.21429E-10	0.16305E 00	0.	-0.61350E-01
15	0.40002E-10	-0.30377E-01	0.	-0.20944E 00	0.40002E-10	0.17906E 00	0.	-0.30377E-01
16	-0.57145E-11	0.	0.	-0.19635E 00	-0.57145E-11	0.19635E 00	0.	0.
17	0.85718E-11	0.30377E-01	0.	-0.18480E 00	0.85718E-11	0.21518E 00	0.	0.30377E-01
18	0.10000E-10	0.61350E-01	0.	-0.17453E 00	0.10000E-10	0.23588E 00	0.	0.61350E-01
19	-0.42859E-11	0.93560E-01	0.	-0.16535E 00	-0.42859E-11	0.25891E 00	0.	0.93560E-01
20	0.10395E-22	0.12775E 00	0.	-0.15708E 00	0.10395E-22	0.28483E 00	0.	0.12775E 00
21	-0.71432E-11	0.16486E 00	0.	-0.14960E 00	-0.71432E-11	0.31446E 00	0.	0.16486E 00
22	0.14286E-11	0.20608E 00	0.	-0.14280E 00	0.14286E-11	0.34888E 00	0.	0.20608E 00
23	0.10715E-10	0.25312E 00	0.	-0.13659E 00	0.10715E-10	0.38971E 00	0.	0.25312E 00
24	-0.42859E-11	0.30843E 00	0.	-0.13090E 00	-0.42859E-11	0.43932E 00	0.	0.30843E 00
25	0.25715E-10	0.37582E 00	0.	-0.12566E 00	0.25715E-10	0.50148E 00	0.	0.37582E 00
26	0.42859E-11	0.46159E 00	0.	-0.12083E 00	0.42859E-11	0.58242E 00	0.	0.46159E 00
27	-0.25715E-10	0.57702E 00	0.	-0.11636E 00	-0.25715E-10	0.69338E 00	0.	0.57702E 00
28	0.10395E-22	0.74460E 00	0.	-0.11220E 00	0.10395E-22	0.85680E 00	0.	0.74460E 00
29	0.18572E-10	0.10167E 01	0.	-0.10833E 00	0.18572E-10	0.11251E 01	0.	0.10167E 01
30	-0.24287E-10	0.15506E 01	0.	-0.10472E 00	-0.24287E-10	0.16553E 01	0.	0.15506E 01
31	-0.80003E-10	0.31315E 01	0.	-0.10134E 00	-0.80003E-10	0.32328E 01	0.	0.31315E 01

* using (1.2) by Cooley-Tupey's method (N=32)

Table 2 Values of constants $\{p_j, c_j\}$

$n=3$

$p_j\ (j=1\sim3)$

```
0.
0.100000000000000000000E 01
0.400000000000000000000E 01
```

$c_j\ (j=1\sim3)$

```
0.250000000000000000000E 00
0.666666666666666666667E 00
0.833333333333333333333E-01
```

$n=4$

$p_j\ (j=1\sim4)$

```
0.
0.100000000000000000000E 01
0.200000000000000000000E 01
0.500000000000000000000E 01
```

$c_j\ (j=1\sim4)$

```
0.300000000000000000000E 00
0.500000000000000000000E 00
0.166666666666666666667E 00
0.333333333333333333333E-01
```

$n=5$

$p_j\ (j=1\sim5)$

```
0.
0.100000000000000000000E 01
0.200000000000000000000E 01
0.300000000000000000000E 01
0.750000000000000000000E 01
```

$c_j\ (j=1\sim5)$

```
0.255555555555555555556E 00
0.692307692307692307691E 00
-0.136363636363636363635E 00
0.185185185185185185185E 00
0.331520331520331520332E-02
```

$n=6$

$p_j\ (j=1\sim6)$

```
0.
0.100000000000000000000E 01
0.200000000000000000000E 01
0.300000000000000000000E 01
0.400000000000000000000E 01
0.771428571428571428571E 01
```

$c_j\ (j=1\sim6)$

```
0.257716049382716049383E 00
0.680851063829787234042E 00
-0.112499999999999999999E 00
0.161616161616161616161E 00
0.961538461538461538493E-02
0.270134055595048502850E-02
```

$n=7$

$p_j\ (j=1\sim7)$

```
0.
0.100000000000000000000E 01
0.200000000000000000000E 01
0.300000000000000000000E 01
0.400000000000000000000E 01
0.500000000000000000000E 01
0.116842105263157894737E 02
```

$c_j\,(j=1\sim7)$

```
 0.243768768768768768769E 00
 0.768472906403940886698E 00
-0.339673913043478260867E 00
 0.468686868686868686865E 00
-0.210616438356164383560E 00
 0.692913385826771653539E-01
 0.704689573871367399156E-04
```

$n=8$

$p_j\,(j=1\sim8)$

```
0.
0.100000000000000000000E 01
0.200000000000000000000E 01
0.300000000000000000000E 01
0.400000000000000000000E 01
0.500000000000000000000E 01
0.600000000000000000000E 01
0.977777777777777777778E 01
```

$c_j\,(j=1\sim8)$

```
 0.238762626262626262624E 00
 0.805063291139240506338E 00
-0.453571428571428571446E 00
 0.663023679417122040090E 00
-0.403846153846153846164E 00
 0.176744186046511627910E 00
-0.266339869281045751637E-01
 0.457786480186555810602E-03
```

$n=9$

$p_j\,(j=1\sim9)$

```
0.
0.100000000000000000000E 01
0.200000000000000000000E 01
0.300000000000000000000E 01
0.400000000000000000000E 01
0.500000000000000000000E 01
0.600000000000000000000E 01
0.700000000000000000000E 01
0.184000000000000000000E 02
```

$c_j\,(j=1\sim9)$

```
 0.233057280883367839872E 00
 0.852107279693486590139E 00
 0.100721500721500721540E 01
-0.835648148148148148505E 00
-0.622560975609756097822E 00
 0.513432835820895522589E 00
-0.180017921146953405082E 00
 0.324143692564745196414E-01
 0.272035625963771462529E-06
```

$n=10$

$p_j\,(j=1\sim10)$

```
0.
0.100000000000000000000E 01
0.200000000000000000000E 01
0.300000000000000000000E 01
0.400000000000000000000E 01
0.500000000000000000000E 01
0.600000000000000000000E 01
0.700000000000000000000E 01
0.800000000000000000000E 01
0.105307692307692307692E 02
```

$c_j\,(j=1\sim10)$

```
 0.226772090623441974820E 00
-0.866298467087466184666E 00
 0.143365785813630041393E 01
 0.910857450324762673166E 00
-0.174214762465645857514E 01
 0.159527862898649415254E 01
-0.786978871910960194213E 00
 0.274468305840854859760E 00
-0.462711680416847588915E-01
 0.661797784715638704572E-03
```

$n=11$

$p_i\,(j=1\sim11)$

```
0.
0.100000000000000000000E 01
0.200000000000000000000E 01
0.300000000000000000000E 01
0.400000000000000000000E 01
0.500000000000000000000E 01
0.600000000000000000000E 01
0.700000000000000000000E 01
0.800000000000000000000E 01
0.900000000000000000000E 01
0.434271356783919597990E 02
```

$c_j\,(j=1\sim11)$

```
 0.224878622795771603965E 00
-0.954506596427993804761E 00
 0.194702279761126366401E 01
 0.930130482845749930251E 00
-0.216567857931854671743E 01
 0.183419515226848973725E 01
-0.121592224609141901553E 01
 0.516843045674608645321E 00
-0.133193853427895980225E 00
 0.164311740687452261458E-01
 0.122871100727904972637E-11
```

Table 3 Values of constants $\{p_j, c_j\}$

$n=3$

$p_j\,(j=1\sim3)$

```
0.
0.100000000000000000000E 01
0.400000000000000000000E 01
```

$c_j\,(j=1\sim3)$

```
0.250000000000000000000E 00
0.666666666666666666667E 00
0.833333333333333333333E-01
```

$n=4$

$p_j\ (j=1\sim4)$

```
 0.
 0.100000000000000000000E 01
-0.100000000000000000000E 01
 0.440000000000000000000E 01
```

$c_i\ (j=1\sim4)$

```
 0.136363636363636363636E 00
 0.764705882352941176470E 00
 0.370370370370370370370E-01
 0.618934442463854228560E-01
```

$n=5$

$p_i\ (j=1\sim5)$

```
 0.
 0.100000000000000000000E 01
-0.100000000000000000000E 01
 0.200000000000000000000E 01
 0.583333333333333333333E 01
```

$c_j\ (j=1\sim5)$

```
 0.471428571428571428571E 00
 0.241379310344827586207E 00
-0.406504065040650406504E-01
 0.311594202898550724638E 00
 0.162483218321153012344E-01
```

$n=6$

$p_j\ (j=1\sim6)$

```
 0.
 0.100000000000000000000E 01
-0.100000000000000000000E 01
 0.200000000000000000000E 01
-0.200000000000000000000E 01
 0.646808510638297872340E 01
```

$c_j\ (j=1\sim6)$

```
 0.866776315789473684211E 00
-0.134889753566796368353E 00
-0.235517568850902184236E 00
 0.456746031746031746032E 00
 0.374790619765494137354E-01
 0.940591290564370861069E-02
```

$n=7$

$p_j\ (j=1\sim7)$

```
 0.
 0.100000000000000000000E 01
-0.100000000000000000000E 01
 0.200000000000000000000E 01
-0.200000000000000000000E 01
 0.300000000000000000000E 01
 0.809815950920245398773E 01
```

$c_j\ (j=1\sim7)$

```
 0.213383838383838383854E-01
 0.100605012964563526361E 01
 0.903573836817262306130E-01
-0.355885311871227364184E 00
-0.143074119076549210205E-01
 0.250461291616526273566E 00
 0.198553499661067902953E-02
```

$n=8$

$p_j\ (j=1\sim8)$

```
 0.
 0.100000000000000000000E 01
-0.100000000000000000000E 01
 0.200000000000000000000E 01
-0.200000000000000000000E 01
 0.300000000000000000000E 01
-0.300000000000000000000E 01
 0.866334991708126036484E 01
```

$c_j\ (j=1\sim8)$

```
-0.788295473881231921050E 00
 0.178922311188054533651E 01
 0.574909902179509181399E 00
-0.775248880039820806372E 00
-0.172558320373250388803E 00
 0.348827070115503497641E 00
 0.219410082626348800102E-01
 0.120158185611022066654E-02
```

$n=9$

$p_j\ (j=1\sim9)$

```
 0.
 0.100000000000000000000E 01
-0.100000000000000000000E 01
 0.200000000000000000000E 01
-0.200000000000000000000E 01
 0.300000000000000000000E 01
-0.300000000000000000000E 01
 0.400000000000000000000E 01
 0.102304409672830725462E 02
```

$c_j\ (j=1\sim9)$

```
 0.128336268693610184155E 01
-0.806493039502748240613E 00
-0.440227992400253324890E 00
 0.123353784998271690287E 01
 0.109015662557183841203E 00
-0.547961614969287603559E 00
-0.120553686836882192221E-01
 0.180556642748423570341E 00
 0.265173331551232316129E-03
```

$n=10$

$p_j\ (j=1\sim10)$

```
 0.
 0.100000000000000000000E 01
-0.100000000000000000000E 01
 0.200000000000000000000E 01
-0.200000000000000000000E 01
 0.300000000000000000000E 01
-0.300000000000000000000E 01
 0.400000000000000000000E 01
-0.400000000000000000000E 01
 0.108174730107956817273E 02
```

$c_j\ (j=1\sim10)$

```
 0.349444074820167521937E 01
-0.296668363641300289844E 01
-0.191523066772681903538E 01
 0.258224294297698673620E 01
 0.733382335355804075100E 00
-0.104271072450496024135E 01
-0.165027829164413118693E 00
 0.262853641353905275784E 00
 0.165780599785281572187E-01
 0.155129942295830188742E-03
```

$n=11$

$p_j\,(j=1\sim11)$	$c_j\,(j=1\sim11)$
0.	-0.223972609634419565100E 01
0.100000000000000000000E 01	0.390560179562825392327E 01
-0.100000000000000000000E 01	0.132299735440918034542E 01
0.200000000000000000000E 01	-0.300918359332564073201E 01
-0.200000000000000000000E 01	-0.457322181246407042081E 00
0.300000000000000000000E 01	0.194756760801490286772E 01
-0.300000000000000000000E 01	0.961787267188135921102E-01
0.400000000000000000000E 01	-0.696373678649610376155E 00
-0.400000000000000000000E 01	-0.854444071786918993707E-02
0.500000000000000000000E 01	0.141771257876726971214E 00
0.124039314065775456201E 02	0.362476358452914500149E-04

Table 4 $\tilde F_3(\omega)$, $F(\omega)$, $E_3(\omega)$ using constants of $n=4$ in Table 2 for $f(t)=e^{-t}\,(0\le t\le\pi),\ =e^{t}(\pi\le t\le 2\pi)$

ω	$\tilde F_3(\omega)$		$F(\omega)$		$E_3(\omega)$	
1	302.40441523864	284.50916026532	279.83778107166	278.79456700012	22.56663416698	5.71459326520
2	102.63768230192	205.10406414605	102.66154983639	204.55767066404	-0.02386753447	0.54639348201
3	55.93756655137	167.32671847194	55.96755628148	167.27674021944	-0.02998973010	0.04997825250
4	30.18750773672	120.33497683331	30.19457352650	120.32804156839	-0.00706578977	0.00693526491
5	21.52363962866	107.23036019224	21.52598320622	107.22867963556	-0.00234357756	0.00168055668
6	13.87240527581	82.92922934703	13.87318246427	82.92878540512	-0.00077718845	0.00044394191
7	11.19315982307	78.06264646351	11.19351129583	78.06247877422	-0.00035147275	0.00016768928
8	7.89689343620	62.94088289281	7.89704233751	62.94082174589	-0.00014890130	0.00006114691
9	6.82523014571	61.19883687933	6.82531177555	61.19880740297	-0.00008162984	0.00002947635
10	5.08221462485	50.63309981068	5.08225497719	50.63308680197	-0.00004035234	0.00001300871
11	4.58747957745	50.27443743404	4.58750466507	50.27443012315	-0.00002508761	0.00000731088
12	3.54003973674	42.32228034827	3.54005349194	42.32227669097	-0.00001375519	0.00000365730
13	3.29219990497	42.63917136145	3.29220923790	42.63916907878	-0.00000933292	0.00000228267
14	2.60561765785	36.34273461438	2.60562313487	36.34273336874	-0.00000547702	0.00000124564
15	2.47643662997	37.00812920881	2.47644061615	37.00812836783	-0.00000398617	0.00000084098
16	1.99730396462	31.83777024666	1.99730645451	31.83776975539	-0.00000248989	0.00000049127
17	1.92991387931	32.68625993654	1.92991576911	32.68625958636	-0.00000188979	0.00000035017
18	1.57940728649	28.32336999964	1.57940849247	28.32336978637	-0.00000120597	0.00000021327
19	1.54606417713	29.26572819333	1.54606514875	29.26572803268	-0.00000097161	0.00000016065
20	1.28006857463	25.50594407762	1.28006923015	25.50594397517	-0.00000065552	0.00000010244
21	1.26623382377	26.49179151840	1.26623435731	26.49179143924	-0.00000053404	0.00000007916
22	1.05836617229	23.19726167479	1.05836654240	23.19726162287	-0.00000037011	0.00000005192
23	1.05599136781	24.19726435188	1.05599167631	24.19726431020	-0.00000030850	0.00000004167
24	0.88961464272	21.27116162353	0.88961486180	21.27116159535	-0.00000021908	0.00000002817
25	0.89405027806	22.26793668838	0.89405046446	22.26793666579	-0.00000018640	0.00000002258
26	0.75820928506	19.63995362585	0.75820942017	19.63995361002	-0.00000013511	0.00000001583
27	0.76667877786	20.62315974782	0.76667889459	20.62315975478	-0.00000011672	0.00000001303
28	0.65389520966	18.24081140570	0.65389526071	18.24081139802	-0.00000005104	0.00000000768
29	0.66469781661	19.20437635970	0.66469789202	19.20437635178	-0.00000007540	0.00000000791
30	0.56970894648	17.02755305753	0.56970900258	17.02755305217	-0.00000005610	0.00000000535
31	0.58178334854	17.96804902399	0.58178339858	17.96804901934	-0.00000005004	0.00000000465
32	0.50078804406	15.96547673933	0.50078808200	15.96547673596	-0.00000003794	0.00000000337

Table 5 $\tilde F_3(\omega)$, $F(\omega)$, $E_3(\omega)$ using constants of $n=11$ in Table 3 for $f(t)=e^{-t}(0\le t<\pi),\ =e^{t}(\pi\le t\le 2\pi)$

ω	$\tilde F_3(\omega)$		$F(\omega)$		$E_3(\omega)$	
1	279.31989488005	283.54926993653	279.83778107166	278.79456700012	-0.51788619160	4.77470293641
2	102.66024023015	204.55777491442	102.66154983639	204.55767066404	-0.00130960624	0.00010425038
3	55.96754838107	167.27673634327	55.96755628148	167.27674021944	-0.00000790040	-0.00000387616
4	30.19457342172	120.32804140169	30.19457352650	120.32804156839	-0.00000010477	-0.00000016670
5	21.52598323742	107.22867960575	21.52598320622	107.22867963556	0.00000003119	-0.00000002980
6	13.87318248720	82.92878530953	13.87318246427	82.92878540512	0.00000002293	-0.00000000558
7	11.19351136439	78.06247875560	11.19351129583	78.06247877422	0.00000006856	-0.00000001862
8	7.89704235084	62.94082173751	7.89704233751	62.94082174589	0.00000001332	-0.00000000838
9	6.82531181664	61.19880738947	6.82531177555	61.19880740297	0.00000004109	-0.00000001350
10	5.08225500700	50.63308679405	5.08225497719	50.63308680197	0.00000002980	-0.00000000791
11	4.58750469522	50.27443011570	4.58750466507	50.27443012315	0.00000003015	-0.00000000745
12	3.54005351365	42.32227668492	3.54005349194	42.32227669097	0.00000002171	-0.00000000605
13	3.29220925318	42.63916907319	3.29220923790	42.63916907878	0.00000001527	-0.00000000558
14	2.60562318848	36.34273336175	2.60562313487	36.34273336874	0.00000005360	-0.00000000698
15	2.47644063489	37.00812836317	2.47644061615	37.00812836783	0.00000001874	-0.00000000465
16	1.99730646611	31.83776975213	1.99730645451	31.83776975539	0.00000001159	-0.00000000325
17	1.92991578117	32.68625958310	1.92991576911	32.68625958636	0.00000001206	-0.00000000325
18	1.57940853082	28.32336977962	1.57940849247	28.32336978637	0.00000003835	-0.00000000675
19	1.54606516321	29.26572803221	1.54606514875	29.26572803268	0.00000001446	-0.00000000046
20	1.28006923935	25.50594397331	1.28006923015	25.50594397517	0.00000000919	-0.00000000186
21	1.26623436497	26.49179143644	1.26623435781	26.49179143924	0.00000000715	-0.00000000279
22	1.05836655168	23.19726162054	1.05836654240	23.19726162287	0.00000000928	-0.00000000232
23	1.05599168657	24.19726430810	1.05599167631	24.19726431020	0.00000001025	-0.00000000209
24	0.88961486664	21.27116159279	0.88961486180	21.27116159535	0.00000000483	-0.00000000256
25	0.89405047581	22.26793666277	0.89405046446	22.26793666579	0.00000001135	-0.00000000302
26	0.75820942906	19.63995360769	0.75820942017	19.63995361002	0.00000000888	-0.00000000232
27	0.76667890416	20.62315975199	0.76667889459	20.62315975478	0.00000000956	-0.00000000279
28	0.65389529911	18.24081139382	0.65389526071	18.24081139802	0.00000003840	-0.00000000419
29	0.66469790227	19.20437635015	0.66469789202	19.20437635178	0.00000001025	-0.00000000162
30	0.56970901018	17.02755305008	0.56970900258	17.02755305217	0.00000000760	-0.00000000209
31	0.58178340375	17.96804901771	0.58178339858	17.96804901934	0.00000000517	-0.00000000162
32	0.50078808917	15.96547673491	0.50078808200	15.96547673596	0.00000000717	-0.00000000104

によって定義すると，式 (4.7) の特有の形から p_n は

$$p_n = G(n, n-2)/G(n-1, n-2) - \sum_{j=2}^{n-1} p_j \tag{4.9}$$

で表わされることは容易にわかる.

Table 2, 3 にそれぞれ

$$p_1=0,\ p_2=1,\ p_3=2,\ p_4=3,\ \cdots,\ p_{n-1} = n-2, \tag{4.10}$$

$$p_1=0,\ p_2=1,\ p_3=-1,\ p_4=2,\ p_5=-2,\ \cdots,$$

$$p_{n-1} = (-1)^{n-3}\left[\frac{n-1}{2}\right] \quad ([\ ] \text{ は Gauss 記号}) \tag{4.11}$$

と選んだばあいの $\{p_j, c_j\}$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ を示す.

Table 4, 5 はそれぞれ，Table 2 の $n=4$, Table 3 の $n=11$ の係数 $\{p_j, c_j\}$ を用いて，関数 $f(t)=g_1(t)=e^{-t}$ $(0 \leq t < \pi)$, $=g_2(t)=e^t$ $(\pi \leq t \leq 2\pi)$ に対して，近似公式 (3.2) を適用したばあいの結果を示したものである．Table 1 と同様，$\bar{F}_3(\omega)$ などの各項は左側が実数部，右側が虚数部を表わす.

いずれのばあいも，ω が大きくなると誤差 $E_3(\omega)$ が急激に減少していく様子がよく見える.

さらに，Table 5 の $E_3(\omega)$ の方が Table 4 の $E_3(\omega)$ よりも，減少の仕方が著しいこともわかる.

5. あとがき

有限 Fourier 積分を計算する際，Goertzel 法は式 (3.2) の

$$\frac{1}{i\omega}\left[\sum_{j=1}^{n} c_j \left\{ g_{k+1}\left(t_k + \frac{p_j}{i\omega}\right) - g_k\left(t_k + \frac{p_j}{i\omega}\right)\right\}\right]$$

なる関数に対して適用すればよく，演算回数も，1. において $f(t)$ へ適用したときと同じく $1/2N^2$ で済む．しかし，Cooley-Tukey 法の適用は，それほど単純ではなく，演算回数も 1. のときより多くなるようである.

定数の組 $\{p_j, c_j\}$ の例を2とおり示したが，式 (4.10) よりも式 (4.11) から出発して，他の定数を決める方が，それぞれの $|p_j|$ の値を小さくできるようである．$|p_j|$ は小さい方が望ましいであろうが，次数 n を与えたばあいに，どのような組 $\{p_j, c_j\}$ を用いるべきであろうか.

参考文献

1) J. W. Cooley, J. W. Tukey: "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series", Math. of Comput., 19, 90, 1965, pp. 297-301.
2) G. Goertzel: "An algorithm for the evaluation of finite trigonometric series", Amer. Math. Mon. 65, 1958, pp. 34-35.
3) C. J. Tranter: Integral transforms in mathematical physics, 2nd ed. 1956, pp. 60-76.
4) 吉沢　正: 数値解析 II, 岩波, 1968, pp. 136-151.

(昭和 45 年 4 月 13 日受付)