Vol.2012-GI-28 No.4
2012/7/13

コウを含むヨセの最適手判定方法

二宮勘輔

コウを含む囲碁の局面では，例えヨセ局面といえども，最適手を得るためにゲーム木をまともに探索すれば，探索空間が膨大となって困難をきたす．そこで本稿では，コウを含むヨセ局面を実戦に近い形のあるモデル化を行い，ゲーム木をまともに探索することなく，コウといくつかのコウザイの価値のみに依存するある判定式を用いて最適手を決定できることを示す．その判定式はコウザイが多くてもわずかな手続きで求めることができる．

A Way to Select the Best Move in Go Endgame Including Ko

Kansuke Ninomiya

In the Go game including Ko ,even if it is Go endgame ,enormous large search space is unavoidable at direct search of game tree to select the best move. We present here, in a real but simple model of Go endgame including Ko, we can determine the best move by a method, without direct search of game tree. The method is to use a discriminant which depends on only values of Ko and some Ko-threads.The discriminant is obtained easily even if so many Ko- threads are there.

１． はじめに

囲碁ゲームにおけるコウとは，その部分(コウ点）に白と黒が交互に着手し続けると，同形反復を繰り返すことになる局面部分である．コウの存在は囲碁ゲームに奥深さをもたらす半面，まともに探索すると例えヨセの局面でも，膨大な探索空間が避けられない要因になっている．本稿では，実戦に近い形に単純化したコウを含むヨセのモデル局面を考察し，ゲーム木の網羅的な探索無しで，最適手を定式的に判定する方法を提唱する．

単純化したモデルとして，１箇所の単純コウと２種類のコウザイすなわち，純粋コウザイと単純ヨセがそれぞれ複数箇所存在する局面を考える．単純コウとは白黒どちらがコウ点を接ぐ（F）ことでコウが解消され得点が決まるコウである．純粋コウザイとは，そのコウザイによるコウダテに相手が受ければ得点は変化しないが，コウダテ側が連打すれば利得を得るコウザイである．単純ヨセとは白黒のどちらかの１手で完結するヨセである．単純ヨセ手は白黒双方にとってのコウザイ（ヨセコウザイ）にもなる．

定式的判定方法については，以前に純粋コウザイだけ，あるいはヨセコウザイだけの場合の考察があったが[1]，両者が混在する場合については十分には解析されていない．

それぞれの部分ゲーム木は図１のようになる．コウ部分には石の配置と経過手順に応じて異なる権利状態が定義され，ルールによって，図１の P_1 ，P_2 ，P_3 で許される手と選択肢が次のように定められている．

P_1：コウ点以外 O（コウザイ）に着手（コウダテ）
　コウザイ O は純粋コウザイ W(B)かヨセコウザイ A か

P_2：コウを接ぐ F かコウ点以外 O に着手（コウ受け）か

P_3：コウを取る T かコウ点以外 O に着手か

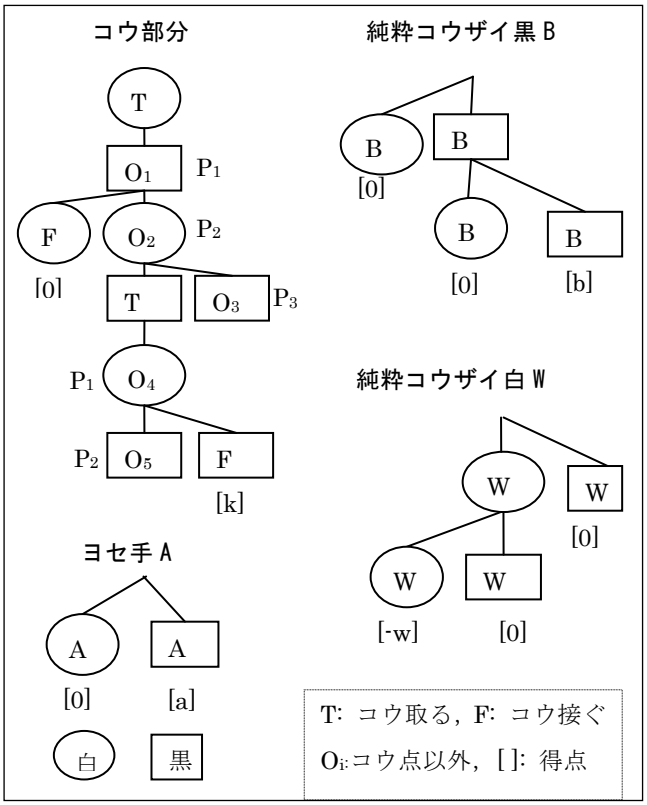

図１　部分探索木

本稿では，ゲームの得点（黒地目数引く白地目数）を黒は最大に，白は最小になるよう手を選択する，つまり max 分岐を黒が，min 分岐を白が着手するものとする．また，各部分への白，黒の着手による得点差（出入り値）と得点

ⓒ 2012 Information Processing Society of Japan

の配分を，以下のように定める．番号は出入り値の絶対値の大きい順とする．

コウ点 F：{白コウ接ぐ|黒コウ接ぐ}={0|k}

後手ヨセ A_i：{白着手|黒着手｝={0|a_i}

黒の純粋コウザイ B_i：{白コウ受け|黒連打}= {0| b_i }

白の純粋コウザイ W_i：{白連打｜黒コウ受け｝={-w_i| 0}

このように定めても，あとで得られる諸々の結果は一般性を失わない．

２． 探索木の構成と評価方法

黒は最大得点を，白は最小得点を目指すことから，ヨセ手と純粋コウザイは出入り値の大きい順に打つべきことは自明である．自明ではないが，ある種の手の特質から，ルール上は可能でも最善ではありえない手順も存在する．それは以下のような，一見しても不自然に見える一群の手順である．

NG0　相手からの純粋コウザイをあらかじめ消す．

例：　○T-●W_1

NG1　コウ終了後新たな純粋コウザイに着手する．

例：　○T-●A_1-○F-●B_1，○T-●B_1-○F-●B_2

NG2　コウ接ぎやコウ取りが可能な手番で新たな純粋コウザイを打つ．

例：　○T-●A_1-○W_1，○T-●B_1-○W_1，
○T-●A_1-○A_2-●B_1

NG3　純粋コウザイのコウ受けのあとコウを取らない．

例：　○T-●B_1-○B_1-●A_1

NG4 純粋コウザイでのコウダテに，ヨセ手でコウ受けしたり， 相手のコウを接ぎにコウザイを連打しない．

例：　○T-●B_1-○A_1，○T-●B_1-○F-●A_1

上記のうち，NG0～NG3 が最善でないことは簡単に証明できる（8 節参照）．NG4 についても，やや複雑になるが，最善でないことを証明できる（次節参照）．これらが最善でない理由をまとめて言えば，コウを取り返す権利を得るという，純粋コウザイがもつ唯一の使用価値を無駄にしていることにある．以下では，厳密な証明の場以外では，NG4 も含め，全ての上記手順を探索木からカットする．すると，分岐は全て２分岐となり，探索木は図２の例のようになる．

コウが解消された後はヨセ手を大きい順に打つだけだから，探索木においてコウ接ぎ（F）以降の枝には分岐は無い．探索木の全ての終端には，そこに至る手順に対応した得点が付随する．また，全ての分岐にも，それ以下で白黒双方が最善を尽くしながら行き着く終端の得点（**最適得点**）を付随させる．同点の最適手があれば，何らかの優先ルールを定め，最適手は一つにできる．以下では，分岐とその得点を同じギリシャ文字で表し，着手の種類を英字大文字で表わす．

最適手とその得点は基本的には全て出入り値に依存するが，以下では，得点をコウの出入り値 k の関数と見なし他の全ての終端の得点 G は途中のコウ接ぎ（F）の手番の黒白で，

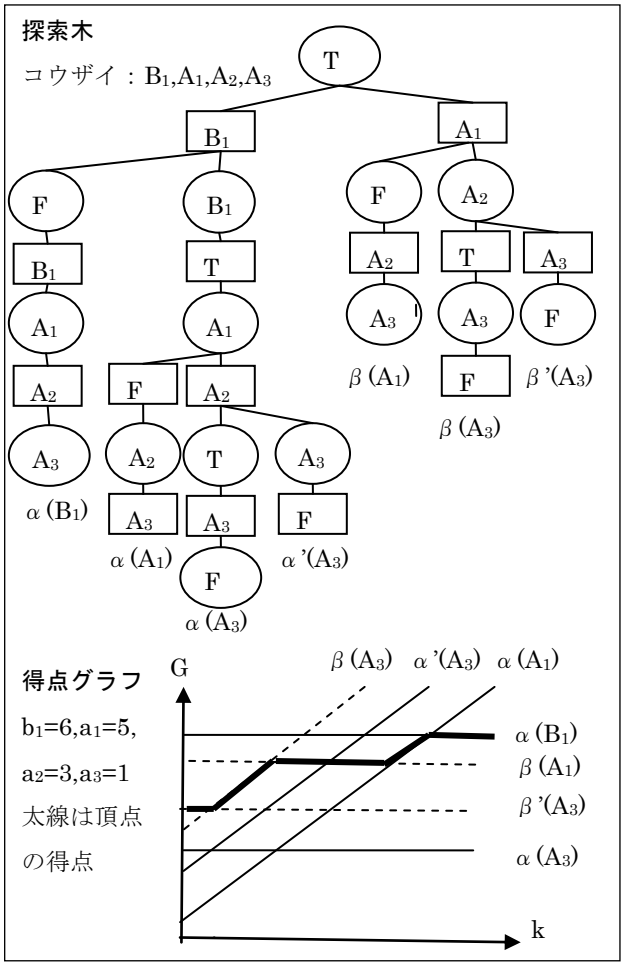

図２　探索木と得点グラフ事例

黒コウ接ぎ枝：G= k＋C(Ow)　・・・ 斜線

白コウ接ぎ枝：G= C(Ob)　　・・・水平線

の関数形になる．ここで，C（）は k に依存しない定数である．したがって，得点 G を k-G 平面上のグラフ（**得点グラフ**と呼ぶ）として描くと，全ての終端の得点は傾き 45°の斜線か k 軸に平行な水平線となる．全ての分岐の最適得点は変数 k の値に応じて決まる．図２はその事例である．その際，任意の分岐の得点のグラフは斜線と水平線が交互に接続した**右上がりステップ線**となる．なぜなら，ある分岐 $\alpha(k)$ の子分岐 $\alpha_1(k)$，$\alpha_2(k)$がともに右上がりステップ線であれば，得点 α（k）は

$\alpha(k) = \max(\alpha_1(k), \alpha_2(k))$，

$\alpha(k) = \min(\alpha_1(k), \alpha_2(k))$

のいずれかであるから，$\alpha(k)$ もまた右上がりステップ線になり，ボトムアップの出発点である終端の得点が右上がりステップ線（斜線か水平線）であるから．

図２の例で示されているように，k の値の変化に応じて最適枝は替わる．逆に k の数直線は最適枝ごとに定まるある範囲に分割される．ある分岐 α から着手 X_1 と X_2 によって子分岐点 α_1，α_2 に別れたとき，α_1，α_2 の得点グラフ

ⓒ 2012 Information Processing Society of Japan

の交点の k 座標を $\Delta(\alpha_1, \alpha_2)$または$\Delta(X_1,X_2)$で表わす．つまり，

$\alpha_1(k=\Delta)=\alpha_2(k=\Delta)$

すると，最適手は

$k<\Delta(X_1,X_2)$ なら X_1，　$k\geqq\Delta(X_1,X_2)$ なら X_2

のように，k が値が Δ より大か少かで分かれる．このような Δ を**選択の基準値**と呼ぶ．

３．　コウザイ選択の判定

(1) コウザイ選択に関する公理

純粋コウザイは白黒双方にとって固有の財産であり，多いほど有利であり，無駄に消費しては損である．この原理を一般化して，本稿では以下のような公理をかかげ，まざまな命題の論拠とする．

公理１　　純粋コウザイ温存の公理

１）　ヨセコウザイが n_a 個，黒の純粋コウザイが n_b 個，白の純粋コウザイが n_w 個ある局面の得点を $G(n_a, n_b, n_w)$とし，コウの権利状態が同じで，黒の純粋コウザイのいずれかが１個少ない局面の得点を $G(n_a, n_b\text{-}1, n_w)$とするとき，

$G(n_a,n_b,n_w) \geqq G(n_a, n_b\text{-}1, n_w)$

同様の定義で

$G(n_a,n_b,n_w) \leqq G(n_a, n_b, n_w\text{-}1)$

２）　純粋コウザイ Z とヨセコウザイ A を選択した場合の得点 G(Z)と G（A）が同じ，つまり

$G(Z)=G(A)$　　・・・(1)

の場合，ヨセコウザイ A を選択することが最適である．

==========

公理１の２）は囲碁ゲームの実戦で，後に新たなコウが発生した場合に備え純粋コウザイをできるだけ温存すべしとされることを考慮した公理である．

（２）コウザイ選択の判定（前段）

ここでは，コウダテとして純粋コウザイとヨセコウザイのどちらを選択すべきかの判定基準について考察する．黒番コウダテの局面で最大純粋コウザイの出入り値を b_1，最大ヨセ手の出入り値を a_1 とする．

まず

$b_1 \leqq a_1$　　・・・①

の場合を考える．この場合の探索木は図３左のようになる．B_1 にコウダテすると出入り値 b_1 のヨセ手が新たに生じる．ところが①のため，コウ受けの手は B_1 より A_1 が優先されるので，前節の NG4 の事例にあたる不自然な手順が必須となるが，最初からこの手順を省くわけにはいかない．

①であれば、直接計算から

$\alpha \leqq \gamma_1$

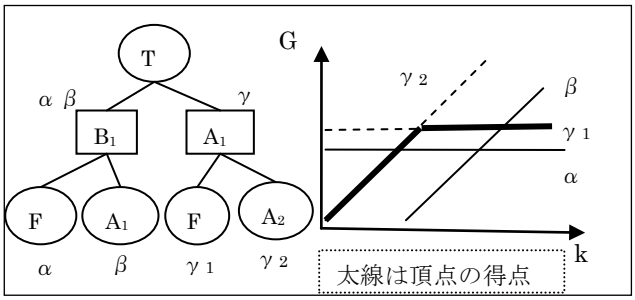

図３　コウザイ選択探索木と得点グラフ（$b_1 \leqq a_1$）

しかし，α が B_1 を消費しているので公理１の 2)によって

$\alpha < \gamma_1$　　・・・②

と見なす必要がある．ここで，証明は補足にまわすが，

$\beta \leqq \gamma_2$　　・・・③

が成り立つ．②，③から，k によらず

$\alpha\beta \leqq \gamma$　　・・・④

であるから，コウザイ選択はヨセコウザイ A_1 が最適となる．したがって，不自然な手順○T-●B_1-○A_1 を含む B_1 選択は探索木からカットできる．得点グラフは図３右のようになる．グラフからも④が確かめられる．逆に B_1 選択枝をカットできるなら②であることもグラフから言える．なお，グラフでは本来は右上がりステップ線である β，γ_2 を簡単化のため直線で表している．あとの図も同様に扱う．

次に

$b_1 > a_1$　　・・・⑤

の場合を考える．探索木は図４左のようになる．

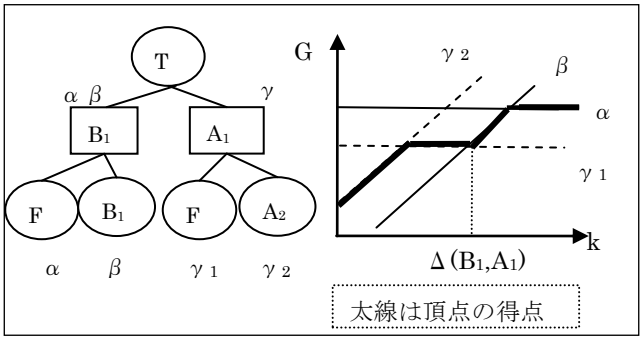

図４　コウザイ選択探索木と得点グラフ（$b_1>a_1$）

直接計算から

$\gamma_1 - \alpha = a_1 - b_1 > 0$　　・・・⑥

また，この場合も，証明は補足にまわすが

$\beta \leqq \gamma_2$　　・・・⑦

であることが言える．⑥，⑦より，得点グラフは図４右のようになる．グラフから，コウザイ選択の基準値 $\Delta(B_1,A_1)$ は $\Delta(B_1,A_1)=\Delta(\beta,\gamma_1)$となる．つまり，$\Delta(B_1,A_1)$を求める際には α と γ_2 はカットできる．

以上は黒コウダテの場合であったが，白コウダテの場合も同様な結論が導かれる．まとめると，

ⓒ 2012 Information Processing Society of Japan

==========

判定１　コウザイ選択の判定（前段）

純粋コウザイ B，W を併せて Z（出入り値 z）と記しヨセコウザイを A（a）とすると，コウダテの最適手は

１）z ≦ a なら k 値によらず，ヨセコウザイ A,

２）z ＞ a なら

Δ(Z-Z-T,A-F) ＜k　のとき　純粋コウザイ Z,

Δ(Z-Z-T,A-F) ≧k　のとき　ヨセコウザイ A.

ただし，Δ(Z-Z-T,A-F)は図 4 で $\beta=\gamma_1$ なる k 値.

==========

Δ（ Z-Z-T, A-F）を求める簡便な方法は６節で示される.

４．　探索木の構造

（１）基本節

判定１の１）により，コウザイ選択の分岐では z≦a のときは純粋コウザイ選択肢をカットできる．したがって，

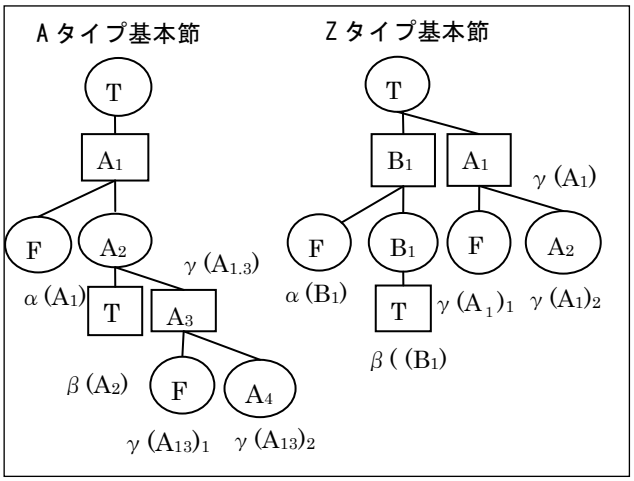

図５　A タイプ基本節と Z タイプ基本節

探索木は z≦a なら図５の**A タイプ基本節**を，z＞a なら図５の**Z タイプ基本節**を配置してつないだものとなる．

黒コウダテの Z タイプ基本節では min 選択の定義より，

$\gamma(A_1)=\min(\gamma(A_1)_1, \gamma(A_1)_2) \leqq \gamma(A_1)_1$　・・・①

また，α，γ_1 は得点が既知であり，

$\alpha(B_1)-\gamma(A_1)_1=b_1-a_1>0$　・・・②

①，②併せて k によらず

$\gamma(B_1)<\alpha(B_1)$　・・・③

黒コウダテの A タイプの基本節でも，

$\gamma(A_3)=\min(\gamma(A_{1.3})_1, \gamma(A_{1.3})_2) \leqq \gamma(A_{1.3})_1$

$\alpha(A_1)-\gamma(A_{1.3})_1=a_2-a_3 \geqq 0$

$\gamma(A_{13}) \leqq \alpha(A_1)$　・・・④

以上から，Z タイプ基本節と A タイプ基本節は類似する．さらに，A タイプでは④から，頂点の得点 G_A に関し，

$G_A=\min(\alpha(A_1), \max(\beta(A_2), \gamma(A_{1.3})))$

$=\max(\min(\alpha(A_1), \beta(A_2)), \gamma(A_{1.3}))$

が成り立つ．これは Z タイプ基本節の頂点の得点 G_G

$Gz=\max(\min(\alpha(B_1), \beta(B_1)), \gamma(A_1))$

と同形であるから，A タイプ基本節と Z タイプ基本節は相似な関係にある．このことから，どちらのタイプも図６の**一般基本節**の探索木で表現でき，タイプの違いはコウザイ（O,O',O^）の違いに還元できる．得点グラフも両タイプは相似的パターンを描き，図６のようになる．

以上は黒コウダテの基本節であったが白コウダテの基本節でも同様な関係が成り立つ．

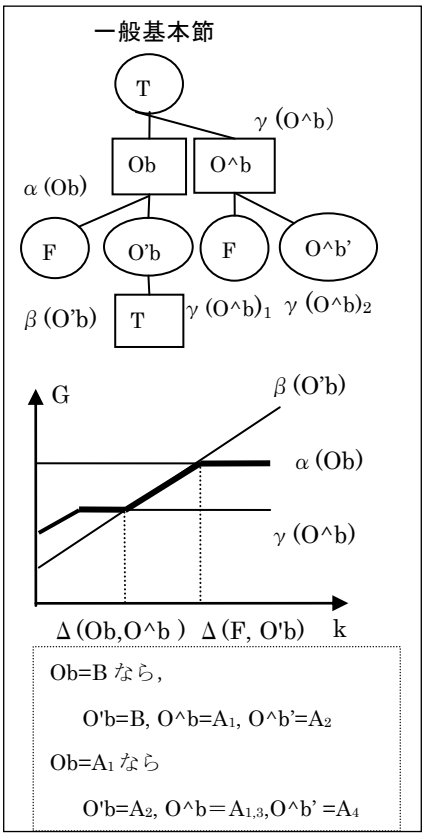

図６　一般基本節とその得点グラフ

（２）　中心木と派生枝

全体木のなかの各基本節のコウザイ O_i は残された純粋コウザイとヨセコウザイのうち，出入り値の大きい方が配置される．このため，はじめに全てのコウザイの出入り値のリストが与えられれば，O_i をトップから順に並べた**コウザイ順列**

$\{O_i\}=\{O_1,O_2,O_3,\cdots\}$

はユニークに決まる．$\{O_i\}$ ではヨセコウザイは常に一つおき拾われる．なお，コウザイ順列 $\{O_i\}$ を白のコウザイ Ow_j と黒のコウザイ Ob_j に分けて順番を付け，

$\{O_i\}=\{Ow_1,Ob_1,Ow_2,Ob_2\cdots\}$

のようにも表わす．コウザイの出入り値の比較から定まるコウザイ順列 $\{O_i\}$ と全体木の例を図７に示した．

ここで各基本節の枝 $\gamma(O^\wedge_i)$ を**派生枝**と呼び，全体木から全ての派生枝をカットした探索木を**中心木**と呼ぶ．中心木はコウザイ選択では出入り値の大きい方が選択され，コウ受け後は必ずコウ取りとなる手順のみで構成される．木構造としては，２分岐の min 分岐と max 分岐が交互に連なり，各分岐の子分岐の片方の得点 $\alpha(O_i)$ が与えられている探索木であると定義できる．

ⓒ 2012 Information Processing Society of Japan

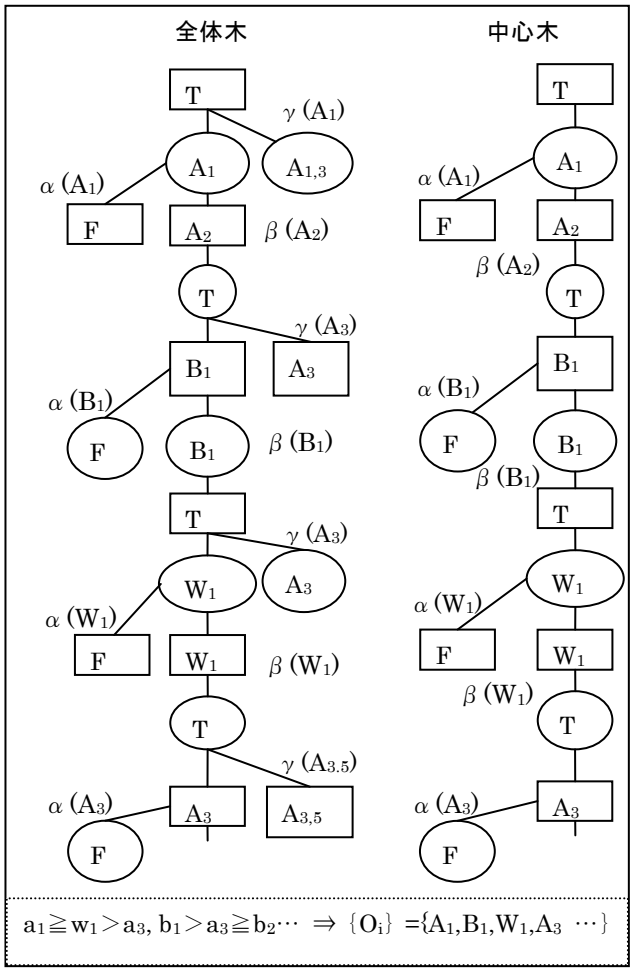

図７　全体木と中心木の例

５．　コウ接ぎコウ受けの選択基準値

コウダテ O に対し，コウ接ぎ（F）かコウ受け（O’）かの基準値Δ（F,O’）を求めたい．基準値が決まればコウの出入り値 k と比べ，最適手は

k＞Δ(F,O’) ならコウ接ぎ（F），

k≦Δ(F,O’) ならコウ受け（O’）

となる．コウ接ぎ（F）の得点をα(O)，コウ受け（O’）の得点をβ(O’)とすると，基準値Δ(F,O’)はα(O)＝β(O’)なる k 値，つまりグラフ G=α(O)と G=β(O’)の交点の k 座標である．得点グラフ G=α(O)は黒コウ接ぎなら斜線で，グラフ G=β(O’)は右上がりステップ線である．したがって，黒コウ接ぎα(O)に交わるβ(O’)の部分は水平線，つまり白コウ接ぎのいずれかの枝α(Ob_p) である（図８参照）．α(O)が白コウ接ぎならその逆．

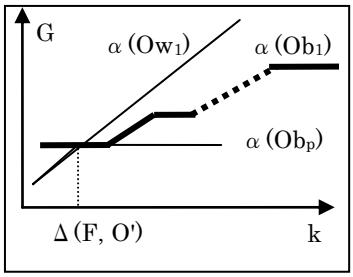

図８　交点　太線はβ(O’w_1)

探索木を中心木に限定した場合，α(O)に交わるβ(O’)の中の枝は次の定理１によって定められる．

==========

定理１：中心木コウ接ぎ枝に交わる枝に関する定理

白コウダテ後の局面

定義１： ２分岐の min 分岐と max 分岐が交互に連なり，各分岐の片方の子分岐の得点 α(O_i)が与えられている探索木を**広い意味での中心木**という．

定義２： 白のコウダテ Ow_i に黒番がコウを接いだ得点をα(Ow_i)とする．広い意味での中心木で，

$$\alpha(Ow_1) > \alpha(Ow_i), \quad (i=2,3,4,\cdots)$$

であるα(Ow_i)が連続する個数 n を**遷移枝数**という．

定理：遷移枝数が n のとき，第１コウ接ぎ枝α(Ow_1)に交わる枝をα(Ob_p)とすると，

$$\alpha(Ob_p)=\min(\alpha(Ob_1), \alpha(Ob_2), \cdots \alpha(Ob_{n+1})) \quad \cdots(1)$$

黒コウダテ後の局面

上記で白と黒，w と b，min と max を入れ替え，不等号を逆向きにする．

==========

前節で定義した中心木はコウザイを大きい順に並べるという前提を置いたが，定理１の広い意味での中心木ではそれを問わない．定理の証明は補足にまわす．

定理１の遷移枝数 n はα(Ow_i)を逐一計算しなくても，コウザイ順列から下記の処方１によって求めることができる．定理１(1) のα(Ob_p)もα(Ob_i)を逐一計算する必要はなく，下記の処方２によって求められる．

処方１，２によって，α(Ow_1)に交わる枝α(Ob_p)が決まると，コウ接ぎ(F)かコウ受け(Ow'_1)かの選択基準値

処方１　遷移枝数 n の求め方

白コウ立て（0_1=$0w_1$）後の場合

コウダテ O_i に対するコウ受け手を O'_i，その出入り値を o_i, o'_i とする*.

１）遷移枝数 n はコウ材順列の Ow_2 以下 Ow_i に ow_i ＞ow'_1 なる Ow_i が連続する個数.

２）特に，コウ材順列の Ow_i が出入り値の大きい順に並ぶ場合，遷移枝数 n は

ｉ）Ow_1 が純粋コウザイ W_1 なら，n=0　，

ii）Ow_1 がヨセコウザイ A_1 なら，Ow_2 以下に w_i＞a_2 なる純粋コウザイ W_i が連続する個数.

黒コウ立て（0_1=$0b_1$）後の場合

上文の白を黒に w を b に入れ替える.

＊）O_i が純粋コウザイなら o'_i はその出入り値（o'_i ＝b_j, w_j），O'_i がヨセ手 A_j なら o'_i ＝a_{j+1}

ⓒ 2012 Information Processing Society of Japan

処方 2　$\alpha(Ow_1)$に交わる $\alpha(Ob_p)$の求め方

遷移枝数が n で，コウザイ Ob_i，i=1,…,n+1 のうち最後の Ob_{n+1} が

1）ヨセコウザイなら，$Ob_p = Ob_{n+1}$

2）純粋コウザイ B_f なら，最後方のヨセコウザイを A_e として，

$b_f > a_{e+1}$ のとき $Ob_p = A_e$

$b_f \leqq a_{e+1}$ のとき $Ob_p = B_f$ （$= Ob_{n+1}$）

$\alpha(Ob_1)$に交わる $\alpha(Ow_p)$の求め方

上文の w を b に入れ替える．

$\Delta(F, Ow'_1)$は $\alpha(Ow_1) = \alpha(Ob_p)$となる k の値として求まる．これも，$\alpha(Ow_1)$や $\alpha(Ob_p)$を計算することなく，次の基準値 1 によって与えられる．

基準値 1　コウ接ぎコウ受け選択の基準値

$\alpha(O_1)$ に交わる枝が $\alpha(O_p)$ のとき，コウダテ O_1 に対し，コウ接ぎ（F）かコウ受け(O'_1)かの選択基準値 $\Delta(F, O'_1)$は，

$$\Delta(F,O'_1) = o'_1 + o'_p - e(r_p) \quad \cdots (1)$$

ここで，r_p はコウ受け O'_p のあとに残された最大ヨセ手 A r_p の番号，また，

$$e(s) = a_s - a_{s+1} + a_{s+2} - a_{s+3} + a_{s+4} - \cdots$$

ここで以下の定理が成り立つ．

==========

定理 2　中心木のみで判定可能

全体木のコウ接ぎコウ受けの選択基準値は中心木のみで決定できる．

==========

証明は補足にまわす．この定理によって，全体木のコウ接ぎコウ受けの基準値は上記の中心木の基準値 1 で与えられることなる．

以上の考察から，コウ接ぎかコウ受けかの判定は次の手続き 1 によって得られる．

手続き 1　コウ接ぎコウ受けの判定手続き

1）コウザイ順列 $\{O_i\} = \{O_1, O_2, O_3, \cdots\}$ を作成．

2）遷移枝数 n を処方 1 にしたがって求める．

3）O_p を処方 2 にしたがって求める．

4）基準値 1 に従って基準値 $\Delta(F, O'_1)$を求める．

5）$\Delta(F, O'_1) < k$ ならコウ接ぎが，$\Delta(F, O'_1) \geqq k$ ならコウ受けが最適手

6. コウザイ選択とコウ取りかヨセ手かの基準値

（1）コウザイ選択の基準値

3 節判定 1 で，z ＞a のときコウザイ選択の基準値 Δ は

$$\Delta(Z,A) = \Delta(Z\text{-}Z\text{-}T, A\text{-}F)$$

であることが示された．Δ（Z-Z-T,A-F）は，第 1 基本節の Z を出入り値が a なる仮想的純粋コウザイ Za に置き換えたときの，Za のコウダテに対するコウ接ぎコウ受け選択基準値 Δ（F，Za'）に等しい．証明は省くが，この Δ（F, Za'）も中心木のみで算出可能である．このことからコウザイ選択の判定は次の手続き 2 によって得られる．

手続き 2　コウザイ選択の判定手続き

純粋コウザイを Z(出入り値 z),ヨセ手を A(a)として

0）z ≦a　ならヨセ手が最適．z ＞a なら次へ

1）コウザイ順列$\{O_i\} = \{Z, O_2, O_3, O_4, \cdots\}$を作成．

2）$\{O_i\}$の Z を出入り値 a の純粋コウザイ Za に替え $\{O_i\}_v = \{Za, O_2, O_3, O_4, \cdots\}$とする．

3）$\{O_i\}_v$ に対するコウ接ぎコウ受けの基準値 Δ(F,Z'a) を手続き 1 により求める．

4）Δ(F,Z'a) ＞k なら純粋コウコウザイが，Δ(F, Z'a)≦k ならヨセ手が最適手．

（2）コウ取りかヨセ手かの基準値

コウ取りかヨセ手かの選択基準値は図 9 の探索木の β_0 と δ への分岐の基準値 $\Delta(\beta_0, \delta)$を求ることで得られる．詳細は省くが，基準値 $\Delta(\beta_0, \delta)$を求める場合は図 9 の β はカットでき

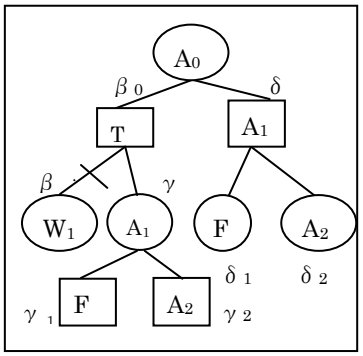

図 9　コウ取りヨセ手分岐探索木

$$\Delta(\beta_0, \delta) = \Delta(\gamma, \delta) \quad \cdots ①$$

さらに

$$\gamma_2 \leqq \delta_2 \quad \cdots ②$$

が成り立つことから，以下の関係が成り立つ．

$\Delta(\delta_1, \gamma) \geqq \Delta(\gamma_1, \delta)$　なら

$$\Delta(\gamma, \delta) = \Delta(\gamma_1, \delta) \quad \cdots ③$$

$\Delta(\delta_1, \gamma) < \Delta(\gamma_1, \delta)$　なら

$$\Delta(\gamma, \delta) = \Delta(\delta_1, \gamma) \quad \cdots ④$$

ここで，$\Delta(\delta_1, \gamma)$ と $\Delta(\gamma_1 \delta)$ は，δ_1 と γ_1 をこれらと同等な出入り値 a_1 の仮想的純粋コウザイ Ba_1 と Wa_1 に置き替えて，コウ接ぎコウ受け選択の基準値 1 を適用して求めることができる．まとめると，コウ取りかヨセ手かの判定は次の手続き 3 によって得られる．

ⓒ 2012 Information Processing Society of Japan

手続き３　コウ取りかヨセ手かの判定手続き（黒番）

1)　図９のγ以下のコウザイ順列
$\{O_i\}_1=\{A_1,Ob_1,Ow_2,Ob_2,\cdots\}$を作成する．

2) $\{O_i\}_1$の先頭に出入り値a_1の黒の純粋コウザイB_{a1}を挿入し，$\{O_i\}_{1v}=\{B_{a1},A_1,Ob_1,Ow_2,Ob_2,\cdots\}$とする．

3) $\{O_i\}_{1v}$に対するコウ接ぎコウ受けの基準値Δ_1を手続き１により求める．

4)　図11のδ以下のコウザイ順列
$\{O_i\}_2=\{A_1,Ow_1,Ob_2,Ow_2,\cdots\}$を作成する．

5) $\{O_i\}_2$の先頭に出入り値a_1の白の純粋コウザイW_{a1}を挿入し，$\{Oi\}_{2v}=\{W_{a1},A_1,Ow_1,Ob_2,\cdots\}$とする．

6) $\{Oi\}_{2v}$に対するコウ接ぎコウ受けの基準値Δ_2を手続き１により求める．

7) $\Delta(\beta_0,\delta)=\min(\Delta_1,\Delta_2)$とする．

8) $\Delta(\beta_0,\delta)<k$ならコウ取りが，$\Delta(\beta_0,\delta)\geqq k$ならヨセ手が最適手

同上判定手続き（白番）

上記の白と黒，w，W と b，B を入れ替える．

（３）　基準値の下限

全ての分岐での基準値Δは残された最大ヨセ手の出入り値a_1より大，つまり

$$a_1 \leqq \Delta \quad \cdots ⑤$$

であることが，証明は省略するが，言える．したがって，コウの出入り値kがa_1より小さい，つまり

$$k \leqq a_1 \quad \cdots ⑥$$

のときは，ヨセ手が最適であることが即座に判定できる．コウザイ選択ではヨセコウザイ，コウ接ぎかコウ受けかではコウ受け，コウ取りかヨセ手かではヨセ手を選択すべきとなる．したがって，これまでの手続きに入る前に，⑥かどうかをまず見ることが実用的である．このことは，囲碁実戦の現場で，単純ヨセは１手の価値が出入り値aの1/2，コウ点への１手の価値は出入り値kの1/3であると評価されている[2]こととも符合する．

７．　例題による基準値の計算と最適手判定

例題　白コウダテ番で表のようなコウザイ分布の局面でコウの出入り値　k=13　のとき

i	1	2	3	4	5	6	7
w_i	15	12	11	5			
a_i	11	10	9	7	5	3	1
b_i	13	11	7	6			

問題（１）白のコウザイはW_1かA_1か．⇒　手続き２

1)　$\{O_i\}=\{W_1,B_1,W_2,A_1,W_3,B_2,A_3,\cdots\}$

2)　$\{O_i\}_v=\{Wa_1,B_1,W_2,A_1,W_3,B_2,A_3,\cdots\}$

3)　処方１：$w_{a1}=a_1<w_2$，$w_{a1}=a_1\geqq w_3$，よって n=1
処方２：$\{Ob_1,Ob_2,\cdots Ob_{n+1}\}=\{B_1,A_1\}$,最後がヨセ手$A_1$より$Obp=A_1$

4)　基準値１：$\Delta(F,Wa_1)=ow'_1+ob'_p-e(r_p)=a_1+a_2-e(3)=16$
$\Delta(W_1,A_1)=16>k$，よって，<u>A_1選択が最適</u>

問題（２）　問題（１）で白A_1にコウダテ後，黒コウ接ぐ(F)かコウ受け（A_2）か．⇒　手続き１

0),1)：　$\{O_i\}=\{A_1,B_1,W_1,B_2,W_2,A3,W_3,B_3,\cdots\}$

2)　処方.1：　$a_2<w_1,w_2,w_3$より，　n=3

3）処方２：$\{Ob_1,Ob_2,\cdots Ob_{n+1}\}=\{B_1,B_2,A_3,B_3\}$
最後がB_3,最後方のヨセ手がA_3，$b_3=a_4$から$Ob_p=A_3$

4)　基準値１：$\Delta(F,A_2))=a_2+a_4-e(5)=14>k$,
よって，<u>コウ受け（A_2）が最適</u>

問題（３）　問題（２）で黒コウ受け（A_2）後，白コウ取り（T）かヨセ手(A_3)か．⇒　手続き３

1)，2)：$\{O_i\}_{1v}=\{Wa_3,A_3,W_1,B_1,W_2,B_2,W_3,B_3,A_5\cdots\}$

3)　処方１，２：n=3，$Ob_p=B_3$

4)　基準値１：$\Delta_1=a_3+b_3-e(5)=13$

5), 6)：$\{O_i\}_{2v}=\{Ba_3,A_3,B_1,W_1,B_2,W_2,B_3,W_3,A_5\cdots\}$

7)　処方１，２：　n=2，$Ow_p=A_3$

8)　基準値.1：$\Delta_2=a_3+a_4-e(5)=13$

9)　$\Delta_1=\Delta_2$より，$\Delta(T,A_3)=13=k$
よって，<u>コウ取り（T）とヨセ手(A_3)どちらも最適</u>

８．補足（証明の概要）

これまで，いくつかの定理や関係式，処方を掲げた．これらは全て厳密に証明できる．しかし，紙面が限られその全てを示せないので，ここでは主なものについてその概要ないしポイントを説明するにとどめる．

１）２節 NG0～NG3 の例　○T-●A_1-○W_1が最善でない証明

探索木は$w_1>a_1$なら図10のよう．純粋コウザイでコウダテする（○W_1）ことは新たなヨセ手を生じさせる．それが既存のヨセ手(●A_2）より出入り値が大であるからγ_1以下の手順は必然．max 選択の定義から，

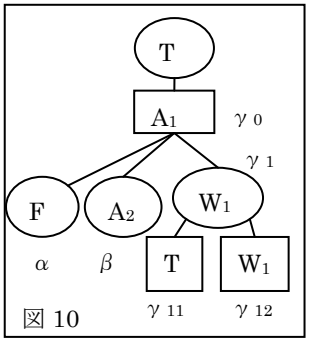

図 10

$$\gamma_1=\max(\gamma_{11},\gamma_{12})\geqq\gamma_{12} \quad \cdots ①$$

γ_{12}をγ_0とくらべると，公理１から

$$\gamma_{12}\geqq\gamma_0 \quad \cdots ②$$

①，②から$\gamma_1\geqq\gamma_0$．よって，○W_1が直前の局面より得点を減らしていない．したがって，得点を増やさない他の手○F，○A_2があるなかで，着手○W_1は白の最善手でない．

ⓒ 2012 Information Processing Society of Japan

以上は $w_1 > a_1$ としたが，$w_1 \leqq a_1$ なら○W_1 の価値はもっと劣るのでなおさら最善でない．

２）３節式③，⑦の証明

３節の図３の β と γ_2 以下の探索木をさらに展開すると図 11 のようになる．ただし，A'_1 は残された最大のヨセ手．３節③は $b_1 = a_1$ として証明すればよい．なぜなら，もっと少さな b_1 ならさらに B_1 選択肢はカットできるはずだから．

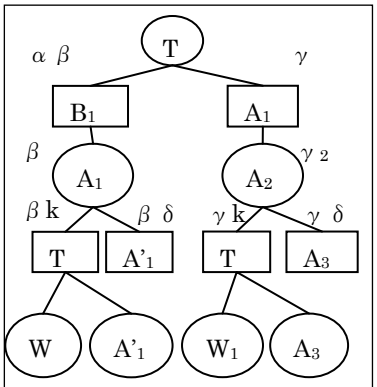

図 11

図 11 で，経過得点差と公理１より $\gamma > \beta\delta$ であるから $\beta\delta$ はカット可能．また，max 選択から $\gamma_2 \geqq \gamma k$ なので，

$$\beta k \leqq \gamma k \quad \cdots ③$$

であれば３節③が言える．上記③は一般化すれば，

$$G(n_a, n_b\text{-}1, n_w)^{++} \leqq G(n_a\text{-}2, n_b, n_w)^{++} + a_1 \quad \cdots ④$$

ただし，肩の $^{++}$ は黒コウ取り直後の意味．④は数学的帰納法をつかって証明できる．その概略は，前提：$a_1 \geqq b_2$ なら $G(n_a, n_b\text{-}1, n_w\text{-}1)^{++}$ で B_2 選択枝はカット可能：を置けば，さらに深い探索木の展開図の分析から，④の成立が言える．初期値（n_b=1 か n_w＝0）で前提が成り立つ．よって任意の n_a, n_b, n_w で④が言える．

３節⑦も上記とほぼ同じ論理から証明される．

３）定理１の証明

$\alpha(Ow_1)$ に交わる枝 $\alpha(Ob_p)$ は

$$\alpha(Ow_1) = \alpha(Ob_p) \quad \cdots ⑤$$

なる k 値で $\beta(O'w_1)$ の最適枝．最適枝であるためには，$\alpha(Ob_p)$ より上の全ての max 分岐で

$$\max(\alpha(Ow_i), \alpha(Ob_p)) = \alpha(Ob_p) \quad , i<p$$

⑤とあわせると $\alpha(Ob_p)$ より上ではすべて

$$\alpha(Ow_1) > \alpha(Ow_i)$$

が必要．これが定理１に定義する遷移枝に他ならない．$\alpha(Ob_p)$ が $\beta(O'w_1)$ の最適枝であるため，$\alpha(Ob_p)$ より上の全ての min 分岐で

$$\min(\alpha(Ob_i), \alpha(Ob_p)) = \alpha(Ob_p) \quad , i<p ,$$

$\alpha(Ob_p)$ より下の $\alpha(Ob_i)$ は $\alpha(Ob_p)$ と $\beta(O'b_p)$ の min 分岐で

$$\min(\alpha(Ob_i), \alpha(Ob_p)) = \alpha(Ob_p) \quad , n+1 \geqq i > p.$$

これらから，定理１の(1)が導かれる．

４）処方 1，2，基準値１の正しさの証明

コウザイ順列で $\{Ow_i, Ob_i, Ow_{i+1}\}$ のように黒のコウザイを間に隣り合う二つ白のコウザイ Ow_i, Ow_{i+1} で，

$$\alpha(Ow_i) - \alpha(Ow_{i+1}) = ow_{i+1} - o'w_i. \quad \cdots ⑥$$

⑥は Obi に無関係であり，Ow_i がヨセ手(A_j)，Ow_{i+1} が純粋コウザイ（W_m）で $w_m - a_{j+1} > 0$ の場合のみ正で，他は全て負か 0 である．

⑥の白黒反転した関係式も次のように成り立つ．

$$\alpha(Ob_i) - \alpha(Ob_{i+1}) = o'b_i - ob_{i+1} \quad \cdots ⑦$$

⑥，⑦から処方 1，2 が導かれる．さらに

$$\alpha(Ow_i) - \alpha(Ob_i) = k - (o'w_{i+1} + o'b_i - e(r_i))$$

とこの白黒反転の式から基準値 1 が導かれる．

５）定理 2 の証明

白コウダテ Ow_1 後の局面で考察する．中心木において $\alpha(Ow_1)$ に交わる枝をを $\alpha(Ob_{pc})$ とすると，定理 1 の証明の論理と同じで，

$$\alpha(Ow_1) = \alpha(Ob_{pc}) \quad \cdots ⑧$$

なる k 値で，全体木の $\alpha(Ob_{pc})$ より上の全ての派生枝 $\gamma(O\hat{}w_i)$ への min 分岐と $\gamma(O\hat{}b_i)$ への max において，

$$\min(\gamma(O\hat{}w_i), \alpha(Ob_{pc})) = \alpha(Ob_{pc}) \quad \cdots ⑨$$

$$\max(\gamma(O\hat{}b_i), \alpha(Ob_{pc})) = \alpha(Ob_{pc}) \quad \cdots ⑩$$

であれば全ての派生枝 γ はカットできる．

ここで次の不等式が有効な役割を果たす．

$$\gamma(O\hat{}b_i) \geqq \gamma(O\hat{}b_{i+1}), \quad \gamma(O\hat{}w_i) \leqq \gamma(O\hat{}w_{i+1}) \quad \cdots ⑪$$

⑪は，$\{Ob_i, Ow_i, Ob_{i+1}\}$ あるいは $\{Ow_i, Ob_i, Ow_{i+1}\}$ のような隣り合う 3 個のコウザイの可能なすべての組み合わせ（それぞれ 8 通り）に対し計算して確かめられる．

⑪のため，⑨，⑩は

$$\min(\gamma(O\hat{}w_1), \alpha(Ob_{pc})) = \alpha(Ob_{pc}) \quad \cdots ⑫$$

$$\max(\gamma(O\hat{}b_1), \alpha(Ob_{pc})) = \alpha(Ob_{pc}) \quad \cdots ⑬$$

であれば成り立つ．このうち⑫は 4 節の③または④の白黒反転した不等式から保証される．したがって，⑬が言えれば定理が証明されたことになる．

ここで派生枝 $\gamma(O\hat{}b_1)$ の中心木の得点グラフが $\alpha(Ow_1)$ と交わる枝 $\alpha(Ob_{ph})$ を定義すると，

$$\alpha(Ob_{ph}) \leqq \alpha(Ob_{pc}) \quad \cdots ⑭$$

がであることが証明できる．証明は本体のコウザイ順列 $\{O_i\}=\{Ow_1, Ob_1, Ow_2, \ldots\}$ と派生枝のコウザイ順列 $\{O\hat{}_i\}=\{Ow_1, O\hat{}b_1, O\hat{}w_2, \ldots\}$ を比較しながら手続き 1 をたどっていくことで確かめられる．また，派生枝の派生枝がカットできることも数学的帰納法で証明できる．⑧と⑭から⑬が言える．

参考文献

[1] 二宮勘輔．囲碁寄せゲームの理論と計算．日本福祉大学情報社会学論集第，6 巻，pp17-38，2003.

[2] マイケル・レドモンド．コウが 1 から 10 まで分かる本．マイコミ囲碁ブックス，2008.

ⓒ 2012 Information Processing Society of Japan