寄　　　書

二値論理関数の図式表示における一考察*

宮 腰 秀 勝**

1. まえがき

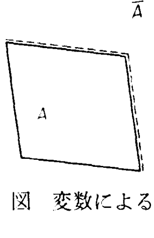
従来より論理関数の基本公式の証明，およびその展開式の簡単化の説明に多く，Venn 図表，Karnaugh 図表などが用いられているが，これらの図表表示法が，ほとんど平面的な展開表示法によって説明を行っており，また，変数の数が増加することによって，表示法や説明が変わることもあるのは周知のことである．

筆者はこれらの従来の方法と全く別個な立体的な図表表示を行なう方法を考案してみた．この方法によって，より実物的に，直観的に，かつ，簡単化のための操作の手数が少なく，かつまた，変数の増加に対しても説明方法が一貫しており，学習者の理解のために便利な一方法と思われるので，ここにその考え方および方法を述べたいと思う．

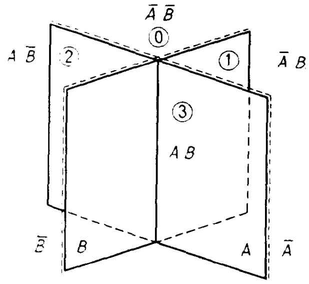
2. 論理積，論理和，否定の表現

一つの無限平面を考え，これによって分たれる表側の半空間が集合 A を表わし，裏側の半空間が補集合 $\bar{A}$ を表わすものとする（**第1図**参照）．

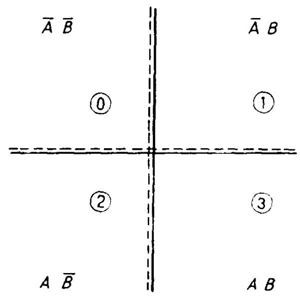
二変数 A, B による場合は，表側半空間がそれぞれ集合 A, B を示し（したがって，裏側半空間がそれぞれ補集合 $\bar{A}$，$\bar{B}$ を示す）直交する二つの無限平面をもってこれを表わす（**第2図**参照）．**第3図**は第2図の俯瞰図である．



第 1 図　変数による表示



第 2 図　2変数による立体表示



第 3 図　第2図を真上から見た図

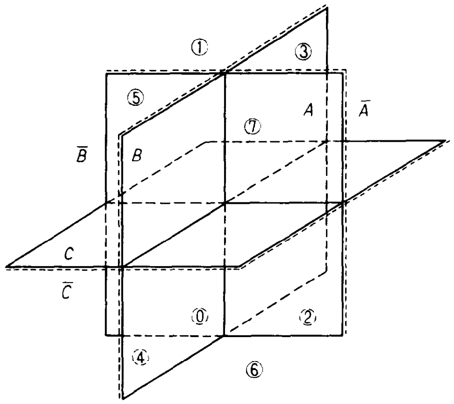
第4図は直交する三つの無限平面をもって，三変数 A, B, C の場合を表わしている．

第2図によれば積集合，すなわち and 回路はその定義からいって $\bar{A}\bar{B}$, $\bar{A}B$, $A\bar{B}$, AB のような A, B 二面で生ずる四つの共有半空間を示すということは明らかであり，積集合がゼロをいうことは，変数間に共有する空間を持たないことを示す．たとえば，$A\times\bar{A}=0$, のごときものである．

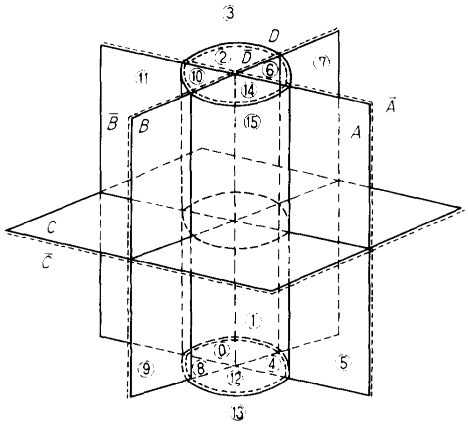
つぎに和集合，すなわち or 回路はその定義からいって，$\bar{A}+\bar{B}$, $\bar{A}+B$, $A+\bar{B}$, $A+B$ のごとき，A, B 二面で生ずる4とおりの半空間の和を示すことは明らかで和集合が1ということは常に空間の存在すること

* One Method of Graphical Expression of Binary Logical Function, by Hidekatsu Miyakoshi (Section of Electrical Engineering, Kushiro Technical College)

** 釧路工業高等専門学校・電気工学科



第 4 図　3 変数による立体表示



第 5 図　4 変数による立体表示

を示している．たとえば，$A+\bar{A}=1$ のごときものである．

補集合，すなわち否定回路は，その変数を示す半空間の反対側ということを意味する．

この基本的な考え方は，三変数以上になっても変わりはなく，第 4 図，**第 5 図**などにより三変数，四変数の場合においても，8 とおり，16 とおりの最小項と最大項を得る．一般に主加法標準形での最小項は，多面体状の半空間で示され，主乗法標準形の最大項は，多面体状の半空間の和で示される．

3. 論理積，論理和，否定の間の関係

幾つかの空間が集まって，ある半空間の和を作る場合がある．逆に幾つかの半空間の和で，ある空間を形成することがある．たとえば，第 2 図において，区画された 4 つの空間に図のごとく番号を付し，①, ②, ③の区画空間を加え集めるごとき操作を，いま，$\Sigma(1, 2, 3)$ のごとき表現で表わすと，$A=\Sigma(2, 3)=A\bar{B}+AB$，$B=\Sigma(1,3)=\bar{A}B+AB$，したがって，$A+B=\Sigma(1,2,3)$ となり，最大項が最小項の和に分けられる．逆に最小項の和で最大項が成り立つ．

つぎに否定は反対側ということであるから，例として第 3 図を用いて $A+B$ を考えてみると，これは A 面と B 面のおのおのの反対側ということであるから，図より⓪番の区画である．つまり $\overline{A+B}=\bar{A}\cdot\bar{B}$ である．また，$A\cdot B$ を考えると，③番区画空間以外ということであるから，それは $\Sigma(0,1,2)=\bar{A}+\bar{B}$ と考えてよい．以上述べたことは，すなわち，ド・モルガンの定理である．

すなわち，最大項の補元は最小項であり，最小項の補元は最大項であるといえる．

以上の諸例でもわかるとおり，立体的に表示されると，その図を見ながらきわめて直観的に，計算，または図表を作ることなく容易に結果を求めうる．また，いろいろな問題に対して，一つの図で処理しうることが特徴である．

上例は 2 変数での例を示したが，3 変数以上であっても，考え方，表示の方法は同じ要領であって，ただ，平面によって区切られる空間の個数が，3 変数の場合 8 区画 ($2^3=8$)，4 変数の場合 16 区画 ($2^4=16$)，5 変数の場合 32 区画 ($2^5=32$) と増加するだけである．

既述の立体表示による説明の一例として，2 変数の場合における，$A+A\cdot B=A$，$A+\bar{A}\cdot B=A+B$ のごとき基本公式を引用すれば前者では第 3 図により，$A=\Sigma(2,3)$，$AB=\Sigma(3)$，ゆえに $A+A\cdot B=(2,3)=A$．また，後者では $\bar{A}\cdot B=\Sigma(1)$，ゆえに $A+\bar{A}\cdot B=\Sigma(2,3,1)=A+B$ となることは第 3 図より明らかである．

4. 3 変数の簡単化について

3 変数 A, B, C の場合は，無限平面 A, B, C を互いに直交させた第 4 図のごとくすると，3 変数に関する簡単化の問題は全部この図だけで取り扱いうると思う．この場合，図より，ABC, $\bar{A}BC$, $\bar{A}\bar{B}C$, $A\bar{B}C$, $AB\bar{C}$, $\bar{A}B\bar{C}$, $A\bar{B}\bar{C}$, $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ の 8 組の最小項と $A+B+C$, $\bar{A}+B+C$, $\bar{A}+\bar{B}+C$, $A+\bar{B}+C$, $A+B+\bar{C}$, $\bar{A}+B+\bar{C}$, $A+\bar{B}+\bar{C}$, $\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$ の 8 組の最大項を得るが，第 4 図を利用して簡単化を行なえば，Karnaugh 図を用いて簡単化を行なうよりも，はるかに隣接部分が直観的によくわかり，手数を要せずして簡

単化の作業を行ないうると思う．以下数例をあげて，その要領を示したい．

(例1) $f=(A+BC)(\bar{B}+\bar{C})$ を簡単化せよ．

(説明)

$$f=A(\bar{B}+\bar{C})+BC(\bar{B}+\bar{C})$$

BC と $(\bar{B}+\bar{C})$ は共有空間を作らないことは第4図より明らかであるから

$$BC(\bar{B}+\bar{C})=0$$

$$\therefore\ f=A(\bar{B}+\bar{C})=A\bar{B}+A\bar{C}$$

(例2) $f=AB\bar{C}+\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{C}$ を簡単化せよ．

(説明)

第4図より $AB\bar{C}$ は⑥番の最小項であり

$$\bar{B}\bar{C}=\Sigma(0,4) \qquad \bar{A}C=\Sigma(1,3)$$

$$\therefore\ f=\Sigma(0,1,3,4,6)$$

$$\Sigma(1,3)=\bar{A}C \qquad \Sigma(0,1)=\bar{A}\bar{B}$$

$$\Sigma(4,6)=A\bar{C}$$

$$\therefore\ f=A\bar{C}+\bar{A}C+\bar{A}\bar{B}$$

しかし，fは第4図より隣接部分からして，つぎのようにもまとめうることが考えられる．すなわち

$$\Sigma(1,3)=\bar{A}C \qquad \Sigma(0,4)=\bar{B}\bar{C}$$

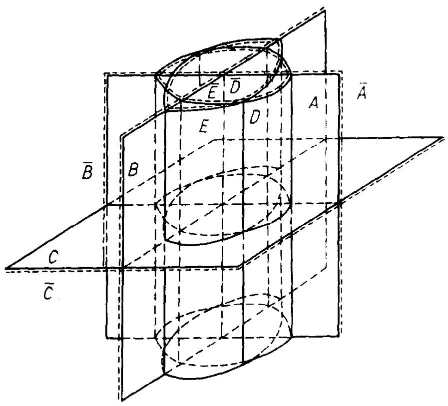
$$\Sigma(4,6)=A\bar{C}$$

ゆえに，$f=\bar{A}C+\bar{B}\bar{C}+A\bar{C}$ のまとめ方も考えられるから，この場合 $f=\bar{A}C+A\bar{C}+\bar{A}\bar{B}$ および $f=\bar{A}C+A\bar{C}+\bar{B}\bar{C}$ の2とおりの解を得る．

5. 4変数以上の簡単化について

4変数の場合も，2変数，3変数の場合と同じ考え方の図示法の延長をもって処理しうるように考え，第5図のごとき立体図を考案した．すなわち A, B, C 3変数を表わす第4図の立体図に変数Dを表わす無限円柱を組み合わせた．これをもって A, B, C, D 各変数を表わす無限面の特性と各面が直交することによって得られる各変数間の等価性が保たれると考えられる．ここに円柱の表側空間は D を表わし，内側空側は $\bar{D}$ を表わすものとする．第5図によって $2^4=16$ の最小項と最大項が得られることはもちろんである．第5図にも図示したように，第4図以下と同じ要領で番号を付してある．

また，5変数の場合および5変数以上の場合も考えられるが，たとえば，5変数の場合には**第6図**を用意した．第6図では考え方は従来と全く同様であり，変数の増加に対応させている．すなわち，第6図に示したごとく $A, B, C,$ 各変数を示す無限直交平面に，A面，B面をそれぞれ，長軸・短軸平面とする楕円曲面



第6図　5変数による立体表示

柱Dと，A面，B面をそれぞれ，短軸・長軸とする楕円曲面柱Eとを画き，かつD曲面とE曲面とが互いに交わるという条件を持たせるとよいと思う．同様な考え方で，A, B, C 3面に直交するような無限曲面柱を考えていけば，6変数でも7変数でも何変数でも表示できるということになるが，変数の数が多くなるにつれて，面群の構成状態が複雑となり，立体的表示法の大切な特徴である直観性のよさが失われてくるのはいたしかたがない．かつ，6数変以上の図示は実用性も，さほどないように思われ，必要性も失われてくるものと思われる．3変数の場合と同様に第5図を利用した4変数の簡単化の例を二三あげて理解の一助としたい．

(例3)

$$f=\bar{A}\bar{B}C\bar{D}+\bar{A}\bar{B}CD+\bar{A}B\bar{C}\bar{D}+\bar{A}B\bar{C}D$$
$$+\bar{A}BC\bar{D}+\bar{A}BCD+A\bar{B}\bar{C}D+A\bar{B}C\bar{D}$$
$$+A\bar{B}CD+AB\bar{C}\bar{D}+AB\bar{C}D+ABC\bar{D}$$
$$+ABCD$$

を簡単にせよ．

(説明)

$$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}=\Sigma(2),\quad \bar{A}\bar{B}CD=\Sigma(3)$$
$$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}=\Sigma(4),\quad \bar{A}B\bar{C}D=\Sigma(5)$$
$$\bar{A}BC\bar{D}=\Sigma(6),\quad \bar{A}BCD=\Sigma(7)$$
$$A\bar{B}\bar{C}D=\Sigma(9),\quad A\bar{B}C\bar{D}=\Sigma(10)$$
$$A\bar{B}CD=\Sigma(11),\quad AB\bar{C}\bar{D}=\Sigma(12)$$
$$AB\bar{C}D=\Sigma(13),\quad ABC\bar{D}=\Sigma(14)$$
$$ABCD=\Sigma(15)$$

$$\therefore\ f=\Sigma(2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13,14,15)$$

$$\Sigma(4,5,6,7,12,13,14,15)=B$$

$$\Sigma(2,3,6,7,10,11,14,15)=C$$

$\Sigma(9, 13, 11, 15) = AD$

$\therefore \quad f = B + C + AD$

この例のように適当な区画8個をまとめると1変数に，4個をまとめると2変数に，2個まとめると3変数の項になることは，これまでの例をもってしても明らかである．

(例 4)　つぎの論理関数を主加法標準形および主乗法標準形に展開せよ．

$f = \bar{A}B + C\bar{D} + A\bar{C}D$

(説明)

まず主加法標準形の場合を行なうと

$\bar{A}B = \Sigma(6, 7, 4, 5)$，$C\bar{D} = \Sigma(2, 6, 10, 14)$，

$A\bar{C}D = \Sigma(9, 13)$

$$\begin{aligned}\therefore \quad f &= \Sigma(2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 14)\\ &= \bar{A}BCD + ABC\bar{D} + \bar{A}BC\bar{D} + \bar{A}\bar{B}C\bar{D}\\ &\quad + A\bar{B}C\bar{D} + AB\bar{C}D + \bar{A}B\bar{C}D + A\bar{B}\bar{C}D\\ &\quad + \bar{A}B\bar{C}\bar{D}\end{aligned}$$

つぎに主乗法標準形の展開は，まず $\bar{f}$ をとり，これを再び否定して

$$\begin{aligned}f = \bar{\bar{f}} &= \overline{\Sigma(0, 1, 3, 8, 11, 12, 15)}\\ &= (\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}})(\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}D})(\overline{\bar{A}\bar{B}CD})(\overline{A\bar{B}\bar{C}\bar{D}})\\ &\quad \times (\overline{A\bar{B}CD})(\overline{AB\bar{C}\bar{D}})(\overline{ABCD})\\ &= (A+B+C+D)(A+B+C+\bar{D})\\ &\quad \times (A+B+\bar{C}+\bar{D})(\bar{A}+B+C+D)\\ &\quad \times (\bar{A}+B+\bar{C}+\bar{D})(\bar{A}+\bar{B}+C+D)\\ &\quad \times (\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+\bar{D})\end{aligned}$$

(例 5)　次式を簡単にせよ．

$$\begin{aligned}f &= \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D\\ &\quad + A\bar{B}CD\end{aligned}$$

ただし，冗長入力条件を $\bar{A}B\bar{C}D$，$\bar{A}BCD$，$A\bar{B}C\bar{D}$，$AB\bar{C}\bar{D}$, $AB\bar{C}D$, $ABC\bar{D}$ とする．

(説明)

冗長入力に対する概念および取扱いも，従来の扱い方と全く同様で，かつ第5図を用いて簡単化する場合は，より直観的に手数がかからず処理しうると思う．

$\bar{A}\bar{B}C\bar{D} = \Sigma(2)$　　$\bar{A}\bar{B}CD = \Sigma(3)$

$\bar{A}B\bar{C}\bar{D} = \Sigma(4)$　　$A\bar{B}\bar{C}D = \Sigma(9)$

$A\bar{B}CD = \Sigma(11)$

$\therefore \quad f = \Sigma(2, 3, 4, 9, 11)$

また，冗長入力は $\bar{A}B\bar{C}D = \Sigma(5)$

$\bar{A}BCD = \Sigma(7)$　　$A\bar{B}C\bar{D} = \Sigma(10)$

$AB\bar{C}\bar{D} = \Sigma(12)$　　$AB\bar{C}D = \Sigma(13)$

$ABC\bar{D} = \Sigma(14)$

第5図によってまとめると

$\Sigma(2, 3, 10, 11) = \bar{B}C$

$\Sigma(4, 5, 12, 13) = B\bar{C}$

$\Sigma(9, 11) = A\bar{B}D$

$\therefore \quad f = \bar{B}C + B\bar{C} + A\bar{B}D$

以上1変数から4変数の場合まで，立体的表示法について基本的な考え方から，図示法および応用例をもって，筆者の考え方を説明してきたが，この図示法の特徴としては，一貫した表示法で何変数の場合でも適用できること，直観的で学習者には視察しながら操作しうるため，比較的習熟しやすいこと，技術的な操作・熟練を必要とする手数が少なくてすむこと，個々の問題にそれぞれの図や表を作成しなくてよく，各変数の数に対応した一つの図ですましうることなどがあげられると思われる．

6. む す び

論理数学において図示法および簡単化の問題は，重要な分野を占め，二値価関数および論理回路を学ぶ者にとって，ぜひ習得しておかなければならない大切な部門であると思う．筆者は学習者が図表法，とくに Karnaugh 図による簡単化が図表的技術に傾き過ぎ，直観性にとぼしく手数もかかり，習熟するのにかなりの困難があるのをいつも経験して，もう少し学習者にもわかりやすく理解させる方法を工夫することの必要性を感じ，このような方法を考えた次第で，この表示法がなんらかの役に立つことがあれば幸いに思う．

終わりにこの表示法について，最初からご指導をいただいた北大名誉教授小串孝治先生に感謝の意を表する次第である．

参 考 文 献

1) 宮腰秀勝：昭43四連大北海道支部，112.
2) 佐藤達男：電子計算機，p. 17～96（オーム社）
3) 当麻嘉弘：論理設計入門，p. 81～113（丸善）
4) 小串孝治：昭42四連大北海道支部.

(昭和45年7月20日受付)