Vol.2012-CSEC-58 No.41
Vol.2012-SPT-4 No.41
2012/7/20

モバイル端末のロック解除向けパターン認証の安全性評価

石黒　司[1]　福島　和英[1]　清本　晋作[1]　三宅　優[1]

概要：現在, 本人認証方式としてパターン認証があり, Android 等のスマートフォンで広く使われている．パターン認証とは指の軌跡を入力とし, 本人を認証する方式である．この方式はユーザビリティの高さと実現の容易性から広く受け入れられているが, 安全性に関する十分な解析はなされていない．そこで, 本稿ではパターン認証のモデルを定義し, 現在使われているパターンルールと, ルールを変えた場合の安全性について解析する．

Security Analysis of Pattern Authentication on Smartphone

Tsukasa Ishiguro[1]　Kazuhide Fukushima[1]　Shinsaku Kiyomoto[1]　Yutaka Miyake[1]

Abstract: Pattern authentication is a motion-based user authentication method where a user traces dots on a screen with his/her finger and it has been widely used for a unlock function on smart phones. The pattern authentication is user-friendly and easy to implement in smart phones; however, the security analysis of the pattern authentication is not sufficient in comparison with security analyses of other user authentication methods. In this paper, we model the pattern authentication, and then we explain the security analysis of the pattern authentication with basic and relaxed rules for patterns.

1. はじめに

近年, スマートフォンを始めとするモバイル端末が幅広く普及している．特にスマートフォンは他のモバイル端末に比べてユーザの個人情報を多く持っており, それらを統合することで便利な利用ができる反面, 第三者に利用された際のリスクが大きい．そのため, 適切な本人認証方式によって使用しているユーザが正規のユーザかどうかを認証する必要がある．

代表的な本人認証技術として, (1) 本人の知識による認証, (2) 本人の所有物による認証, (3) 本人自身の特徴による認証がある．(1) の代表的な例としてパスワード認証, 画像認証 [10] がある．パスワード認証は, 銀行口座や Web アプリのログインなど様々なサービスで用いられている．(2) の例として, 学生証や社員証, クレジットカードなどがあり, 広く利用されている．(3) は生体認証と呼ばれ, ユーザの指紋や静脈, 虹彩, 掌紋, 顔等の生体情報を基に認証を行う方式である [6]．生体認証は, (1) や (2) に比べてなりすましや覗き見攻撃を防ぐことが可能である．しかし, 生体認証の導入には専用の装置が必要な事が多く, 導入のハードルが高いことがデメリットとなっている．

スマートフォン独特の認証方式として, パターン認証がある．この方式は (1) に分類される方式であり, 画面に表示されているマスを指でなぞることによって, マスを選択する順番が正しいかどうかで認証を行う．この方式は, ハードウェアテンキー入力, その他特別な認証用デバイスが無いスマートフォン端末ではパスワードよりも入力しやすいため, 特に Android 端末で広く使用されている．

パスワード認証の安全性は使用する文字の種類, パスワードの長さによって評価されている．ユーザの誕生日等, 覚えやすいパスワードは攻撃者にとっても推測しやすく, 辞書攻撃などによって実際に攻撃可能であることが示されて

[1] 株式会社 KDDI 研究所
KDDI R&D Laboratories Inc.

いる [2], [7]．そのため, 現在の PC 環境においては英数字混合で 8 文字以上が推奨されている [5], [8].

Android のパターン認証における組み合わせの数 (手数) は Otaku によって計算されている [9]．しかし, マス目の数やルールなど, より一般的な条件での評価・比較はなされていない．単純に考えると, マス目の数が増えると入力の組み合わせが増えるが, ユーザの入力の負担が増えてしまう．更に, ルールによっても手数やユーザビリティに影響を与える可能性もある．そのため, 安全性とユーザビリティのバランスを踏まえ, 適切なマス目の数を検討する必要がある．そこで, 本稿ではマス目の数やルールと安全性の関係性を解析する．

本人認証に対する攻撃として, オフライン攻撃とオンライン攻撃がある [3]．オフライン攻撃は, パスワードやパターンを入力した結果を暗号化やハッシュ化したファイルを攻撃者は持っており, 試行回数に制約の無い状況でパスワードの復元を行う攻撃である．一方, オンライン攻撃では試行回数に制約があるため, より攻撃者にとって厳しい環境を想定している．例えば Android のパターン認証では, 5 回パターンを不正確に入力すると 30 秒間入力を受け付けなるため, 機械的な全数探索は難しい．通常, Android のパターンはハッシュ値が内部に保存され, 値の参照には root 権限が必要である．しかし, 端末によっては root 権限を取るツールが公開されているものもあり, それを組み合わせるとオフライン攻撃を行われる可能性がある．そのため本稿ではオフライン攻撃を想定し, 安全性を解析する．

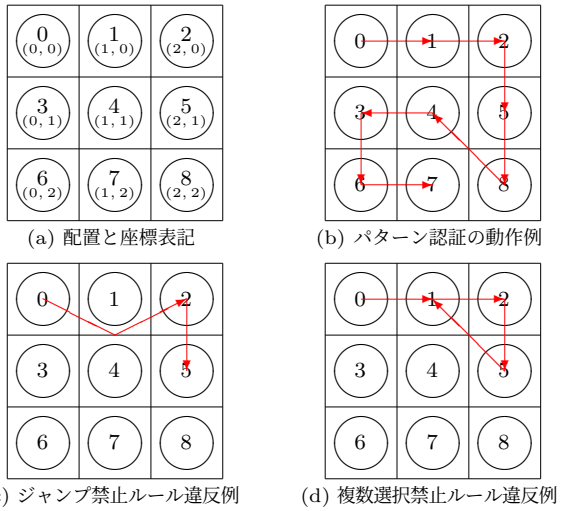
2. パターン認証の定義

本節ではパターン認証を形式的に定義する．

2.1 パターンの定義

$n \times m$ の点を左上から右下に順に 0 から $(nm-1)$ まで順番を定める．例えば 3×3 の場合, 図 1(a) のように 0 から 8 まで順に並ぶ．ユーザは, この点を順番に選択することによりパターンを生成する．この際, 何個の点を利用してもよい．パターンは, 選択した点をベクトル表記して表す．例えば図 1(b) は $(0,1,2,5,8,4,3,6,7)$ と表記する．また, パターンの別表記として座標表記も定義する．座標表記では, ある点 p は $(p \bmod n, p \text{ quo } m)$ と表す．ここで, $a \bmod b$ は a を b で割った余りを表し, $a \text{ quo } b$ は商を表す．その場合, $(0,1,2,5,8,4,3,6,7)$ は座標表記では $((0,0),(1,0),(2,0),(2,1),(2,2),(1,1),(0,1),(0,2),(1,2))$ となる．

また, 選択した点の個数をステップ数と呼ぶ．例えば図 1(b) のステップ数は 9 である．ステップ数の上限は nm とする．



(a) 配置と座標表記　(b) パターン認証の動作例

(c) ジャンプ禁止ルール違反例　(d) 複数選択禁止ルール違反例

図 1　3×3 パターンの定義

2.2 ルール

Android 等のパターン認証において, 以下の 2 ルールが標準的に用いられる．

- ジャンプ禁止ルール
  点を通過してはならない．しかし, その点がすでに選択されている場合には通過しても良い．
- 複数選択禁止ルール
  同じ点を 2 回以上選択してはならない．

このルールそれぞれについて違反例を図 1(c),1(d) に示した．また実際の Android 端末では, 「最低でも 4 つ以上の点を選択しなければならない」というルールもある．これは弱い条件のパターンを取り除くという効果があるが安全性評価には影響しないため, 本稿では除外する．

3. 安全性解析

本節では安全性解析について説明する．最初に安全性定義を行い, ルールごとに手数を求める．

3.1 安全性定義

$n \times m$ のパターンにおいて, あるルールの基でステップ数 t 回の点移動を用いて可能な手数の総数を ℓ_t とする．この時, このパターン認証の安全性は $\text{len}(\sum_{1 \le i \le nm} \ell_i)$ とする．ここで $\text{len}(a)$ は a のビット長を表す関数 $\text{len}(a) = \lfloor \log_2 a \rfloor + 1$ と定義する．通常, Android 端末ではユーザが認証したパターンは符号化され, SHA-1 によってハッシュ化されるため, 160 ビットセキュリティを上限とするが, 本稿では単純に手数によって安全性を評価する．

3.2 ルールを適用しない場合 (No ルール)

1 ステップ目の選び方は nm 通り存在する．ステップ数 i の時, 次のステップの選択の仕方は $(nm-1)$ 通りとなる．従って, 全ての手数は

$$\sum_{1\le i\le nm} \ell_i = \sum_{1\le i\le nm} nm(nm-1)^{i-1}$$

となる．

3.3 ジャンプ禁止ルールのみ適用した場合

複数選択禁止ルールは適用しないため, 何度でも同じマスを選択できるが, 連続では選択できないものとする．この場合は, 漸化式を用いて r ステップでの手数を定式化する．

点 p から r ステップで進める手数の総数を S_p^r と表す．自明な関係式として以下の等式が成り立つ．

$$\ell_r = \sum_{1\le i\le nm} S_i^r$$

ここで $n=m=3$ とする．3×3 の場合, 図 2 に示す対称性が存在する．例えば, 四隅のマス $S_0^r, S_2^r, S_6^r, S_8^r$ はいずれも同じ手数となる．この対称性から以下のように簡略化される．

$$\ell_r = 4S_0^r + 4S_1^r + S_4^r \tag{1}$$

そのため, S_0^r, S_1^r, S_4^r を以下の漸化式で表すことにより ℓ_i を計算することができる．

$$\begin{aligned} S_0^r &= 4S_1^{r-1} + S_4^{r-1} \\ S_1^r &= 4S_0^{r-1} + 2S_1^{r-1} + S_4^{r-1} \\ S_4^r &= 4S_0^{r-1} + 4S_1^{r-1} \end{aligned}$$

ここで, 初期値は $S_i^0 = 1$ となる．この関係式を行列で表すと,

$$\begin{bmatrix} S_0^r \\ S_1^r \\ S_4^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0^{r-1} \\ S_1^{r-1} \\ S_4^{r-1} \end{bmatrix}$$

となる．$n=m=4$ の場合は,

$$\begin{aligned} \ell_r &= 4S_0^r + 8S_1^r + 4S_5^r, \\ \begin{bmatrix} S_0^r \\ S_1^r \\ S_5^r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0^{r-1} \\ S_1^{r-1} \\ S_5^{r-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる．$n=m=5$ の場合は,

$$\begin{aligned} \ell_r &= 4S_0^r + 8S_1^r + 4S_2^r + 4S_6^r + 4S_7^r + S_{13}^r, \\ \begin{bmatrix} S_0^r \\ S_1^r \\ S_2^r \\ S_6^r \\ S_7^r \\ S_{12}^r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 4 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0^{r-1} \\ S_1^{r-1} \\ S_2^{r-1} \\ S_6^{r-1} \\ S_7^{r-1} \\ S_{12}^{r-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる．一方, 非正方のパターンもこの対称性を利用し, 漸化式を導ける．$n=6, m=2$ の時は

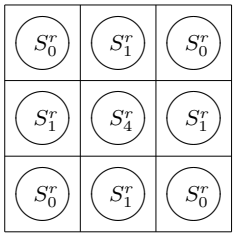


図 2 3×3 の対称性

$$\begin{aligned} \ell_r &= 4(S_0^r + S_2^r + S_4^r), \\ \begin{bmatrix} S_0^r \\ S_2^r \\ S_4^r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0^{r-1} \\ S_2^{r-1} \\ S_4^{r-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる．$n=4, m=3$ の時は,

$$\begin{aligned} \ell_r &= 4S_0^r + 4S_1^r + 2S_4^r + 2S_5^r, \\ \begin{bmatrix} S_0^r \\ S_1^r \\ S_4^r \\ S_5^r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0^{r-1} \\ S_1^{r-1} \\ S_4^{r-1} \\ S_5^{r-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる．

3.4 複数選択禁止ルールのみ適用した場合

複数選択禁止ルールのみ適用した場合の手数を求める．この場合, ジャンプによる制限は無いため, あるステップ i の時, 必ず $(nm-i)$ 個のマスが選択可能である．従って, ステップ i の場合の手数 $\ell_i = (nm)_i$ となる．また, 複数選択禁止ルールを適用した場合, 最後の 1 マスの選択の自由度が無いため, $\ell_{nm} = \ell_{nm-1}$ となる．

3.5 両方のルールを適用した場合 (標準ルール)

ジャンプ禁止ルール, 複数選択禁止ルールを両方共適用した場合の手数を求める．この場合は単純な漸化式では表せないため, プログラムを用いて手数を計算する．

$n\times m$ の大きさにおいて, ステップ数 r で選択できる手数を求める．最初に 0 から $nm-1$ までの数値から r 個選び順列 $(a_0, \ldots, a_{r-1})$ を生成する．生成したパターンそれぞれに対して以下の 2 条件を満足するか判定を行う．

1： $a_i = a_j$, ただし $i \neq j$,

2： $0 < \exists t < c, (x_{a_i} + \dfrac{t\triangle x}{c}, y_{a_i} + \dfrac{t\triangle y}{c}) \notin \{a_0, \ldots, a_{i-1}\}$,
ただし $c = \gcd(\triangle x, \triangle y)$,
$\triangle x = x_{a_{i+1}} - x_{a_i}, \triangle y = y_{a_{i+1}} - y_{a_i}$

ここで, ある点 a_i の座標表記を (x_{a_i}, y_{a_i}) とする．この条件を満足する場合には, そのパターンは無効としカウントしない．条件 2 では, 次に進むマスの間に未選択のマスが存在することを示している．

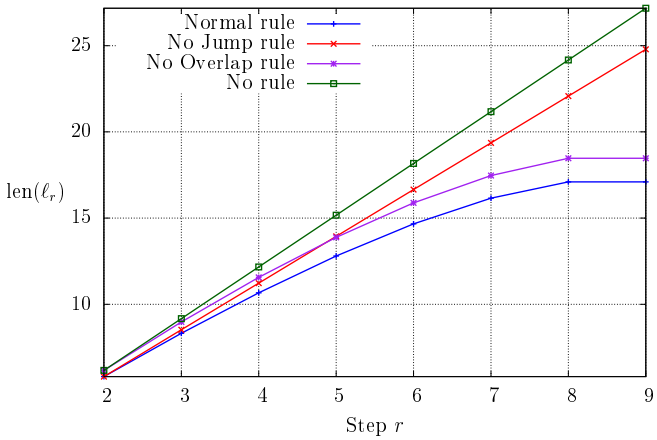


図 3 ルールごとの 3 × 3 のパターンの手数比較

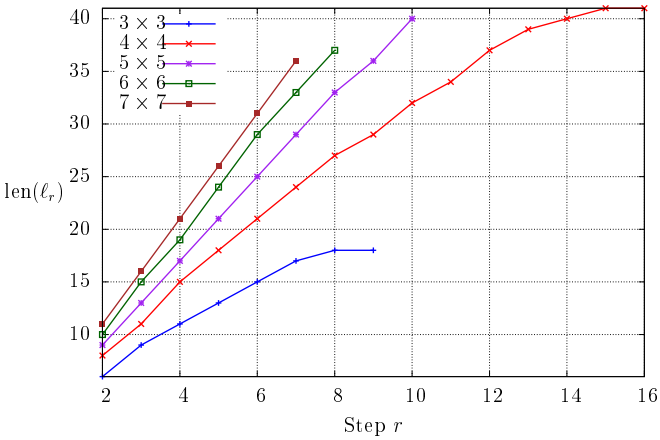


図 4 標準ルールでのマスの数による手数比較

4. 安全性比較

本節では前節までの手数の評価を基に, ルールとマスの数による安全性を示す.

4.1 正方パターンの場合

本節では $n \times n$ となる正方パターンの安全性を比較する. 前節までの計算によってそれぞれ $n = 3, 4$ について求めた手数を表 1,2 に示す. 正方パターンの場合, ジャンプ禁止ルールと複数選択禁止ルールでは, ステップ数が大きくなると複数選択禁止ルールの制約の方が大きく影響する. ジャンプ禁止ルールの場合, No ルールと比較して高々 2 ビット程度しか落ちないことがわかる. 一方, 複数選択禁止ルールの場合は最大で 9 ビット落ちており, 標準ルールとほぼ同じ手数となっている.

3 × 3 の場合のルールごとの手数を図 3 に示した. 3 × 3 の場合, 手数の合計は 19 ビットとなる. この 3 × 3 の標準ルールでの結果は [9] によって公開されている手数と一致する. ジャンプ禁止ルールは No ルールよりも傾きは小さいが, 指数関数となっていることがわかる. 一方, 複数選択禁止ルールではステップ数が上がるにつれて選択できるマス目の自由度が大幅に減るため, No ルールとの差が大きくなる.

標準ルールでマスの数を増やした場合のステップごとの手数を図 4 に示した. マス目の数が上がるにつれ手数は増えていくが, 相対的な増加率は減っていくことがわかる. 例えば 6 ステップ目において, 3 × 3 と 4 × 4 では 6 ビットの違いがあるが, 6 × 6, 7 × 7 の差は高々 2 ビット程度しかない.

標準ルールでのルールとマス目の数による安全性の比較を図 5 に示した. 5 × 5 の標準ルールにおける安全性は計算量的に難しいため, 他のルールとの割合による推測値とした. 表から, 5 × 5 の標準ルールでの安全性が約 80 ビットとなることがわかる.

一般のパスワード認証と比較する. 英数字, 空白を除く特殊文字を使ったパスワード認証の場合, 94 種類の文字がある. そのため推奨されている文字数 8 文字を用いた場合には 53 ビットの安全性を満たす. これはパターン認証では 4 × 4 でジャンプ禁止ルールを用いた場合か, 標準ルールで 5 × 5 を用いた場合が相当する.

4.2 非正方パターンの場合

本節では非正方パターンについて比較を行う. マス目の数が共に 12 である 6 × 2, 4 × 3 の場合について表 3 に示した. 3.2 節で示したとおり, No ルール, 複数選択禁止ルールのみの場合はマス目の数のみで決まるため, 6 × 2, 4 × 3 は同じ手数となる. ジャンプ禁止ルールを適用した場合, 正方行列に近い 4 × 3 の方が手数が多い. これは相対的に 6 × 2 の方が 1 直線に並ぶマスの数が多く, ジャンプ禁止ルールによって可能な手の制限が大きいと考えられる. 図 6 に標準ルールでの 6 × 2, 4 × 3 の手数を示した. 安全性に大きな差は無いが, 正方パターンに近い 4 × 3 の方がわずかに手数が大きいことがわかる.

5. Android 端末の安全性

通常の Android 端末では, 標準ルールで 3 × 3 のパターン認証が用いられている. このパラメータの安全性は 19 ビットであることを前節で示した. Android のソースコード [4] は公開されているため, 本節で Android 端末に対する攻撃について考察する. Android では, ユーザが任意にステップ数 4 以上でパターンを生成する. このパターンは本稿で示したマスの定義と同様に符号化される. 例えば図 1(b) のパターンは “01258367” と符号化され, ハッシュ関数 SHA-1 によってハッシュ化される. このハッシュ値は “/data/system/gesture.key” というファイルとして格納される. 実際に, ‘01258367” のパターンは “27a05a7bc9c951dfcb41de43d9dcc6a631c6660” とハッシュ化される. 本稿で示したとおり, 19 ビット程度の組み

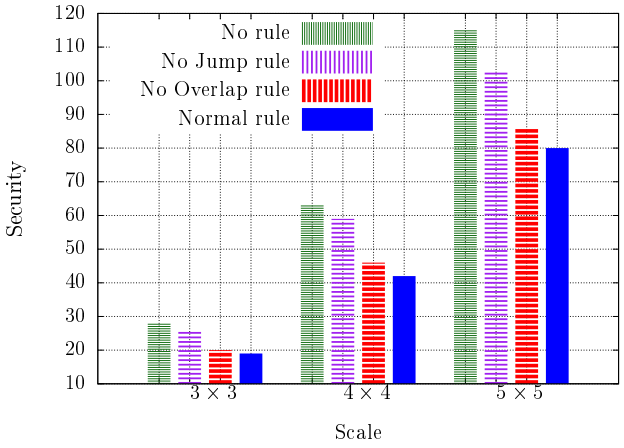


図 5 正方パターンでのルールごとの安全性比較

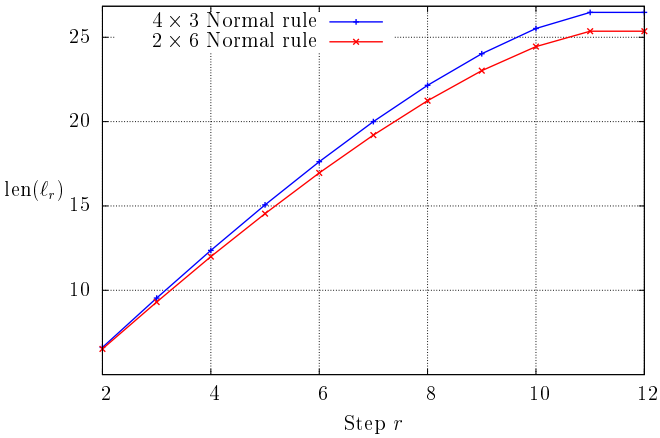


図 6 標準ルールでの 4 × 3 と 2 × 6 パターンの手数比較

合わせしか無いため, 単純に可能な手のハッシュ値を全て生成した場合, 20byte × 389497 < 8MByte となる．そのため, 実用的なサイズのテーブル参照のみでパターンを復元することが可能となる．

しかし通常は Android ではハッシュ値を格納している “/data/system/gesture.key” ファイルの参照には root 権限が必要である．そのためオフライン攻撃の実現は難しく, 通常の使用においてパターンを復元される可能性は低い．

6. おわりに

本稿ではパターン認証における安全性と, ルールと安全性の関係を解析した．Android で用いられている 3 × 3 の標準パターンの場合は 19 ビットの安全性を満たす．この安全性は数字のみを用いた 5 桁のパスワード認証と同等である．また, 単純に 4 × 4 にマス目を拡張した場合, 42 ビットの安全性となり 12 ケタの数字パスワードと同等となることを示した．

また, 本稿では標準的に用いられているルールを 2 つ定義した．特に複数回マスを選択してはいけないという複数選択禁止ルールは, 多くの手数を制限していることを示した．マス目の数を抑えつつ安全性の高いパターン認証のためには, 複数回選択可能とするモデルが適している．

本稿ではオフライン攻撃を想定して手数による安全性を検証した．しかし実際の Android 等の端末ではオフライン攻撃を行うには, root 権限等の特殊な環境が必要となり, 直ちに現実的な脅威とはならない．また, パターンロックの解除にはシステムの脆弱性を突くなどの方法もあるが, Android では強固であるという報告 [11] もあり, 現実的ではない．

パスワード認証では, 誕生日等のユーザが覚えやすいパスワードは攻撃者にとっても推測しやすいという問題があった．パターン認証においても, ユーザの入力のしやすさが影響し, パターンが限定されるという可能性がある．特にマス目の数を増やした場合, ユーザにとってはより覚えにくくなるため, 全ての組み合わせからランダムに入力されるとは考えにくく, 偏りが生じてしまうことが予想される．そのため, より現実的な安全性を知るためにはユーザビリティも踏まえた上で議論する必要がある．また, スクリーン付着した指紋を採取し, パターンを推測することも可能であり [1], 必ずしも手数の多さだけが安全性を決定するわけではない．

参考文献

[1] Evan M. Matt B. Adam J. A., Katherine G. and Jonathan M. S. Smudge attacks on smartphone touch screens. In *Proceedings of the 4th USENIX conference on Offensive technologies*, pp. pp. 1–7, 2010.

[2] A. Adams and M. A. Sasse. Users are not the enemy. *Commun. ACM*, Vol. 42, No. 12, pp. 40–46, 1999.

[3] S.M. Bellovin and M. Merritt. Encrypted key exchange: password-based protocols secure against dictionary attacks. In *Research in Security and Privacy, 1992. Proceedings., 1992 IEEE Computer Society Symposium on*, pp. 72–84, 1992.

[4] Google. Open source project. http://source.android.com/source/index.html.

[5] IPA. コンピュータウイルス不正アクセスの届出状況 [9 月分および第 3 四半期] について. http://www.ipa.go.jp/security/txt/2008/10outline.html.

[6] A. Jain, R. Bolle, and S. Pankanti. Introduction to biometrics. In *Biometrics*, pp. 1–41. Springer, 2002.

[7] S. Komanduri and D. R. Hutchings. Order and entropy in picture passwords. In *Proceedings of graphics interface 2008*, GI '08, pp. 115–122, 2008.

[8] Microsoft. Strong passwords: How to create and use them. http://www.microsoft.com/protect/yourself/password/create.mspx.

[9] Cedric Otaku. Otaku, cedric's weblog. http://beust.com/weblog2/archives/000497.html.

[10] X. Suo, Y. Zhu, and G.S. Owen. Graphical passwords: a survey. In *Computer Security Applications Conference, 21st Annual*, pp. 472–482, 2005.

[11] Wired.com. Fbi can't crack android pattern-screen lock. http://www.wired.com/threatlevel/2012/03/fbi-android-phone-lock/.

表 1 3 × 3 のパターン数

	No ルール		ジャンプ禁止 ルール		複数選択禁止 ルール		標準ルール	
r	手数 ℓ_r	len	手数 ℓ_r	len	手数 ℓ_r	len	手数 ℓ_r	len
1	9	4	9	4	9	4	9	4
2	72	6	56	6	72	7	56	6
3	576	10	360	9	504	9	320	9
4	4,608	13	2,280	12	3024	11	1,624	11
5	36,864	16	14,544	14	15,120	13	7,152	13
6	294,912	19	92,448	17	60,480	15	26,016	15
7	2,359,296	22	588,672	20	181,440	17	72,912	17
8	1,887,4368	25	3,745,152	22	362,880	18	140,704	18
9	150,994,944	28	23,837,184	25	362,880	18	140,704	18
合計	172,565,649	28	28,280,705	25	986,409	20	389,497	19

表 2 4 × 4 のパターン数

	No ルール		ジャンプ禁止 ルール		複数選択禁止 ルール		標準ルール	
r	手数 ℓ_r	len	手数 ℓ_r	len	手数 ℓ_r	len	手数 ℓ_r	len
1	16	4	16	4	16	4	16	4
2	240	8	172	8	240	8	172	8
3	3,600	12	1,868	11	3,360	12	1,744	11
4	54,000	16	20,248	15	43,680	16	16,880	15
5	810,000	20	219,572	18	524,160	19	154,680	18
6	12,150,000	24	2,380,828	22	5,765,760	23	1,331,944	21
7	182,250,000	28	25,816,016	25	57,657,600	26	10,690,096	24
8	2,733,750,000	32	279,929,116	29	518,918,400	29	79,137,824	27
9	41,006,250,000	36	3,035,340,860	32	4,151,347,200	32	533,427,944	29
10	615,093,750,000	40	32,912,944,504	35	29,059,430,400	35	3,221,413,136	32
11	9,226,406,250,000	44	356,883,143,876	39	174,356,582,400	38	17,068,504,632	34
12	138,396,093,750,000	47	3,869,771,553,868	42	871,782,912,000	40	77,129,797,424	37
13	2,075,941,406,250,000	51	41,960,883,247,760	46	3,487,131,648,000	42	285,415,667,080	39
14	31,139,121,093,750,000	55	454,992,160,893,004	49	10,461,394,944,000	44	811,404,606,344	40
15	467,086,816,406,250,000	59	4,933,591,728,561,644	53	20,922,789,888,000	45	1,577,602,537,520	41
16	7,006,302,246,093,750,000	63	53,496,146,604,513,112	56	20,922,789,888,000	45	1,577,602,537,520	41
合計	7,506,752,406,529,017,856	63	58,930,954,288,566,464	56	56,874,039,553,216	46	4,350,069,824,956	42

表 3 4 × 3 と 2 × 6 のパターン数

	ジャンプ禁止 ルール				標準ルール			
	4 × 3		2 × 6		4 × 3		2 × 6	
r	手数 ℓ_r	len	手数 ℓ_r	len	手数 ℓ_r	len	手数 ℓ_r	len
1	12	4	12	4	12	4	12	4
2	98	7	92	7	98	7	92	7
3	814	10	708	10	744	10	6,32	10
4	6,724	13	5,448	13	5,268	13	4,088	12
5	55,662	16	41,924	16	34,276	16	23,920	15
6	460,382	19	322,616	19	201,412	18	127,264	17
7	3,809,144	22	2,482,616	22	1,046,052	20	600,992	20
8	31,512,018	25	19,104,388	25	4,656,484	23	2,470,208	22
9	260,704,966	28	147,013,332	28	17,043,160	25	8,491,136	24
10	2,156,813,620	32	1,131,306,572	31	48,087,520	26	22,891,840	25
11	17,843,492,742	35	8,705,704,056	34	93,100,144	27	43,065,856	26
12	147,620,112,998	38	66,992,701,164	36	93,100,144	27	43,065,856	26
合計	167,916,969,180	38	76,998,682,928	37	257,275,314	28	120,741,896	27