バイパータイト・グラフのマッチング変換*

沼 田 潤**

Abstract

A matching transformation has been defined between two complete matchings of a bipartite graph, where the bipartite graph corresponds to a certain matrix and each complete matching corresponds to each term of the determinant. Here, some structural properties of the set of complete matchings were investigated, and a method for generating the set of complete matchings by the matching transformation was introduced. Simultaneously, the properties of a circuit in a bipartite graph was discussed with respect to the alternation of a matching edge and a non-matching edge.

あらまし

行列のグラフ表現の一つであるバイパータイト・グラフ上の完全マッチング，すなわち，行列式の各展開項に対応する部分グラフ間にマッチング変換なる概念により隣接関係を与え，各マッチング間の構造的関係を検討し，それを用いた完全マッチングの生成法を示し，また同時にバイパータイト・グラフに任意の完全マッチングを決定したときその完全マッチングに含まれる枝と含まれない枝とによる枝列の交互性をもとにバイパータイト・グラフのもつ閉路の性質を調べた．

1. まえがき

本論の目的は行列などのグラフ表現の一つであるバイパータイト・グラフ上の完全マッチングの間にマッチング変換という概念を導入し，それらの性質の検討を行なうことである．応用の一例として，行列の行列式をグラフ上でもとめる一方法などに関連した完全マッチングの生成法をあげた．また，バイパータイト・グラフの完全マッチング，および枝の交互性に関連してグラフ内の閉路のもつ性質なども検討した．

バイパータイト・グラフの2個の完全マッチング M_i と M_j の排他的論理和がただ1個の初等的閉路であるとき，これら2個の完全マッチング M_i と M_j を互いに他のマッチング変換であると定義し，このマッチング変換により，任意の2個の完全マッチングを関連づけることができ，その結果，完全マッチング間の構造的関係がわかる．ここで議論されるバイパータイト・グラフとは，行列の非有向グラフ表現の一つであり，よく用いられる有向グラフ表現，すなわち，シグナル・フロー・グラフやフロー・グラフなどの概念と関連して検討することができる．たとえば，**Fig. 1** (a)の行列は有向グラフ(b)，バイパータイト・グラフ(c)などにより表現される．行列式の各展開項はフロー・グラフにおいては *P*-Set Cycles[1]，バイパータイト・グラフにおいては，完全マッチングとして表わすことができる．有向グラフとバイパータイト・グラフの関係は，直接には拡張グラフ (Augmented Graphs)[2] の概念を用いて結びつけることができる．

2. 基本概念

基本的用語で特に注意すべきものを以下に述べる[1),3)]．取り扱われる枝はすべて方向性のないものとし，節点 v_i, v_j 間に存在する枝を (v_i, v_j) と表わし，グラフ G が節点集合 V および枝集合 E より構成されるとき，これを $G\{E, V\}$ と表わす．そして枝集合 E は積集合 $V\times V$ の部分集合とみなす．バイパータイト・グラフ $G\{E, V\}$ とは V を互いに素な2個の部分 $V_L, V_R(V_L\cup V_R=V, V_L\cap V_R=\phi)$ に適当に分けたとき $E\subseteq V_L\times V_R$ となるようなグラフであり，V_L および V_R を左節点および右節点集合と呼ぶ．グラフ G の2個の部分グラフ $G_1\{E_1, V_1\}, G_2\{E_2, V_2\}$ の間の演算は一般に $V_1=V_2$ のときのみ定義され記号⊙を用いて(1)式で表わされるものと定義する．

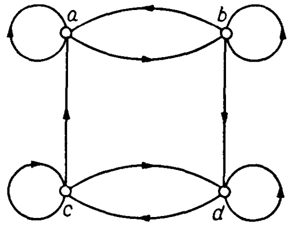
$$G_1\{E_1, V_1\}\odot G_2\}E_2, V_2\}=G_3\{E_1\odot E_2, V_1\} \quad (1)$$

* A matching transformation of a bipartite graph, by Jun NUMATA (Sony Corp., Research Center)

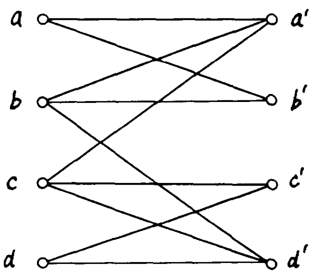
** ソニー株式会社中央研究所基礎第7研究室

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & a' & b' & c' & d' \\
\hline
a & \mathrm{X} & \mathrm{X} & 0 & 0 \\
b & \mathrm{X} & \mathrm{X} & 0 & \mathrm{X} \\
c & \mathrm{X} & 0 & \mathrm{X} & \mathrm{X} \\
d & 0 & 0 & \mathrm{X} & \mathrm{X}
\end{array}
$$

(a) 行列 A
A matrix A.



(b) A の有向グラフ
The directed graph of A.



(c) A のバイパータイト・グラフ
The bipartite graph of A.

Fig. 1

右辺の $E_1 \odot E_2$ における記号⊙は集合 E_1, E_2 の演算で具体的には ∪(合併集合), ∩(共通部分), −(差集合), ¯(補集号) および ⊕ (排他的論理和) などとする．集合 A, B が互いに素であるとは A, B が共通元をもたないことであり，グラフ $G_1\{E_1, V_1\}$ と $G_2\{E_2, V_2\}$ が互いに素であるとは，E_1 と E_2, V_1 と V_2 がそれぞれ互いに素なことである．初等的閉路 C および初等的道 P (以後単に閉路および道と呼ぶ) に含まれる枝の数，節点 v に接続する枝の数をそれぞれの位数と呼び $\rho(c), \rho(p)$ および $\rho(v)$ などと表わす．

以下に本論の主題と特に関係のあるやや特殊な概念につき述べる[4),5)]．バイパータイト・グラフ $G\{E, V\}$ におけるマッチング M とは G の部分グラフの一つ $M\{E_M, V_M\}$ で V_M の節点は E_M の少なくとも一つの枝の端点であり，かつ E_M のどの2個の枝も共通端点をもたないものである．ここで E_M の枝をマッチング枝，$E-E_M$ の枝を非マッチング枝といい，$V_M=V$ であるようなマッチングを完全マッチングという．バイパータイト・グラフにおいて，すべての枝 (v^l, v^r) が $v^l \in V_L'$, あるいは $v^r \in V_R'$ の少なくとも一方を満足するとき，$[V_L', V_R']$ を G の被覆(Cover)という ($V_L' \subseteq V_L$, $V_R' \subseteq V_R$)．そして被覆のうち $|V_L'|+|V_R'|$ ($|A|$ は集合 A の元の数を表わす) が最少のものを最少被覆といい，この最少被覆が $[V_L, \phi]$ および $[\phi, V_R]$ のみであるとき，バイパータイト・グラフ G を既約であるという．本節以後単にバイパータイト・グラフといえば，既約なバイパータイト・グラフをさす．バイパータイト・グラフ $G\{E, V_L \cup V_R\}$ の節点集合の分割 $V_L=V_{L1} \cup V_{L2} \cup \cdots \cup V_{Ln}$, $V_R=V_{R1} \cup V_{R2} \cup \cdots \cup V_{Rn}$ に関する縮退グラフ $G^d\{E^d, V_L^d \cup V_R^d\}$ とは，V_{Li}, V_{Rj} に対応した節点 $l_i^d \in V_L^d$, $r_j^d \in V_R^d$ をもち ($i, j=1, \cdots, n$), $(V_{Li} \times V_{Rj}) \cap E$ が空でないとき，そしてそのときにかぎり枝 (l_i^d, r_j^d) が存在するようなグラフである (V_{Li}, V_{Lj} および V_{Ri}, V_{Rj} $(i \neq i)$ は互いに素であるものとする)．グラフ G の枝集合を互いに素な部分集合 E_1, E_2 に分け，その枝列で E_1 の枝と E_2 の技が交互に表われる閉路および道をそれぞれ $[E_1, E_2]$ に関する交互閉路および交互道という．とくにその位数が奇数の交互道 $P(v_i, v_j)$ で，両端の節点 v_i, v_j に接続している枝がともに E_1 にぞくするとき，P を $[E_1^*, E_2]$ に関する交互道といい，E_2 にぞくするとき $[E_1, E_2^*]$ に関する交互道という．交互道の概念を用いて，バイパータイト・グラフの完全マッチング (もしも存在するならば) をもとめる方法はすでに確立されている[6)]．

最後に本論の主要結果にとくに関係の深い二つの定理をあげておく．

定理 2-1 バイパータイト・グラフ $G\{E, V_L \cup V_R\}$: $|V_L|=|V_R|=n$ に位数 $2n$ の閉路が存在すれば G は既約である〔文献 5)〕．

定理 2-2 バイパータイト・グラフ $G\{E, V_L \cup V_R\}$ の節点を $V_L=V_{L1} \cup V_{L2} \cup \cdots \cup V_{Ln}$, $V_R=V_{R1} \cup V_{R2} \cup \cdots \cup V_{Rn}$, $|V_{Li}|=|V_{Ri}|$ に分け，$E \cap (V_{Li} \times V_{Ri})$ により構成される部分グラフが既約であるとき，($i=1, \cdots, n$), $V_L=V_{L1} \cup V_{R2} \cup \cdots \cup V_{Ln}$, $V_R=V_{R1} \cup V_{R2} \cup \cdots \cup V_{Rn}$ に関する G の縮退グラフ G^d が既約であるための必要十分条件は G が既約であること

である〔文献5)〕.

また，本論でたびたび用いられる事実にバイパータイト・グラフが既約であれば，共通の枝をもたない二つの完全マッチングが存在するという性質があるが，それも既約の定義とうえの定理より明らかである.

3. マッチング変換

バイパータイト・グラフ $G\{E, V\}$ に2個の完全マッチング M_1 と M_2 をとるとき，Gの部分グラフ $M_1\{E_1, V\}$ ではすべての節点の位数は1であり，また部分グラフ $M_2\{E_2, V\}$ においても同様である. したがって，部分グラフ $M_1 \cup M_2$ を考えると，すべての節点はその位数が2であるかまたは M_1 と M_2 の双方に同時に含まれる枝1個をもつ（すなわちその位数が1である）かのいずれかである. ゆえに部分グラフ $M_1 \oplus M_2$ は〔E_1, E_2〕に関する交互閉路の集まりとなる.

定義 3-1　バイパータイト・グラフ $G\{E, V\}$ の2個の完全マッチング M_1, M_2 の排他的論理和が1個の閉路Cをなすとき M_1 および M_2 を互いに隣接するという. そして M_1 より M_2（または M_2 より M_1）を求めることを C に関するマッチング変換と定義する.

すなわち，完全マッチング $M_i\{E_i, V\}$ をもつバイパータイト・グラフ $G\{E, V\}$ において G の閉路 $C\{E_c, V_c\}$ が〔$E_i, E-E_i$〕に関して交互閉路をなす場合，M_i を $M_j\{E_j, V\}=M_j\{(E_i \oplus E_c), V\}$ に変換することを閉路 C に関するマッチング変換という.

定義 3-2　バイパータイト・グラフ $G\{E, V\}$ のマッチング閉路とは G の閉路で，ある〔E_1', E_2'〕に関して交互閉路となりうるものをいう. ここで E_1', E_2' は $E_1' \subset E_1, E_2' \subset E_2$ となるような完全マッチング$M_1\{E_1, V\}$，$M_2\{E_2, V\}$ のマッチング枝の集りである.

定理 3-1　バイパータイト・グラフ $G\{E, V\}$ のマッチング閉路 C_1, C_2 がともに完全マッチング $M\{E_M, V\}$ の〔$E_M, E-E_M$〕に関して交互閉路をなし，$C_1 \cap C_2$ が1個の道Pであれば，P は〔$E_M^*, E-E_M$〕に関し奇数位数の交互道をなす. 一般に $C_1 \cap C_2$ が複数個の互いに素な道 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ の集りであれば各 $P_i (i=1, \cdots, k)$ は〔$E_M^*, E-E_M$〕に関し奇数位数の交互道を構成する.

証明　C_1 と C_2 が1個の道 P のみを共有するならば $C_1 \cup C_2$ は端点 a, b を共有する互いに素な3個の道 $C_1 \oplus P, C_2 \oplus P$ および P に分解できる. C_1 および C_2 が〔$E_M, E-E_M$〕に関する交互閉路をなすためには端点 a, b に接続する P の枝は E_M にぞくさなければならないから $\rho(P)$ は奇数である. 定理の後半の証明もこれに準ずる.

バイパータイト・グラフ $G\{E, V\}$ の完全マッチング $M_i\{E_i, V\}$ を閉路 C に関するマッチング変換によって $M_j\{E_j, V\}$ に変換したとき，C 内に存在する〔$E_i, E-E_i$〕,〔$E_i^*, E-E_i$〕あるいは〔$E_i, (E-E_i)^*$〕に関する交互道はそれぞれ〔$E_j, E-E_j$〕,〔$E_j, (E-E_j)^*$〕および〔$E_j^*, E-E_j$〕に関する交互道となることは $M_i \oplus M_j = C$ なる関係より明らかである. このことよりマッチング変換によりマッチング枝と非マッチング枝に関するグラフの閉路の交互性の変化を検討してみる.

定理 3-2　バイパータイト・グラフ $G\{E, V\}$ の任意の完全マッチングを $M\{E_M, V\}$ としたとき，閉路 C_1 および C_2 が〔$E_M, E-E_M$〕に関して交互閉路をなせば $C_1 \oplus C_2$ は1個のマッチング閉路かまたはマッチング閉路の集まりとなる.

証明　C_1 と C_2 が〔$E_M, E-E_M$〕に関する交互閉路であるということは，式(2),(3)を満足する完全マッチング M_1 と M_2 が存在することである.

$$C_1 = M_1 \oplus M \quad (2) \qquad C_2 = M_2 \oplus M \quad (3)$$

したがって，$C=C_1 \oplus C_2 = M_1 \oplus M_2$ となることより定理の成立がわかる.

定理 3-3　バイパータイト・グラフ $G\{E, V\}$ に完全マッチング $M_i\{E_i, V\}$ が存在し，マッチング閉路 C_1, C_2, C_l' ($l=1, \cdots, p$: $C_1 \oplus C_2 = C_1' \cup \cdots \cup C_p'$ で C_l' は互いに素）のうち C_1, C_2 が〔$E_i, E-E_i$〕に関し交互閉路をなすとする. このとき C_1 に関するマッチング変換により M_i から得られる完全マッチングを $M_j\{E_j, V\}$ とすると，C_1 および $C_i'(i=1, \cdots, p)$ が〔$E_j, E-E_j$〕に関し交互閉路をなす.

証明　C_2 が〔$E_i, E-E_i$〕に関して交互閉路となることより $M_i \oplus C_2 = M_k$ なる完全マッチング M_k が存在し，また $M_j = M_i \oplus C_1$ である. C_1 は $M_j \oplus C_1 = M_i$ で〔$E_j, E-E_j$〕の交互閉路であり，C_2 は $M_j \oplus C_2 = C_1 \oplus (C_1' \cup C_2' \cup \cdots \cup C_p') \oplus M_j = M_i \oplus (C_1' \cup C_2' \cup \cdots \cup C_p')$ で〔$E_j, E-E_j$〕に関する交互閉路ではない. $C_l' (l=1, \cdots, p)$ は $M_j \oplus (C_1' \cup C_2' \cup \cdots \cup C_p') = M_j \oplus C_1 \oplus C_2 = M_i \oplus C_2 = M_k$ であり〔$E_j, E-E_j$〕に関する交互閉路となる.

定理 3-4　バイパータイト・グラフ $G\{E, V\}$ の任意の完全マッチングを $M_i\{E_i, V\}$ とし，マッチング閉路 C_1, C_2, C_l' ($l=1, \cdots, p$: $C_1 \oplus C_2 = C_1' \cup \cdots \cup$

C_p' で C_l' は互いに素) のうち C_1, C_2 が 〔$E_i, E-E_i$〕に関し交互閉路をなせば，C_1 に関するマッチング変換を行ない，次に，C_l' $(l=1,\cdots,p)$ に関しマッチング変換を順次行なった結果得られる完全マッチングは M_i に C_2 に関するマッチング変換を行なって得られる完全マッチングに等しい.

証明 M_1 に C_2 に関するマッチング変換を行ない得られる完全マッチングを M_k とすれば $M_k=M_1\oplus C_2$となる. $M_j=M_i\oplus C_1$ とすれば $M_j\oplus(C_1'\cup C_2'\cup\cdots C_p')=M_i\oplus C_1\oplus(C_1'\cup C_2'\cup\cdots\cup C_p')=M_i\oplus C_2=M_k$ となり定理が成立する.

4. 完全マッチングの生成

前節に導入した概念，すなわちマッチング変換の応用の一つとして行列の行列式の計算やフロー・グラフの解法などに関連のある完全マッチングの生成法につき検討する. 前節の結果により，任意の完全マッチング間の関連がマッチング変換により表わされることが明らかになったが，次にどの完全マッチングより始めてもすべての完全マッチングは，あらかじめ定められたいくつかのマッチング閉路に関するマッチング変換を規則的に操り返すことでもとめられることを示す.

定義 4-1 完全マッチング $M\{E_M, V\}$ をもつバイパータイト・グラフ $G\{E, V\}$ で 〔$E_M, E-E_M$〕に関する G の交互閉路のすべてを M に関する基本閉路集合という.

定理 4-1 M をバイパータイト・グラフ G の任意の完全マッチングとすると，M 以外の完全マッチングは互いに素ないくつかの M に関する基本閉路についてのマッチング変換を M に関して行なうことにより得られる.

証明 G の2つの完全マッチングを $M_i\{E_i, V\}$, $M_j\{E_j, V\}$ とすると，一般に $M_i\oplus M_j$ は $C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_p$ で表わされる. ここで C_l $(l=1,\cdots,p)$ は 〔$E_i, E-E_i$〕 および 〔$E_j, E-E_j$〕 に関する交互閉路で互いに素である. C_l の枝で M_i と M_j に含まれるものの集合をそれぞれ R_l^i, R_l^j とすると C_l は $R_l^i\cup R_l^j$ と表わされるから式(4),(5)か成立する.

$$M_i=M_0\cup R_1^i\cup R_2^i\cup\cdots\cup R_p^i \qquad (4)$$

$$M_j=M_0\cup R_1^j\cup R_2^j\cup\cdots\cup R_p^j \qquad (5)$$

ここで M_0 は $M_i\cap M_j$ である. このとき式(6)により $M_{is}(s=0,\cdots,p)$ を定義すると，各 M_{is} は完全マッチングで M_{is} と $M_{i(s+1)}$ は式(7)で表わされることより定理が成立する.

$$M_{is}=M_0\cup R_1^j\cup R_2^j\cup\cdots\cup R_{s-1}^j\cup R_s^j\cup R_{s+1}^i\cup\cdots\cup R_p^i \qquad (6)$$

$$M_{is}\oplus M_{i(s+1)}=R_{s+1}^i\cup R_{s+1}^j=C_{s+1} \qquad (7)$$

定理 4-1 はバイパータイト・グラフ G にある完全マッチング $M\{E_M, V\}$ を与えたときの基本閉路のうち互いに素な閉路の組に従って順次マッチング変換を行なうことによりすべての完全マッチングを生成できることを示している. 基本閉路を決定するとき，バイパータイト・グラフの完全マッチングが行列上の主対角に存在するようにとれば文献 7), 8) などの方法をバイパータイト・グラフの基本閉路集合を求めることに自然に応用できる. 具体的な計算行程の一例をプッシュダウン式記憶装置を用いた方法で示してみる.

基本閉路を $C_1, C_2, \cdots, C_{k-1}, C_k$ であるとし，i 番目に作られる互いに素な組 N_i において $N_i=\{C_{i1}, C_{i2}, \cdots, C_{in}\}$, $i_1<i_2<\cdots<i_n$ のように基本閉路が並んでいるものとする. 初めにバイパータイト・グラフ G に任意の完全マッチング M_0 を決定し，次に M_0 に関する基本閉路のすべて $C_1, C_2, \cdots, C_k$ をもとめ，プッシュダウン式記憶装置に M_0 を入れ $N_1=\{C_1\}$ $(i=1, n=1, C_{i1}=C_1)$ として以下の行程にはいればよい.

〔1〕 互いに素な組 $N_i=\{C_{i1}, C_{i2}, \cdots, C_{in}\}$ があるとき，$\alpha=C_{in}$ とおき，プッシュダウン式記憶装置の頭部にある完全マッチングをαに関して，マッチング変換して新しい完全マッチング M_i を得る. そして，もしも $N_i=\{C_k\}$ であれば全行程はここで終了する. もしも $N_i\neqq\{C_k\}$ であれば，新しくもとめた完全マッチングをプッシュダウン式記憶装置に入れ，$\alpha=C_k$ ならば〔4〕へ，$\alpha\neqq C_k$ ならば〔2〕へ行く.

〔2〕 αをαの次の番号をもつ閉路でおきかえ，$N_i\cup\{\alpha\}$ を仮りに N_{i+1} とし，N_{i+1} が互いに素であればこの N_{i+1} がもとめるものであり，〔1〕へもどり操り返す. もしも，互いに素でなければ〔3〕へ行く.

〔3〕 $\alpha\neqq C_k$ ならば〔2〕へもどる. $\alpha=C_k$ ならば $N_i-\{C_{in}\}$ を N_i とし，$\alpha=C_{in}$ とおいてプッシュダウン記憶装置の内容を1個だけポップ・アップして〔2〕に行く.

〔4〕 $N_i-\{C_{i(n-1)}, C_{in}\}$ を N_i として，$\alpha=C_{in-1}$ とおき，プッシュダウン式記憶装置の内容を2だけポップ・アップして〔2〕へ行く.

以上の行程を繰り返すことで〔1〕において，つくられる完全マッチングがすべての完全マッチングでありまた行列式や P-Set Cycle の計算に用いる場合に必用な符号も，マッチング変換を行なうときの交互閉路

の位数の 1/2 の偶奇に注意すれば容易に定められる．

適用例として，次の行列の行列式をもとめてみる．

$$A=\begin{array}{c}\\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5\\ 6\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6'\end{array}\\ \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} a & b & & & & c\\ \hline d & e & f & & & \\ \hline & g & h & i & & \\ \hline & & j & k & l & \\ \hline & & & m & n & o\\ \hline p & & & & q & r\end{array}\right)\end{array} \tag{8}$$

式(8)の行列 A に対応するバイパータイト・グラフ $G\{E, V\}$ は **Fig. 2** のようになり，M_0 を $\{a, e, h, k, n, r\}$ のように決定すると，基本閉路集合は **Fig. 3**(a)…3(h) のような閉路，$C_1, \cdots, C_8$ となる．いまの場合 $1/2\,\rho(C_i)$ $(i=1, \cdots, 8)$ はすべて偶数であり，互いに素なものの組合せは次のようになる．すなわち，$\{C_1\}$, $\{C_1, C_3\}$, $\{C_1, C_3, C_5\}$, $\{C_1, C_4\}$, $\{C_1, C_5\}$, $\{C_2\}$, $\{C_2, C_4\}$, $\{C_2, C_4, C_6\}$, $\{C_2, C_5\}$, $\{C_2, C_6\}$, $\{C_3\}$, $\{C_3, C_5\}$, $\{C_3, C_6\}$, $\{C_4\}$, $\{C_4, C_6\}$, $\{C_5\}$, $\{C_6\}$, $\{C_7\}$, $\{C_8\}$ となる．これらに対応するマッチング変換を行なうと **Fig. 4** に示す各完全マッチングを得ることができ，式(9)が得られる．

$$\begin{aligned}\det A = &\, aehknr - bdhknr + bdijnr\\ &- bdijoq + bdhlmr + bdhkoq\\ &- afgknr + afglmr - fglmpc\\ &+ afgkoq + fgkncp - aeijnr\\ &+ aeijoq + eijncp - aehlmr\\ &+ ehlmpc - aehkoq - ehknpc\\ &- bfilop - dgjmcq\end{aligned} \tag{9}$$

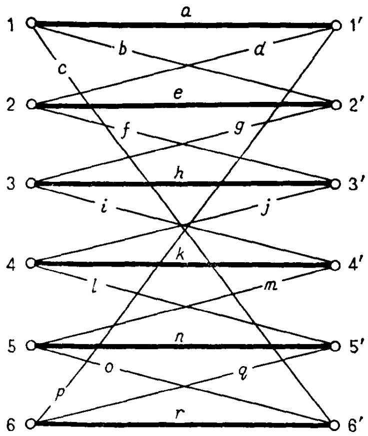


Fig. 2 行列Aのバイパータイト・グラフ G，太線は M_0 を表わす
The bipartite graph G of the matrix A. The heavy lines indicate M_0.

5. 完全マッチングと閉路の関係

最後にバイパータイト・グラフ $G\{E, V\}$ に任意の完全マッチング $M\{E_M, V\}$ を決定したとき，$[E_M, E-E_M]$ に関する交互閉路についての注意すべきいくつかの結果を述べる．

定理 5-1　バイパータイト・グラフ $G\{E, V\}$ の任意の完全マッチングを $M\{E_M, V\}$ とするとき，G の任意のマッチング閉路は $[E_M, E-E_M]$ に関する交互閉路の排他的論理和として表わされる．

証明　マッチング閉路 C はその定義より2個の完全マッチング M_1, M_2 により $C=M_1 \oplus M_2$ と表わ

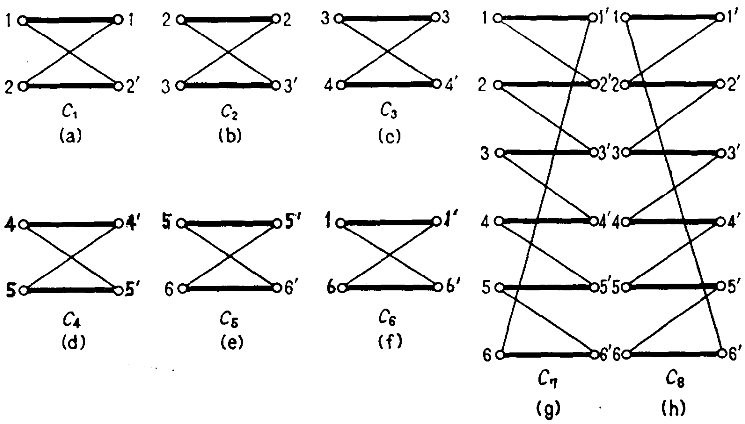
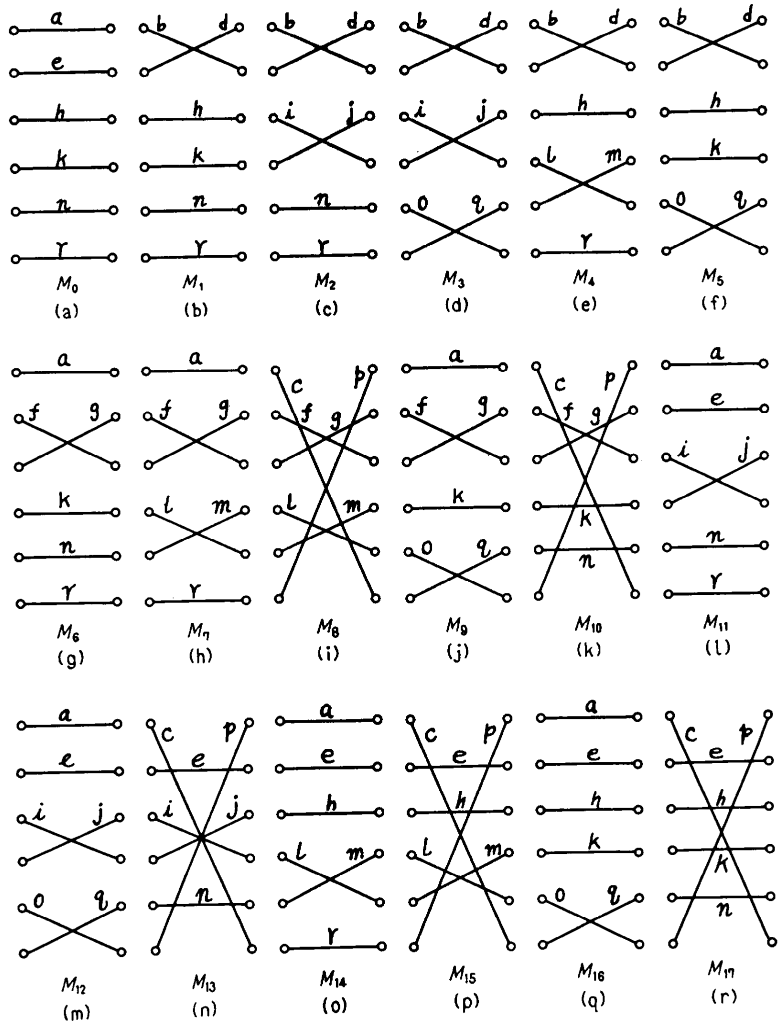


Fig. 3 基本閉路集合
The set of basic circuits.



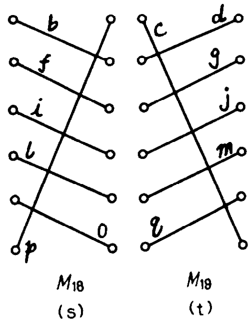


Fig. 4 バイパータイト・グラフ G の完全マッチング
All the complete matchings of the bipartite graph G.

される．また，$M_1 \oplus M$, $M_2 \oplus M$ が式(10), (11)にて表わされ C_i^1, C_j^2 は〔$E_M, E-E_M$〕に関し，交互閉路をなすことを考えれば定理の成立がわかる．

$$M_1 \oplus M = C_1^1 \cup C_2^1 \cup \cdots \cup C_p^1 \tag{10}$$

$$M_2 \oplus M = C_1^2 \cup C_2^2 \cup \cdots \cup C_q^2 \tag{11}$$

上の定理 5-1 により，バイパータイト・グラフのマッチング閉路が〔E_M, $E-E_M$〕に関する交互閉路で表わされることがわかるが，このような性質はマッチング閉路以外の閉路についても満足されることを次に示す．

補題 5-1 バイパータイト・グラフ $G\{E, V_L \cup V_R\}$ に任意の互いに素な 2 個の完全マッチング M_1 と M_2 を選ぶとき，$M_1 \cup M_2$ が複数個の閉路の和 $C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$ で表わされれば，$V_L = V_{L1} \cup V_{L2} \cup \cdots \cup$

V_{Ln}, $V_R=V_{R1}\cup V_{R2}\cup\cdots\cdots\cup V_{Rn}$, $V_{Li}\cup V_{Ri}=C_i\ (i=1,\cdots,n)$ に関する G の縮退グラフ G^{Δ} が決定でき，この G^{Δ} に任意の互いに素な2個の完全マッチングを選び同様のことを繰り返し試みれば，最終的に選ばれた互いに素な2個の完全マッチングの和が，1個の閉路を構成する縮退グラフを得ることができる．

証明　定理2-1より各 $C_i\ (i=1,\cdots,n)$ はそれぞれ既約な部分グラフであり，それゆえ G^{Δ} は既約であるから G^{Δ} 内に2個の互いに素な完全マッチングを選ぶことができる．このようにして順次縮退を続けていけば，最終的にグラフは左右節点が各1個で，枝が1個のバイパータイト・グラフを得ることができる．この縮退グラフを得るときの2個の完全マッチングの和は1個の閉路を構成している．

定理 5-2　バイパータイト・グラフ $G\{E, V_L\cup V_R\}$, $|V_L|=|V_R|$ が既約であれば G の任意の $l_i, l_j\in V_L$（または $r_i, r_j\in V_R$）間に〔$E_M, E-E_M$〕に関する少なくとも2つの交互道が存在する．ここで E_M は G の任意の完全マッチングに対するマッチング枝を表わす．

証明　G に M と互いに素な完全マッチング M_1 をとり，もしも $M_1\cup M$ がただ1個の閉路を構成すれば，その閉路の位数は $2n$ であるから l_i, l_j 間には〔$E_M, E-E_M$〕に関する二つの交互道がある．もしも $M\cup M_1$ が互いに素な閉路の集合 $C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_p$: $C_i=G\cap(V_{Lk}\times V_{Rk})$, $(k=1,\cdots,p)$ にて表わされる場合，このとき $V_L=V_{L1}\cup V_{L2}\cup\cdots\cup V_{Lp}$, $V_R=V_{R1}\cup V_{R2}\cup\cdots\cup V_{Rp}$ に関する縮退グラフ $G^{\Delta}\{E^{\Delta}, V_L^{\Delta}\cup V_R^{\Delta}\}$: $V_L^{\Delta}=\{l_1^{\Delta}, l_2^{\Delta},\cdots, l_p^{\Delta}\}$, $V_R^{\Delta}=\{r_1^{\Delta}, r_2^{\Delta},\cdots, r_p^{\Delta}\}$,（$V_{Lk}$ は l_k^{Δ} に，V_{Rk} は r_k^{Δ} にそれぞれ対応する，$k=1,\cdots,p$）内に選んだ完全マッチングを $M^{\Delta}\{E_M^{\Delta}, V^{\Delta}\}$ とするとき，任意の $l_i^{\Delta}, l_j^{\Delta}$ 間に〔$E_M^{\Delta}, E^{\Delta}-E_M^{\Delta}$〕に関する2つの交互道があれば，$l_i\in V_{Li}$, $l_j\in V_{Lj}$ の l_i, l_j 間に〔$E-E_M, E_M$〕に関する2つの交互道が存在することは，任意の $l_{i1}, l_{i2}\in V_{Li}$ 間に〔$E_M, E-E_M$〕に関する交互道が2つあることと，$E^{\Delta}-E_M^{\Delta}\subset E-E_M$ を考えることで明らかである．$M\cup M_1$ が複数個の互いに素な閉路の集まりとなるときは，以上のことと補題5-1によりこの定理が成立することがわかる．$r_i\in V_R, r_j\in V_R$ の間に関しても同様に考えればよい．

定理 5-3　バイパータイト・グラフ $G\{E, V_L\cup V_R\}$ の完全マッチングを $M\{E_M, V\}$ としたとき，G の任意の2節点 $l_i\in V_L, r_j\in V_R$ 間に存在する〔$E_M^*,(E-E_M)$〕,〔$E_M,(E-E_M)^*$〕に関する交互道 P_1, P_2 の排他的論理和 $P_1\oplus P_2$ は〔$E_M, E-E_M$〕に関する交互閉路の排他的論理和で表わされる．

証明　P_1, P_2 が，l_i, r_j 以外に共通節点をもたなければ題意は明らかである．P_1 と P_2 が l_i, r_j 以外に共通節点をもつならば l_i より r_j に向かう枝列が P_1 上で初めて P_2 ともつ共通点を v_1 とし，P_1 上で v_1 より r_j に向かう枝列が初めて P_2 よりはなれる節点を v_2 とする．v_1, v_2 間で道 P_1 と P_2 は共通の枝および節点をもつ（2つの部分の道を $P_{12}(v_1, v_2)$ とする，この道が〔$E_M^*, E-E_M$〕に関する交互道であることは明白）．このとき P_2 にそって l_i よりの枝列を考えると G の閉路の位数の偶数性により，この枝列は v_2 より v_1 へ向かう．次に P_1 上で l_i, v_1 を端点とする道を P_1'，同じく P_1 上で v_2, r_j を端点とする道を P_1'' とし，また P_2 上で l_i, v_2 を端点とする道を P_2'，同じく P_2 上で v_1, r_j を端点とする道を P_2'' とする（**Fig. 5** 参照）と $P_1(l_i, r_j)=P_1'(l_i, v_1)\oplus P_{12}(v_1, v_2)\oplus P_1''(v_2, r_j)$, $P_2(l_i, r_j)=P_2'(l_i, v_2)\oplus P_{12}(v_1, v_2)\oplus P_2''(v_1, r_j)$ として表わされる．ここで $P_{12}(v_1, v_2)$ が〔$E_M^*, E-E_M$〕に関する交互道であるから P_1', P_1'' はともに〔$E_M, E-E_M$〕また P_2', P_2'' はともに〔$E_M(E-E_M)^*$〕に関する交互道である．ここで P_1' と P_2' は v_1 と v_2 の定義により，l_i 以外で共通点をもたないと決められていることより式(12)の関係が満たされる．

$$
\begin{aligned}
P_1\oplus P_2 &= (P_1'\oplus P_{12}\oplus P_1'')\oplus(P_2'\oplus P_{12}\oplus P_2'')\\
&= (P_1'\oplus P_2'\oplus P_{12})\oplus(P_1''\oplus P_2''\oplus P_{12})\\
&\quad (P_1'\oplus P_2'\oplus P_{12})\oplus((P_1''\oplus P_{12})\oplus P_2'')
\end{aligned}
\tag{12}
$$

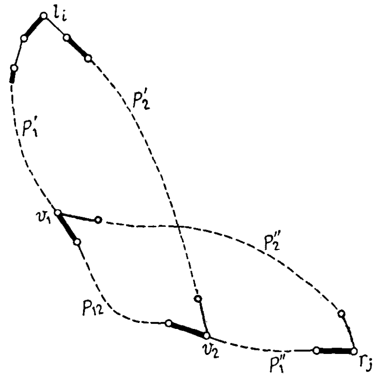


Fig. 5　バイパータイト・グラフ G の任意の2節点，l_i, r_j 間に存在する道
The pathes which exist between arbitrary two vertices l_i and r_j of G.

$C_1=P_1'\oplus P_2'\oplus P_{12}$ は〔$E_M, E-E_M$〕に関する交互閉路である．一方 $P_1''\oplus P_{12}$ および P_2'' は v_1 と v_j をむすび，それぞれ〔$E_M^*, E-E_M$〕および〔$E_M,(E-E_M)^*$〕に関する交互道である．そこで同様のことを $P_1''\oplus P_{12}$ と P_2'' に対してくり返し行なえば定理の成立することがわかる．

定理 5-4　バイパータイト・グラフ $G\{E, V\}$ に完全マッチング $M\{E_M, V\}$ を与えたとき，任意の閉路 C は〔$E_M, E-E_M$〕に関する交互閉路の排他的論理和として表わされる．

証明　C が〔$E_M, E-E_M$〕に関する交互閉路でないとする．C の位数は偶数であるから．C が交互閉路でなければ，C に含まれる節点のうち偶数個の節点が C に含まれるマッチング枝以外のマッチング枝により接続されていることは明らかである．それの節点のうち，C 上で最も近い一対 (n_1, n_2) を選ぶと，それらは C にぞくする〔$E_M,(E-E_M)^*$〕に関する交互道 $P_1(n_1, n_2)$ により結ばれている．また n_1 と n_2 が G の左節点と右節点集合のうち，互いに異なるものに含まれることを考えれば，n_1 と n_2 間には P_1 以外に〔$E_M^*, E-E_M$〕に関する G の道 $P_2(n_1, n_2)$ が存在し，$P_1\oplus P_2$ が〔$E_M, E-E_M$〕に関する交互閉路の排他的論理和にて表わされることが定理 5-2, 5-3 より成立する．そして $C_1=C\oplus P_1\oplus P_2$ は1個あるいは複数個の閉路になるが，それらのなかの n_1, n_2 のような節点は少なくとも C よりは2個は少なくなっている．そこで上と同様なことを，これらの閉路につき繰り返し行なえば定理が成立する．

以上の結果は行列の有向グラフ表現においては，グラフが強連結（任意の2点間に有向道がある）であるときは，グラフ内の任意の閉路が有向閉路の排他的論理和として表わされるという文献 9) の結果 (p. 117) と対比させて考えることができる．

6. 結　論

マッチング，完全マッチングおよび道の交互性などの概念は，グラフ理論では種々の問題を規定する場合にこれまでもよく用いられてきた[4),5),10)]，本論文ではこれらをもとにマッチング変換なる概念の導入を行ない，その性質を調べると同時に，その応用の一例を示した．すなわち，この交互性という概念を閉路のなかにもち込み，2個の完全マッチングを互いに変換可能なものとみなすことを試み，各完全マッチング間の変換性の関連につき論じたが，さらに検討すべきことは数多く残されているであろう．たとえば，ここでの提案は行列やそれに対応した既約なバイパータイト・グラフの分類や性格づけにも役立つかもしれない．また行列またはバイパータイト・グラフが可約な場合には，文献 4), 5) などの方法により非許容枝 (Inadmissible Edges) をとりのぞいた後，既約な部分グラフのおのおのにつき，同様の方法を試みればよい．

謝　辞

本研究に関し種々ご指導賜わった東京大学南雲仁一教授ならびに伊理正夫助教授に謝意を表するとともに，数多くの助言をいただいた東京大学南雲研究室の方々，ソニー株式会社中央研究所長島茂夫博士，および吉田博文室長に深く感謝の意を表する次第である．

参 考 文 献

1) S. Seshu and M. B. Reed: "Linear Graphs and Electrical Networks", Addison-Wesley Publishing Co. (1961).
2) D. M. Johnson, A. L. Dulmage and N. S. Mendelsohn: "Connectivity and reducibility of graphs", Canad. J. of Math. Vol. 14, pp. 529～539 (1962).
3) C. Berge: "The Theory of Graphs and Its Applications," John Wiley and Sons, Inc., New York (1962).
4) A. L. Dulmage and N. S. Mendelsohn: "Coverings of bipartite graphs" Cand. J. of Math., Vol. 10, pp. 517～534 (1958).
5) A. L. Dulmage and N. S. Mendelsohn: "A structure theory of bipartite graphs of finite exterior dimension", Trans. of Roy. Soc. of Canada, Vol. LIII, Ser. III, Sec. III, pp. 1～13 (1959).
6) C. Berge: "Two theorems in graph theory," Proc. Natl. Acad. of Sci., U. S. Vol. 43, pp. 842～844, (1957).
7) M. Iri: "Foundation of algebraic and topological treatments of general information networks" RAAG Mem., Vol. III, Div. G, pp. 418～450 (1962).
8) T. Kamae: "A Systematic method of finding all directed circuits and enumerating all directed paths", IEEE Trans., Vol. CT-14, No. 2, pp. 166, (1967).
9) C. Berge: "Programing, Games and Transportation Networks," John Wiley and Sons, Inc., New York (1965).
10) 伊理正夫："システムの自由度とグラフ理論"，計測制御学会，第7回制御理論部会資料 (1969).

(昭和46年2月4日受付)