

TonalityTouch: 素数指数表現に基づく一般化 Tonnetz を用いたスマートフォン楽器

白松 俊^{1,a)} 大園 忠親¹ 新谷 虎松¹

概要: 本稿の目的は、練習を伴わないスワイプ操作やタッチ操作で演奏できるスマートフォン上の楽器アプリの実現である。そのために、ユーザの操作位置を対数周波数軸に対応付けた上で、調性感ある音高に補正する手法を検討した。その際、音階や旋法を変化させるためには、音階や旋法を導けるような調性感に関する基本原理や数理モデルが必要と考え、モデルの定式化を行った。具体的には、調性に関するモデルとして知られる Tonnetz を取り上げ、これを周波数比に関する基本原理から導出可能であることを示した。また、導出したモデルが n -limit 純正律へと拡張可能な一般化になっていることを示し、素数指数表現に基づく一般化 Tonnetz (PFG Tonnetz) と名付けた。さらに、5-limit 純正律に対応する 5-limit Tonnetz を分析し、音程集合が調性感ある音階になる条件を定義した。このモデルに基づき、TonalityTouch という楽器アプリを設計し、Android OS 上で試作したので報告する。

1. はじめに

本稿では図1のように、練習を必要としない「適当な」*1操作によって調性感/スケール感を伴う演奏が可能で、スマートフォン上の楽器アプリケーションを試作する。また、そのための旋法や音律を導出可能な調性の数理モデルを検討する。

連続的な身体動作により音高を制御する電子楽器としてはテルミンやオタマトーン等が有名だが、調性感やスケール感を考慮した音程補正をするものは多くない。もし、熟練した演奏者による特定の楽曲の演奏を前提にするならば、本研究が扱うような音高補正は不要である。しかし、練習していないユーザがランダムにスワイプ操作やタッチ操作をした場合、当然、上記の電子楽器では調性感を伴う演奏にならない。そのような「適当な」操作を調性感/スケール感ある音列に自動補正できれば、音楽知識に乏しいユーザであっても「それなりに音楽的」な即興演奏が可能になると考えられる。

また、音程補正のために音階や旋法を事前知識として与えるのではなく、それらを協和音程に関する基本原理から生成できるモデルを検討する。ここで言う基本原理とは、

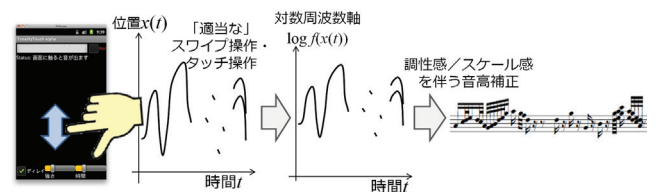


図1 スワイプ操作・タッチ操作から調性感ある音列への音高補正

「2音を重ねたとき、その2音の周波数比が簡単なほど響きが良い」という、古くからよく知られた法則 [1] である。紀元前のペンタトニック音階やピタゴラス音律、15~16世紀頃から普及した純正律など、平均律以前の音律、音階、旋法の多くは、この基本原理から導かれている。本研究では、楽曲毎/ジャンル毎の旋律の音程遷移傾向や、作曲者/演奏者の「手癖」*2にも、このような基本原理が関与していると仮定する。この仮定が正しいならば、周波数比の基本原理から音階や旋法を導ける数理モデルは、特定のジャンルや作曲者に適応させた音程補正にも応用できる可能性がある。このような可能性を鑑み、本稿では周波数比の基本原理から音階や旋法等を導くモデルを検討する。

2. 関連研究

スマートフォン上の楽器アプリケーションとしては、オタマトーンの iPhone アプリ [4] や、iPhone を振ると旋律が変化するギターアプリ ShakeGuitar [5] 等、多数存在す

*2 作曲者や演奏者は、慣れ親しんだ少数の旋律を無意識のうちに頻繁に用いる場合があり、これを「手癖」と呼ぶ [2], [3].

¹ 名古屋工業大学
Nagoya Institute of Technology, Gokiso-cho, Showa-ku,
Nagoya 466-8555, Japan

^{a)} siramatu@nitech.ac.jp

*1 ここでは、「適切な」という意味ではなく、「いいかげんな」「ランダムな」に近い意味

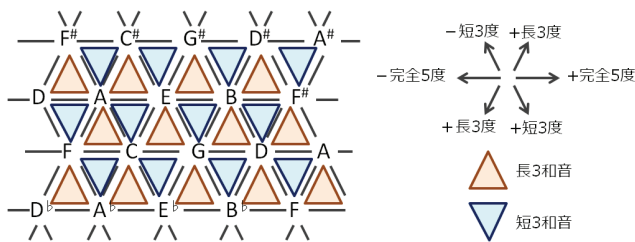


図 2 Riemann の Tonnetz

る。特に ShakeGuitar はユーザの「適当な」操作による演奏が可能であるが、本研究がフォーカスしているような調性を考慮した音程補正は扱っていない。

調性に関しては、五度圏 (Cycle of Fifth) など、古くから多くのモデルや理論が存在する。18 世紀の数学者 Leonard Euler (1739) と 19 世紀の音楽理論研究者 Hugo Riemann (1880) は、音名をノードとし、協和関係 (完全 5 度, 長 3 度, 短 3 度) にある音名とリンクさせたネットワーク Tonnetz を考案した [6]。図 2 に示すように、Tonnetz 上では長 3 和音と短 3 和音が三角形で表現される。1980 年代には、Riemann のモデルを発展させた形で新リーマン理論 (Neo-Riemannian theory) が数学的に定式化された [7], [8]。Tonnetz を純正律に適用した分析例 [9] や、トラス面上の Tonnetz 表現形式 [10] も存在し、さらに isomorphic keyboard [11] 等の楽器インタフェースにも応用されている。

音程の補正に関しては、 N -gram 旋律モデルに基づく即興演奏支援システム ism [2] がある。ism は「楽器演奏は習得している人」を対象とし、特徴ベクトルにはコードトーン等の調性に関する知識を用いている。これに対し本研究は、練習を必要としない楽器アプリの設計を焦点にし、周波数比の基本原則に基づいて音程補正を行う点が異なっている。

3. 調性感を考慮した音高補正

時間 t におけるタッチパネル上の位置 $x(t)$ を周波数 $f(x(t))$ に対応付けた上で、調性感/スケール感を伴う周波数 $f'(x(t))$ に音高補正する場合を考える。まず、音高補正前の周波数 $f(x(t))$ は、次式によって対数周波数軸上に対応付けられる。

$$f(x(t)) = f_0 \exp(\alpha(x(t) - x_0)) \quad (1)$$

ただし f_0 は基音の周波数であり、 x_0 は f_0 に対応する位置、 α は位置変化と周波数変化の比率を調整する係数である。

この $f(x(t))$ を、調性感やスケール感を考慮して $f'(x(t))$ に補正する。もし、12 平均律の長音階を用いて f を f' に補正するだけであれば、たとえば以下のように、音程の集合を事前知識として与えるのが一般的である*3。

*3 ただし、式 (4) の mod 演算は最小非負剰余であり、絶対値最小剰余ではない。

$$f'(x(t)) = 2^{\frac{k}{12}} f_0 \quad (2)$$

$$k = \arg \min_{k \in K} |f'(x(t)) - f(x(t))| \quad (3)$$

$$K = \{k | k \bmod 12 \in \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}\} \quad (4)$$

これに対し、本研究では調性感を考慮しつつ音程の集合を変更できるモデルを検討する。具体的には次式のように、基音 f_0 に対する周波数比が $p \in \mathbb{P}_{2,n}$ による指数表現で表せる音高へと補正する (ただし、 $z_p \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}_{m,n}$ は m 以上 n 以下の素数の集合)。

$$f'(x(t)) = \left(\prod_{p \in \mathbb{P}_{2,n}} p^{z_p} \right) f_0 \quad (5)$$

$$[z_p] = \arg \min_{[z_p] \in \mathbb{Z}^{\mathbb{P}_{2,n}}} |f'(x(t)) - f(x(t))| \quad (6)$$

$n = 5$ のとき、3 の指数 z_3 と 5 の指数 z_5 の 2 軸から成る平面に着目すると、原点を基音ノード、整数格子点を音程ノードとする Tonnetz を導くことができる。以下では、この素数指数表現に基づくモデルが Tonnetz の一般化であることを示す。

3.1 素数指数表現に基づく一般化 Tonnetz

純正律音程については、上記の式 (5) のように、基音に対する周波数比を素数の指数表現で表すことができる。 n を超えない素数の積によって周波数比が表せる純正律を n -limit と呼び、一般的な純正律は 5-limit である [12]。つまり一般的な純正律では、以下のように、音程 f' と基音 f_0 の比は 5 以下の素数の指数表現で表すことができる。

$$f' = 2^{z_2} \cdot 3^{z_3} \cdot 5^{z_5} f_0 \quad (7)$$

表 1 に、音程 (音度記号) と素数指数 z_2, z_3, z_5 の対応関係を示す。このとき、2 の指数 $z_2 \in \mathbb{Z}$ を増減させてもオ

表 1 5-limit 純正律音程の基音 I に対する周波数比と素数指数

音程	I	#I	II	#II	III	IV
周波数比	1	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$
セント値	0	111.7	203.9	315.6	386.3	498.0
2 の指数 z_2	0	4	-3	1	-2	2
3 の指数 z_3	0	-1	2	1	0	-1
5 の指数 z_5	0	-1	0	-1	1	0

#IV	V	#V	VI	#VI	VII
$\frac{64}{45}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{15}{8}$
609.8	702.0	813.7	884.4	1017.6	1088.3
6	-1	3	0	0	-3
-2	1	0	-1	2	1
-1	0	-1	1	-1	1

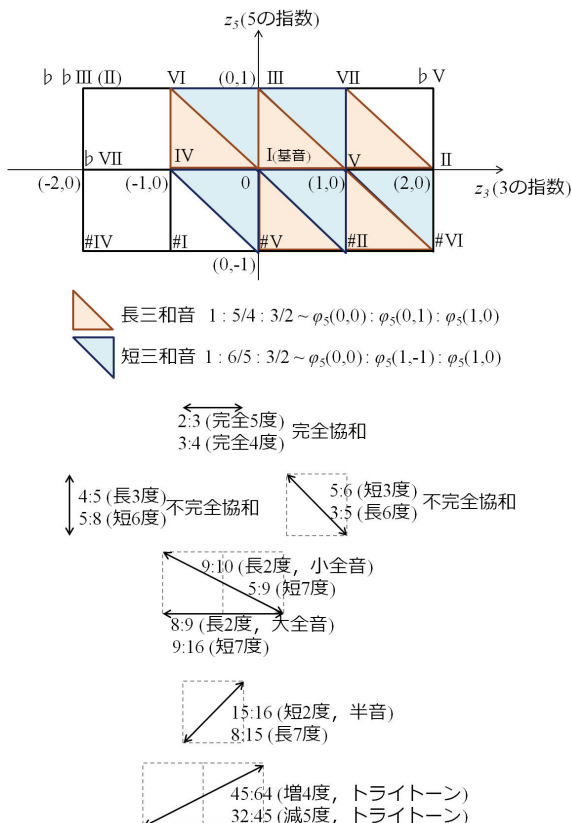


図3 5-limit 純正律に対応する一般化 Tonnetz (5-limit Tonnetz)

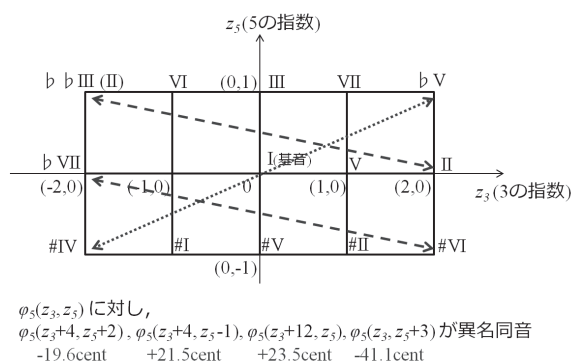


図4 5-limit Tonnetz 上で異名同音になる整数格子点

クターブ違いの同一音程と見なせることから、 z_2 を除く z_3, z_5 に着目したモデルを考える。図3は、 (z_3, z_5) の2軸から成る平面に、各音程をプロットしたものである。これを Riemann の Tonnetz (図2) と比べると、整数格子点が音程のノードに、ベクトル $(1, 0)$ が完全5度リンクに、 $(0, 1)$ が長3度リンクに、 $(1, -1)$ が短3度リンクに対応していることがわかる。長三和音と短三和音についても、Tonnetz と同様に三角形で表すことができる。なお、図中の $\phi_n(\cdot)$ は $\phi_n(z_3, \dots, z_n) = 2^{z_2} \prod_{p \in \mathbb{P}_{3,n}} p^{z_p}$ (ただし z_2 は $1 \leq \phi(\cdot) < 2$ を満たす値) であり、たとえば長三和音 (周波数比 $1 : \frac{5}{4} : \frac{3}{2}$) は $\phi_5(0, 0) : \phi_5(0, 1) : \phi_5(1, 0)$ と表わされる。また、協和音程だけでなく、半音 $(-1, -1)$ やトライトーン $(-2, -1)$ のような不協和音程もベクトルで表現さ

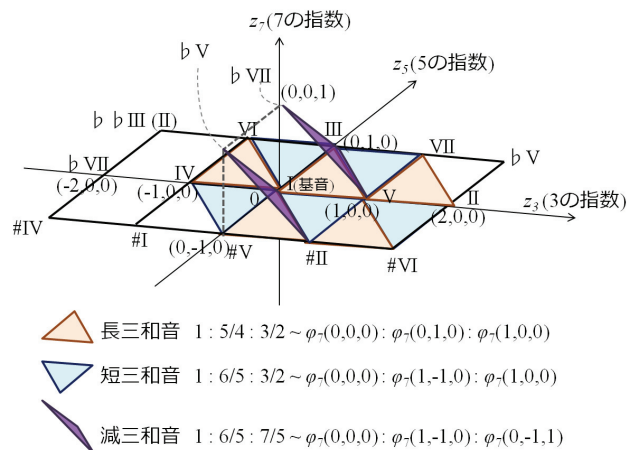


図5 7-limit 純正律に対応する一般化 Tonnetz (7-limit Tonnetz)

れる。これらのことから、ベクトル $(0, 1), (1, -1)$ から構成される $\nearrow \searrow \nearrow$ というパターンを辿ることで3度堆積によるコードトーンやテンションノートを表現することができ、「その途中で $(-1, -1)$ つまり \swarrow を辿ってはならない」というルールでアヴォイドノート (回避音) を表現することができる。

また、図4に示したように、異名同音になる整数格子点のペアが存在する。これは、 $2^{-11} \cdot 3^4 \cdot 5^2 = 0.98877$ (-19.6 セント), $2^{-4} \cdot 3^4 \cdot 5^{-1} = 1.0125$ (+21.5 セント), $2^{-19} \cdot 3^{12} \cdot 5^0 = 1.0136$ (+23.5 セント, ピタゴラスコンマ) のように、1に近い周波数比に「戻る」点が存在することによる。このようなペアを同一点として重ね合わせると、循環的なトーラス面上の Tonnetz 表現形式 [10] が導かれる。

さらに、一般の n -limit 純正律 [12] に対応する拡張を検討する。5-limit の際と同様に、オクターブ違いと見なせる2の次数 z_2 を除外し、 $[z_p]_{p \in \mathbb{P}_{3,n}}$ で構成される空間 $\mathbb{Z}^{\mathbb{P}_{3,n}}$ を考える。この空間においても、整数格子点を n -limit 純正律の音程ノードと見なし、それらを繋ぐベクトルをリンクと見なすことで、 n -limit に一般化した Tonnetz を表現できる。例として $n = 7$, つまり 7-limit の場合を考えると、図5のように z_3, z_5, z_7 から成る3次元空間になる。 z_3 - z_5 平面上には、5-limit のモデル (図3) が埋め込まれていることがわかる。また7-limit 純正律では、減三和音 (diminished) を構成するトライトーン (e.g. I と #IV) の周波数比が $1 : \frac{7}{5}$ で表され、これは $(0, -1, 1)$ というベクトルに対応する。このことから、長三和音や短三和音だけでなく、減三和音も図のような三角形で表現可能になる。

以上のように本モデルは、周波数比の素数指数表現から Tonnetz のような調性のヒューリスティクスを導出できるだけでなく、Tonnetz よりも更に一般化されたモデルになっている。よって本稿では、本モデルを素数指数表現に基づく一般化 Tonnetz (Prime-Factor-based Generalized Tonnetz; PFG Tonnetz) と呼ぶ。また、 n -limit 純正律に対応するモデルを n -limit Tonnetz と呼ぶ。

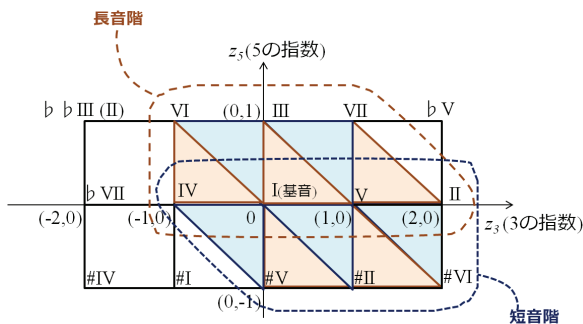


図 6 長音階・短音階との対応

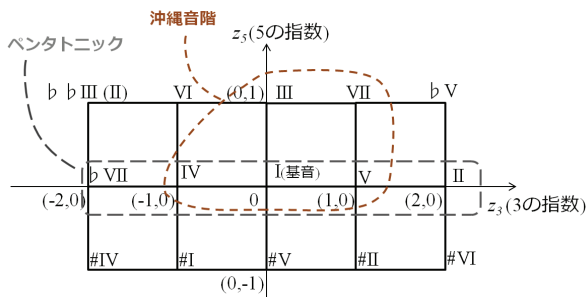


図 7 琉球音階、ペンタトニック（ヨナ抜き音階）との対応

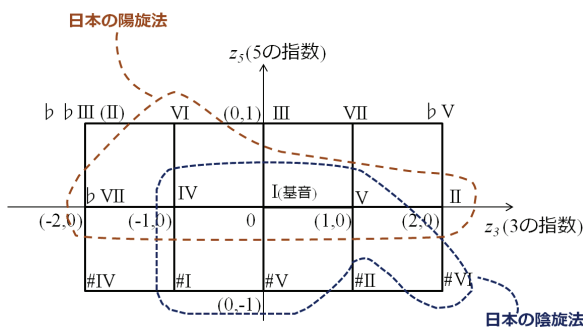


図 8 日本の陽旋法、陰旋法との対応

3.2 5-limit Tonnetz と音階・旋法

5-limit Tonnetz と長音階・短音階との対応を図 6 に示す。長音階は基音上の長 3 度によって特徴付けられ、 $z_5 \geq 0$ に現れる というパターンに対応する。一方短音階は基音上の短 3 度によって特徴付けられ、 $z_5 \leq 0$ に現れる というパターンに対応する。

他にも、明るいメジャー系の音階や旋法（図 7 の沖繩音階、図 8 の陽旋法）は $z_5 \geq 0$ に現れ、暗いマイナー系の音階や旋法（図 8 の陰旋法）は $z_5 \leq 0$ に現れるという性質がある。また、紀元前から存在するピタゴラス音階のペンタトニック、別名ヨナ抜き音階は、 $z_5 = 0$ すなわち z_3 軸上に現れる。ピタゴラス音階は 3-limit 純正律であるため、 z_3 軸上に 3-limit Tonnetz が埋め込まれていると捉えることもできる。

ここまでは、有名な音階や旋法を与え、それに対応する 5-limit Tonnetz 上のパターンを示した。上記の音階や旋法はどれも、5-limit Tonnetz 上の隣接した整数格子点の集合

に対応していた。このことから、隣接する格子点の集合を与えることで、新たな音階を作ることができる可能性がある。ただし、5-limit Tonnetz 上の性質を踏まえ、2 つの整数格子点 v_1, v_2 の差が以下の性質を満たす（すなわち、差が協和音程の集合 H に含まれる）場合のみ、それらは隣接していると見なし、 $\text{adj}(v_1, v_2)$ と表す。

$$v_1 - v_2 \in H \vee v_2 - v_1 \in H \quad (8)$$

$$H = \{(1, 0), (0, 1), (1, -1)\} \quad (9)$$

このとき、ある与えられた整数格子点の集合 S が以下の条件を満たす場合に、 S を隣接格子点の集合と見なす。

$$\forall v \in S \exists v_1, v_2, \dots, v_k \in S;$$

$$\text{adj}((0, 0), v_1) \wedge \text{adj}(v_1, v_2) \wedge \dots \wedge \text{adj}(v_k, v) \quad (10)$$

$$\forall v = (z_3, z_5) \in S; -2 \leq z_3 \leq 2 \wedge -1 \leq z_5 \leq 1 \quad (11)$$

$$(0, 0) \in S \quad (12)$$

なお、上述した 6 つの音階や旋律は、全てこの条件を満たしている。以下では、式 10 のような条件を満たす 5-limit Tonnetz 上の格子点集合 S をユーザが指定することで、音階や旋律を変えながら演奏できる楽器アプリ TonalityTouch を設計する。

4. TonalityTouch の設計と試作

TonalityTouch は、図 1 に示したような音高補正をリアルタイムで行えるスマートフォン上の楽器アプリケーションである。本稿では、Android OS 2.3.4 上のアプリとして試作した。

4.1 5-limit Tonnetz を用いた音高補正

まず、時刻 t におけるスワイプ・タッチ操作の位置 $x(t)$ は、3 節で示した式 (1) により対数周波数軸上の $f(x(t))$ に変換される。ただし、式 (1) の x_0 にはスクリーン中央付近の座標を用い、端から端までで 4 オクターブ程度の音域をカバーできるように α を調整する。これにより得た $f(x(t))$ を、与えられた 5-limit Tonnetz 上の格子点集合 S と次式によって $f'(x(t))$ へと音高補正する。

$$f'(x(t)) = 2^{z_2} \cdot 3^{z_3} \cdot 5^{z_5} f_0 \quad (13)$$

$$[z_2, z_3, z_5] = \arg \min_{[z_2, z_3, z_5] \in \mathbb{Z} \times \mathbb{S}} |f'(x(t)) - f(x(t))| \quad (14)$$

ここで、ユーザのスワイプ操作・タッチ操作に追随しながら図 1 に示したような音高補正をリアルタイムで行うため、単純な正弦波による純音を仮定し、サンプリング周波数を $f_s = 11025[\text{Hz}]$ あるいは $8000[\text{Hz}]$ と低めに設定する。

時間 t における変位 $y(t)$ を、次式のように位相 $\theta(t)$ を介して求めることにより、周波数 $f'(x(t))$ が離散的に変わった際のノイズを防ぐことができ、スワイプ・タッチ操作イベントが発生した時刻 t との整合性を保ちやすくなる。

$$y(t) = \sin(\theta(t)) \quad (15)$$

$$\theta(t + \Delta t) = \theta(t) + 2\pi f'(x(t))\Delta t \quad (16)$$

$$\Delta t = \frac{1}{f_s} [\text{sec}] \quad (17)$$

また、本システムはマルチタッチ $x_1(t)$, $x_2(t)$ による 2 和音 $f'_1(x_1(t))$, $f'_2(x_2(t))$ に対応するため、`android.view.MotionEvent#getPointerID` メソッドによって取得できるポインタ ID によって位置 $x_i(t)$, 周波数 $f'_i(x_i(t))$, 位相 $\theta_i(t)$ を管理する。マルチタッチを検出した際は、和音の加算によるクリッピングを防ぐため、変位 $y_i(t)$ に乗算する振幅を小さく変更する。

4.2 モックアップと試作版の動作

図 9 は、本システムのモックアップ図である。ユーザは、用意された一般的な音階をメニューから選ぶか、図右下の

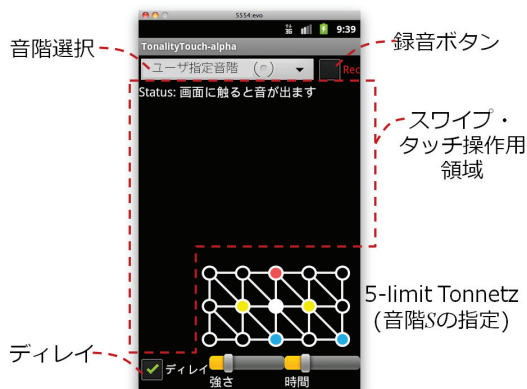


図 9 TonalityTouch のインターフェース (モックアップ)

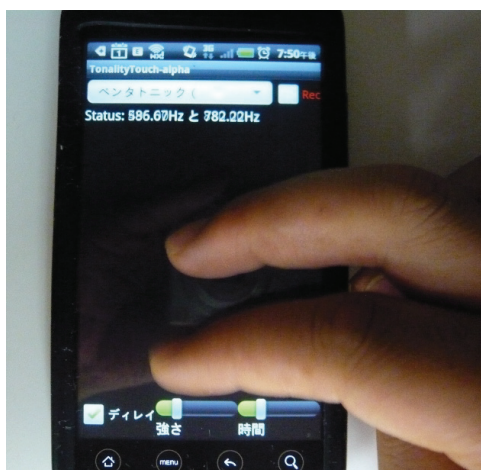


図 10 TonalityTouch 試作版 (S の指定方法はメニュー選択のみ対応)

5-limit Tonnetz を用いて新たな格子点集合 S を指定する。原点の基音は白色で表し、 z_3 軸上の格子点が選択された場合は黄色で表す。また、5-limit Tonnetz 上では $z_5 \geq 0$ の範囲にメジャー系の明るい音階や旋法が現れ、 $z_5 \leq 0$ の範囲にマイナー系の暗い音階や旋法が現れることから、 $z_5 > 0$ の格子点が選択された場合は赤い色で、 $z_5 < 0$ の格子点が選択された場合は青い色で表す。格子点が選択された時は対応する音階が鳴り、格子点に囲まれた三角形の中央付近がタッチされた時は対応する三和音が鳴る。指定された格子点集合 S が 3 節の式 (10) を満たさない場合はアラートを表示し、調性感を伴わない音階である可能性をユーザに通知する。なお、図中で指定されている格子点集合を用いると、I, III, IV, V, #V, #IV (e.g. C, E, F, G, G#, A#) という音階を指定したことになる。その上で、赤い点線で囲まれた演奏用の領域でスワイプ・タッチ操作をすると、指定された音階への音高補正がリアルタイムで行われる。音程の境界に明示的な線を表示するデザインも考えられるが、ユーザの自由かつ「適当な」スワイプ・タッチ操作を促すためには境界線は邪魔になると考え、あえて境界を見せないデザインにする。さらに、図下部のチェックボックスによりディレイをかけることができる。また、図右上のチェックボックスにより、WAV 形式での録音も可能である。WAV ファイルの保存場所として `/sdcard/media/` の下のフォルダ `ringtones`, `alarms`, `notifications` を選択することにより、着信音、アラーム、通知音として利用可能にできる。

図 10 は、Android 実機で動作する試作版である。本試作版では 5-limit Tonnetz により S を指定する機能が未実装であるため、用意された音階からの選択のみサポートしている。図中では、ペンタトニック音階が選択されており、これは 5-limit Tonnetz の z_3 軸上の 5 点を S として指定したことになる。つまり、スクリーン上に 5-limit Tonnetz は表示されていないが、音高補正のためのモデルとして 5-limit Tonnetz を用いている。なお、図 9 で説明した他の機能については、本試作版でも全て実装済みである。実機 HTC Evo (CPU: QSD8650 1GHz, RAM: 512MB) を用いて動作確認を行ったところ、サンプリング周波数 $f_s = 22050$ [Hz] という条件下では、音高補正のみの場合には目立ったノイズが伴わなかったが、マルチタッチ時の和音やディレイ演算に顕著なノイズが伴った。そこで $f_s = 11025$ [Hz] まで下げたところ、音高補正、和音、ディレイ演算の全てを同時に処理した場合も目立ったノイズを伴わず、リアルタイムで動作することを確認した。

5. おわりに

スマートフォン上のスワイプ操作やタッチ操作により、調性感を伴う音階での演奏が可能な楽器アプリ Tonality-Touch を設計し、試作した。また、調性感を伴う新しい音

階や旋法を指定できるようにする数理モデルを検討するにあたり、周波数比の基本原則から調性のモデル Tonnetz を導出できることを示した。さらに、これを n -limit 純正律に拡張することで一般化し、素数指数表現に基づく一般化 Tonnetz (PFG Tonnetz) と名付けた。特に、一般的な純正律に対応する 5-limit Tonnetz について分析し、3 度堆積によるコードトーンやテンションノートに対応するパターンや、アヴォイドノート (回避音) に対応するルールを示した。さらに、6 つの有名な音階や旋法 (長音階, 短音階, ペンタトニック音階, 琉球音階, 日本の陽旋法, 陰旋法) を、5-limit Tonnetz 上の隣接する整数格子点集合として表現できることを示した。このことから類推し、5-limit Tonnetz 上での格子点の隣接条件を定義した上で、格子点集合 S が調性感を持つ音階になる条件を定義した。

今後は、本稿の試作版で未実装であった格子点集合 S の指定機能を実装すると共に、 S が調性感を持つ条件の妥当性を検証する必要がある。また、演奏中に S を動的に自動変更する手法を検討したい。具体的には、単旋律の N -gram を 5-limit Tonnetz 上での格子点の N -gram として表し、特定ジャンルの既存楽曲データから学習した N -gram 確率を用いて S を動的に変更する手法を検討したい。その際、 (z_3, z_5) の N -gram モデルだけでなく、たとえば z_3, z_5 単独の N -gram モデルを併用することにより、旋律の予測性能が向上するか否かを調査する。このような調査により、単旋律モデル学習への本モデルの適用可能性を検証していく予定である。

参考文献

- [1] 小方厚：音律と音階の科学—ドレミ…はどのようにして生まれたか、講談社 (2007).
- [2] 石田克久, 北原鉄朗, 武田正之：N-gram による旋律の音楽的適否判定に基づいた即興演奏支援システム, 情報処理学会論文誌, Vol. 46, No. 7, pp. 1549–1559 (2005).
- [3] 川村修, 伊藤孝行, 新谷虎松：4 分音符分の演奏に基づく演奏家の特徴抽出手法の提案, 人工知能学会第 18 回全国大会論文集, 2G1-03 (2004).
- [4] 明和電機：オタマトーン for iPhone, iPod touch App, <http://www.maywadenki.com/app/> (2010).
- [5] Hamanaka, M., Yoshiya, M., Yoshida, S.: Constructing Music Applications for Smartphones, *Proceedings of the International Computer Music Conference 2011*, pp. 308–311 (2011).
- [6] Behringer, R., Elliott, J.: Linking Physical Space with the Riemann Tonnetz for Exploration of Western Tonality, *Music Education*, Chapter 6, Nova Science Publishers, pp. 131–143 (2010).
- [7] Cohn, R.: Introduction to Neo-Riemannian Theory: A Survey and a Historical Perspective, *Journal of Music Theory*, Vol. 42, No. 2, pp. 167–180 (1998).
- [8] Chew, E.: Out of the Grid and Into the Spiral: Geometric Interpretations of and Comparisons with the Spiral-Array Model of Pitch Relations, *Tonal Theory for the Digital Age*, Computing in Musicology, Vol. 15, Chapter 4, pp. 51–72 (2007).
- [9] Kekkey, R.T.: Charting Enharmonicism on the Just Intonation Tonnetz: A Practical Approach to Neo-Riemannian Analysis, Music Theory Southeast 12th Annual Meeting, <http://www.robertkelleyphd.com/justtonnetz.pdf> (2003).
- [10] Purwins, H., Blankertz, B., Obermayer, K.: Toroidal Models in Tonal Theory and Pitch-Class Analysis, *Tonal Theory for the Digital Age*, Computing in Musicology, Vol. 15, Chapter 5, pp. 73–98 (2007).
- [11] Milne, A., Sethares, W.A. and Plamondon, J., Invariant Fingerings Across a Tuning Continuum, *Computer Music Journal*, Winter 2007, Vol. 31, No. 4, Pages 15–32.
- [12] Partch, L.: *Genesis of A Music*, Da Capo Press (1974).