情報処理学会論文誌 Vol.53 No.6 1602–1607 (June 2012)

$3 \times N$ AB gameの最適戦略

篠田 正人[1,a)]

受付日 2011年8月31日, 採録日 2011年12月16日

概要：$3 \times N$ AB game は Huang–Lin によって導入された数当てゲームの 1 つである．出題者は 1 以上 N 以下の数を重複なく 3 個並べた順列を 1 つ選び，回答者はその順列が何であるかを当てる．本論文では回答数の期待値が最小となる回答者の戦略をすべての N に対して決定し，その最小値は漸近的に $0.25N + 3.21296 \cdots$ であることが分かった．この結果 $3 \times N$ AB game は解かれたゲームとなり，ゲームの探索や最適化アルゴリズムの検証に役立つと考えられる．

キーワード：ゲームの戦略，最適化，厳密解

Optimal Strategy for $3 \times N$ AB Games

Masato Shinoda[1,a)]

Received: August 31, 2011, Accepted: December 16, 2011

Abstract: The $3 \times N$ AB game is a code-breaking game which was introduced by Huang–Lin. The codemaker has a secret code of three distinct numbers (each number can not exceed N) in mind, and codebreaker tries to identify the code by guessing continuously. In this paper we have determined the optimal strategies of this game which minimize the expected number of guesses for all N. The minimum expected number of guesses behaves asymptotically like $0.25N + 3.21296 \cdots$. Now the $3 \times N$ AB games are solved, and we expect that this game is available for verifying computer algorithms of game-tree searches or optimizations.

Keywords: game strategy, optimization, exact solution

1. $3 \times N$ AB gameとは

本論文では，出題者が選んだ数を回答者が当てるゲームの 1 つである AB game での最適戦略について述べる．AB game は MOO または Bulls and Cows の名でも知られている．Huang–Lin [1] によって一般化された $M \times N$ AB game では，出題者は 1 以上 N 以下の数を重複なく M 個並べた順列を 1 つ選び，回答者はその順列が何であるかを当てる．出題者は回答者が回答として示した順列と出題順列の 2 つを比較し，数も場所も一致しているもの（A と呼ぶ）の個数と，数は一致しているが場所が異なるもの（B と呼ぶ）の個数を答える．この返答から回答者は順列を再び予想し，正解にたどり着くまで回答を繰り返す．3×7 AB game の具体的な進行例を図 1 に示す．この例では 4 回目に出題順列と回答順列が一致して，ゲームは終了した．したがってこのときの回答回数は 4 である．このタイプの有名なゲームとして Mastermind が知られている．Mastermind での最適戦略の研究として Knuth [2]，Koyama–Lai [3] などがある．Mastermind では出題順列で同じ数字を 2 度以上用いることが許されているが AB game では許されていないという点が異なる．

回答数	回答	返答
1	$(1, 2, 3)$	0A1B
2	$(3, 4, 5)$	0A2B
3	$(4, 3, 6)$	1A1B
4	$(7, 3, 4)$	3A0B

図 1 3×7 AB game の進行例

Fig. 1 A sample scoresheet of 3×7 AB game.

1 奈良女子大学理学部
Faculty of Science, Nara Women's University, Nara 630–8506, Japan
a) shinoda@cc.nara-wu.ac.jp

回答者は，なるべく少ない回答回数で出題された順列を特定することを目指す．このときの最適戦略には以下の 2 つの意味が考えられる．

- 最大回答回数（最悪でも何回以内で正解に到達するか）を最小にする戦略．
- 回答回数の期待値（平均して何回で正解に到達するか）を最小にする戦略．

最大回答回数最小化戦略では最悪のケースを想定し，期待値最小化戦略では平均的に回答回数が少なくなることを目指すため戦略が異なることが予想される．どちらの問題でも，M，N が大きくなると探索空間が急激に大きくなるため戦略を絞る何らかの工夫が必要となる．期待値を最小にするにはすべての場面での最善の回答を求めなければならないため，一般的に期待値最小化戦略を決定するほうが難しい問題である．通常のゲームとして行われる 4×10 AB game については田中 [4] によって，また $2 \times N$ AB game では Chen–Lin [5] において期待値最小化戦略が求められている．$3 \times N$ AB game については Huang–Lin [1] で最大回答回数の最小値が求められ，$N \geq 8$ ではその最小値が $\lfloor (N+1)/3 \rfloor + 3$ であることが知られている．本論文では，$3 \times N$ AB game における回答回数の期待値最小化戦略とそのときの期待値を求める．この問題を厳密に解くことは，コンピュータによる最適解探索アルゴリズムの検証などにも役立つと考えている．

$3 \times N$ AB game での必要な回答回数の N に関する漸近挙動について説明を加える．回答者は回答にまだ 1 度も使っていない数を新たに用いるとき，残っている小さい数から順に使うものとしても一般性を失わない（たとえば $(1,2,3), (1,4,2), (2,5,6), (5,3,7), \ldots$ のように $1,2,3,4,5,\ldots$ の順に使っていく）．1 回の回答で使える新たな数は 3 つまでであるから，出題順列に N が用いられている場合を考えると最悪のケースでは $N/3$ 回以上の回答回数が必要であることが分かる．これに対し，出題順列がランダムであるものとすると，その順列の中での最大数の期待値はおよそ $3N/4$ である．したがって，

- $(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9), \ldots$ と新たな数を順に 3 つずつ回答に用いる，
- 出題順列に用いられている数 3 つがすべて回答内に出揃ったと分かった時点で，可能性のあるたかだか 9 個の数についてその組合せから出題順列を推測する，

という単純な戦略により，期待値は「$N/4 +$ 定数」程度に抑えることができる．$3 \times N$ AB game で期待値最小化戦略を調べる興味は，上記の単純な戦略に勝るものが存在するか，という点にもある．たとえば最初の回答 $(1,2,3)$ に対する返答が 0A1B であった場合，次の回答として $(4,1,5)$ のように 1，2，3 についてのさらなる情報を得ようとするものと $(4,5,6)$ という新たな数を優先する戦略のどちらが優れているかを知ることは，純粋にゲームを楽しむ観点からも興味深い．

2. 問題の定式化

2.1 AB game の戦略とは

$3 \times N$ AB game の解析について述べるために記号を準備する．3 以上の自然数 N に対して $[N] = \{1, 2, \ldots, N\}$，$\Omega_N = \{(k_1, k_2, k_3) : k_i \in [N], k_i \neq k_j \text{ for } i \neq j\}$ とする．出題および回答で用いられる順列はすべて Ω_N の要素である．すなわち，出題だけでなく回答においても Ω_N 以外の要素を用いることは禁止する．返答の集合を $R = \{3\text{A}0\text{B}, 1\text{A}2\text{B}, 0\text{A}3\text{B}, 2\text{A}0\text{B}, 1\text{A}1\text{B}, 0\text{A}2\text{B}, 1\text{A}0\text{B}, 0\text{A}1\text{B}, 0\text{A}0\text{B}\}$ とする．出題順列 $q = (q_1, q_2, q_3)$ および回答 $a = (a_1, a_2, a_3)$ について，返答 $r(q, a) \in R$ が 1 つ定まる．図 1 の例では $q = (7, 3, 4)$ であり，$a = (4, 3, 6)$ であれば q と a で数も場所も一致しているものは 1 個，場所は異なるが共通して用いられている数が 1 個であるから $r(q, a) = $1A1B である．こうした返答により，出題順列の可能性が絞られる．このゲームの戦略とは，その時点までの回答と返答の組合せによって次の回答者の回答を決定するアルゴリズムのことである．ゲームの途中時点での出題集合（まだ出題順列になっている可能性がある Ω_N の要素の集合）が $A \subset \Omega_N$ になっているとき，回答者の戦略は過去の回答や返答の順序に関係なく A のみで決定される．たとえば図 1 の 2 回目までの返答によって出題集合は $\{(2,5,4), (4,3,6), (4,3,7), (4,5,1), (4,5,2), (5,1,4), (5,3,6), (5,3,7), (6,3,4), (7,3,4)\}$ となる．2 回目までの回答と返答の情報として得られるものはこの集合がすべてである．すなわち，このゲームの戦略は Ω_N の部分集合 A に対して回答 $a \in \Omega_N$ を定める写像 $F : 2^{\Omega_N} \to \Omega_N$ であると考えてよい．

$A \subset \Omega_N$ に対し，総回答数 $S(A)$ を以下のように定める．現在の出題集合 A の要素 q が実際の出題順列であるとき，戦略 F によって現時点からの回答数 $Q(A, q, F)$ が定まる．この回答数 $Q(A, q, F)$ の総和の最小値を $S(A)$ とする．すなわち

$$S(A) = \min_F \left\{ \sum_{q \in A} Q(A, q, F) \right\}$$

である．現在の出題集合が A であるときの現時点からの回答回数の期待値は $S(A)/|A|$ であり総回答数を少なくすることと期待値を小さくすることは同値であるが，$S(A)$ は値が非負整数であるので扱いやすい．本論文で求める期待値最小化戦略とは各 A に対して $S(A)$ を実現する戦略 F のことであり，最終的に求める $3 \times N$ AB game の回答回数の期待値は $S(\Omega_N)/|\Omega_N|$ である．

注意 1 戦略 F において回答 a は Ω_N の要素として考えているが，もし回答を Ω_{N+1} から選択することが可能ならばより良い戦略が見つかることがある．すなわち，出題順

列に現れることのない数 $N+1$ をダミーとして回答に用いると得になることがある．注意 2（4 章）を参照のこと．

2.2 基本的な命題

以下に，$S(A)$ に関する基本的な命題をいくつかあげておく．

命題 2.1 $|A|=1$ ならば $S(A)=1$ であり，$|A|=2$ ならば $S(A)=3$ である．一般に $S(A)\geq 2|A|-1$ が成り立つ．

命題 2.2 現在の出題集合が A のときの回答 a に対する返答 $r\in R$ によって A を $C(A,a,r)=\{q\in A : r(q,a)=r\}$ と分類するとき，R から正解の場合の返答 3A0B を除いたものを R' と表すと次の式が成り立つ．

$$S(A)=|A|+\min_{a\in\Omega_N}\sum_{r\in R'}S(C(A,a,r)). \tag{1}$$

ここで $S(A,a)=|A|+\sum_{r\in R'}S(C(A,a,r))$ と書くことにすれば，式 (1) は $S(A)=\min_{a\in\Omega_N}S(A,a)$ と表すことができる．すべての a，r に対し $C(A,a,r)\subset A$ であるから，この命題 2.2 によりすべての $S(A)$ の値を小さい集合から帰納的に定めていくことが可能となる．次の命題 2.3 は命題 2.2 から帰納法によって得られる．

命題 2.3 $A\cap B=\emptyset$ であるとき，$S(A\cup B)\geq S(A)+S(B)$ が成り立つ．

次の命題は AB game の解析において非常に重要であるため，証明とともに述べる．

命題 2.4 $1\leq n\leq N-2$ とする．$A=\{(1,2,x) : 3\leq x\leq n+2\}$ であるとき，$S(A)=f(n)$ である．この f は

$$f(n) = \begin{cases} (n^2+11n-6)/6 & n \text{ を 3 で割った余りが 0 または 1} \\ (n^2+11n-8)/6 & n \text{ を 3 で割った余りが 2} \end{cases} \tag{2}$$

である．

証明 $f(1)=1$，$f(2)=3$，$f(3)=6$ はすべての戦略を探索することで示せる．$n\geq 4$ については帰納法によって示す．最初の回答 a によって場合分けをする．A において 3 から $n+2$ までの数は対等であることから，a には 6 以上の数は含まれないとしてよい[*1]．

- $a=(3,4,5)$ のとき，A は返答によって $\{(1,2,5)\}$, $\{(1,2,3),(1,2,4)\},\{(1,2,x) : 6\leq x\leq n+2\}$ と分割されるため $S(A,a)=n+1+3+f(n-3)$ となる．
- a が 3，4 を含むが 5 を含まないとき，A は $\{(1,2,3)\}$, $\{(1,2,4)\},\{(1,2,x) : 5\leq x\leq n+2\}$ より細分されることはないため $S(A,a)\geq n+1+1+f(n-2)$ となる[*2]．
- a が 3 を含むが 4，5 を含まないとき，A は $\{(1,2,3)\}$, $\{(1,2,x) : 4\leq x\leq n+2\}$ より細分されることはないため $S(A,a)\geq n+f(n-1)$ となる[*3]．

$n+4+f(n-3)$，$n+2+f(n-2)$，$n+f(n-1)$ を比較すると $n+4+f(n-3)$ が最小であることが分かる（$n-1$ 以下について式 (2) が成り立つことが帰納法の仮定である）．したがって $f(n)=n+4+f(n-3)$ となり，この等式から式 (2) が示される．（終）

出現頻度の高い他の 2 つの集合についても総回答数を命題 2.5，命題 2.6 として取り上げ，証明の概略を述べる．

命題 2.5 $1\leq n\leq N-3$ とする．$A=\{(1,2,x),(1,x,3) : 4\leq x\leq n+3\}$ であるとき，$S(A)=g(n)$ である．この g は $g(1)=3$ であり，$n\geq 2$ において

$$g(n) = \begin{cases} (n^2+13n-9)/3 & n \text{ を 3 で割った余りが 0 または 2} \\ (n^2+13n-11)/3 & n \text{ を 3 で割った余りが 1} \end{cases} \tag{3}$$

である．

命題 2.6 $2\leq n\leq N-1$ とする．$A=\{(1,x,y) : 2\leq x\leq n+1, 2\leq y\leq n+1, x\neq y\}$ であるとき，$S(A)=h(n)$ である．この h は $h(2)=3$，$h(3)=13$，$h(4)=30$ であり，$n\geq 5$ において

$$h(n) = \begin{cases} \frac{2}{9}n^3+\frac{20}{9}n^2-\frac{22}{3}n+11 & n \text{ を 3 で割った余りが 0} \\ \frac{2}{9}n^3+\frac{20}{9}n^2-\frac{64}{9}n+\frac{23}{3} & n \text{ を 3 で割った余りが 1} \\ \frac{2}{9}n^3+\frac{20}{9}n^2-\frac{62}{9}n+\frac{73}{9} & n \text{ を 3 で割った余りが 2} \end{cases} \tag{4}$$

である．

まず次の補題を認めることにより，命題 2.5 の証明を行う（補題 2.7 の証明は省略する）．

補題 2.7 $1\leq n\leq N-4$ とする．$A=\{(1,2,x),(1,3,4) : 5\leq x\leq n+4\}$ であるとき，$S(A)=\alpha(n)$ である．この α は $\alpha(1)=3$ であり，$n\geq 2$ において

$$\alpha(n) = \begin{cases} (n^2+13n)/6 & n \text{ を 3 で割った余りが 0 または 2} \\ (n^2+13n-2)/6 & n \text{ を 3 で割った余りが 1} \end{cases} \tag{5}$$

である．

命題 2.5 の証明 $g(1)=3$，$g(2)=7$，$g(3)=13$ はすべての戦略を探索することで示せる．$n\geq 4$ において式 (3) が正しいことを帰納法で示す．A において 4 から $n+3$ までの数は対等であることから，最初の回答 a には 7 以上の数

---

*1 厳密にいえば a に $n+3$ 以上の数が含まれる場合も考慮の必要があるがそのときも同様に示せる．

*2 a が 3 と 4 を同時に含むことを仮定しているため $a\notin A$，すなわちすべての $q\in A$ に対して $r(q,a)\in R'$ である．

*3 $a=(1,2,3)$ のとき $S(\{(1,2,3)\})$ は $S(A,a)$ の定義式の右辺の和から除外されることを考慮している．

は含まれないとしてよい．A においては 2 と 3 も対等であるため，2 と 3 の一方のみを最初の回答に用いるときは 2 を使うこととしてよい．最初の回答を $a = (4, 2, 5)$ とすると $S(A, a) = 2n + 5 + 2f(n-2)$ となる．a が $(4, 2, 5)$ 以外のときは

- $a = (4, 5, 6)$ のとき，$S(A, a) = 2n + 10 + g(n-3)$ となる．
- a が 1，4，5 を含むとき，A は $\{(1,2,4)\}, \{(1,4,3)\}, \{(1,2,5)\}, \{(1,5,3)\}, \{(1,2,x), (1,x,3) : 6 \le x \le n+2\}$ より細分されることはないため $S(A, a) \ge 2n + 4 + g(n-2)$ となる．
- $a = (2, 4, 5)$ のとき，$S(A, a) = 2n + 3 + \alpha(n-2) + f(n-2)$ となる．
- $a = (4, 5, 2)$ のとき，$S(A, a) = 2n + 4 + \alpha(n-2) + f(n-2)$ となる．
- a が 5，6 を含まないとき，A は $\{(1,2,4)\}, \{(1,4,3)\}, \{(1,2,x) : 5 \le x \le n+3\}, \{(1,x,3) : 5 \le x \le n+3\}$ より細分されることはないため $S(A, a) \ge 2n + 1 + 2f(n-1)$ となる．

これらのいずれの場合も $S(A, a) \ge 2n + 5 + 2f(n-2)$ であることが式 (2)，(3)，(5) から分かる．したがって，$S(A) = 2n + 5 + 2f(n-2)$ となり，この式から式 (3) が示される． （終）

命題 2.6 の証明には次の補題を用いる（補題 2.8 の証明は複雑であるが省略する）．

補題 2.8 $1 \le n \le N-4$ とする．$A = \{(1,2,x), (1,x,2), (1,x,3), (1,4,x) : 5 \le x \le n+4\}$ であるとき，$S(A) = \beta(n)$ である．この β は $\beta(1) = 7$，$\beta(2) = 18$，$\beta(3) = 30$，$\beta(4) = 43$ であり，$n \ge 5$ において

$$\beta(n) = \begin{cases} (2n^2+30n-24)/3 & n\text{ を 3 で割った余りが 0} \\ (2n^2+30n-20)/3 & n\text{ を 3 で割った余りが 1 または 2} \end{cases}$$

である．

命題 2.6 の証明 $h(2) = 3$，$h(3) = 13$，$h(4) = 30$ であることはすべての戦略を探索することで示せる．$n \ge 5$ において式 (4) が正しいことを帰納法で示す．最初の回答を $a = (2, 3, 4)$ とするとき $S(A, a) = n(n-1) + 9 + g(n-3) + \beta(n-3) + h(n-3)$ となる．A において 2 から $n+1$ までの数は対等であることから，a が $(2, 3, 4)$ 以外であるとき a は 1，2，3 を含むとしてよい．この a によって A は $\{(1,2,3)\}, \{(1,3,2)\}, \{(1,2,x) : 4 \le x \le n+1\}, \{(1,x,2) : 4 \le x \le n+1\}, \{(1,3,x) : 4 \le x \le n+1\}, \{(1,x,3) : 4 \le x \le n+1\}, \{(1,x,y) : 4 \le x \le n+1, 4 \le y \le n+1, x \ne y\}$ より細分されることはない．よって $S(A, a) \ge n(n-1) + 1 + 4f(n-2) + h(n-2)$ が成り立つ．この右辺は $n \ge 5$ において $n(n-1) + 9 + g(n-3) + \beta(n-3) + h(n-3)$ より小さくはならないことが計算により示される．したがって，$S(A) = n(n-1) + 9 + g(n-3) + \beta(n-3) + h(n-3)$ となり，この式から式 (4) が示される． （終）

3. $3 \times N$ AB game の解析

3.1 解析の概略

本章以降の目標は，各 $A \subset \Omega_N$ に対する最適回答と $S(A)$ の値を調べ，最終的に $S(\Omega_N)$ を求めることである．2.2 節で典型的な A について $S(A)$ を求めたが，一般の集合 A についても $S(A)$ を調べるにはやはり各々の $a \in \Omega_N$ によって分割された各 $C(A, a, r)$ の総回答数を式 (1) に代入して右辺の和の値を計算しなければならず，結局 Ω_N の小さな部分集合から順に総回答数を求めていくことになる．このときの細分化された集合として 2.2 節で扱った典型的な A，特に $A = \{(1,2,x) : 3 \le x \le n+2\}$ の形のものがしばしば現れる．

実際の解析において，集合にある種の対称性があるときはこれを用いて調べる回答の種類を減らすことができる．最初の時点での出題集合 Ω_N に対する回答は $(1,2,3)$ に限っても一般性を失わない．このときの返答が仮に 1A0B であったとするとき，回答者の次の回答として $(1,3,2)$，$(2,3,1)$，$(1,2,4)$，$(1,4,2)$，$(2,1,4)$，$(4,1,2)$，$(1,4,5)$，$(4,1,5)$，$(4,5,6)$ を考えれば十分である．

このように集合 A ごとの値 $S(A)$ を定めていく方法は本質的に Chen–Lin [5] に現れているが，$2 \times N$ AB game の場合と比較すると $3 \times N$ AB game のほうがはるかに多くの種類の集合に対し $S(A)$ を決めなければならない．同じ方法で $4 \times N$ AB game の期待値最小化戦略を決定するには複雑さの面でかなりの困難が生じると思われる．

3.2 一般の N に対する解析

N の値が小さい場合は探索空間が広くなく，コンピュータによる探索も可能である．$S(\Omega_3) = 15$，$S(\Omega_4) = 72$，$S(\Omega_5) = 196$，$S(\Omega_6) = 436, \ldots$ となる．ここでの課題は，すべての N に対して $S(\Omega_N)$ を完全に決定することである．最初の回答 $a = (1, 2, 3)$ に対する返答 r によって Ω_N を $\{C(\Omega_N, (1,2,3), r)\}_{r \in R}$ に分類し，$T_r = C(\Omega_N, (1,2,3), r)$ と書くことにする．ここで，r =1A1B のとき T_{11}，といったように A，B は省略して表すことにする．$S(T_{12}) = 6$，$S(T_{03}) = 3$ であり，

$$S(\Omega) = |\Omega_N| + 6 + 3 + S(T_{20}) + S(T_{11}) + S(T_{02}) + S(T_{10}) + S(T_{01}) + S(T_{00})$$

である．後は $S(T_{20})$，$S(T_{11})$，$S(T_{02})$，$S(T_{10})$，$S(T_{01})$，$S(T_{00})$ を求めればよい．前述のとおり，返答によって各出題集合の分割を繰り返し，$A = \{(1,2,x) : 3 \le x \le n+2\}$ などの典型的な形になったところで $S(A)$ の値を代入して比較する．一例として，T_{20} について述べる．T_{20} を具体的に書けば

$$T_{20} = \{(1,2,x),(1,x,3),(x,2,3) : 4 \le x \le N\}$$

である．$|T_{20}| = 3(N-3)$ である．次の回答として $(1,4,5)$ を選択した場合，返答によって T_{20} は $\{(1,2,5),(1,4,3)\}$, $\{(1,2,4),(1,5,3)\}$, $\{(1,2,x),(1,x,3) : 6 \le x \le N\}$, $\{(4,2,3),(5,2,3)\}$, $\{(x,2,3) : 6 \le x \le N\}$ と分割され，それぞれの集合の総回答数は順に $3, 3, g(N-5), 3, f(N-5)$ であるから，

$$\begin{aligned} S(T_{20}) &\le 3(N-3)+3+3+g(N-5)+3+f(N-5) \\ &= 3N + g(N-5) + f(N-5) \end{aligned}$$

であるといえる．こうして各回答ごとに総回答数を求め，そのなかの最小となるものを決定すればよい．解析を行った結果は次章および付録において説明する．

4. 解析結果

$3 \times N$ AB game の総回答数の最小値および回答回数の期待値について，次の結果を得た．

定理 4.1　$S(\Omega_N)$ の値は，$3 \le N \le 11$ については下表のとおりである．

N	3	4	5	6	7	8	9	10	11
総回答数	15	72	196	436	836	1,449	2,337	3,575	5,204

$N \ge 12$ においては

$$S(\Omega_N) = \begin{cases} \frac{1}{4}N^4 + \frac{133}{54}N^3 - \frac{629}{36}N^2 + \frac{197}{6}N + 25 & N \text{ を 3 で割った余りが } 0 \\ \frac{1}{4}N^4 + \frac{133}{54}N^3 - \frac{71}{4}N^2 + \frac{358}{9}N - \frac{263}{27} & N \text{ を 3 で割った余りが } 1 \\ \frac{1}{4}N^4 + \frac{133}{54}N^3 - \frac{631}{36}N^2 + \frac{269}{9}N + \frac{1583}{27} & N \text{ を 3 で割った余りが } 2 \end{cases}$$

である．よって，$N \to \infty$ としたときの平均回答数の期待値は

$$\frac{S(\Omega_N)}{|\Omega_N|} = \frac{N}{4} + \frac{347}{108} + o(1)$$

である．

次に，期待値最小化戦略における 2 回目の回答は何であるかを述べる．

定理 4.2　最初の回答 $(1,2,3)$ に対する返答によって分割された T_{20}，T_{11}，T_{02}，T_{10}，T_{01}，T_{00} それぞれについての最適戦略は以下のとおりである．

- 出題集合が T_{20} のとき，$N \ge 7$ において $(1,4,5)$ が最適な回答となる．
- 出題集合が T_{11} のとき，$N \ge 7$ において $(1,4,5)$ が最適な回答となる．
- 出題集合が T_{02} のとき，$N \ge 7$ において $(4,1,5)$ が最適な回答となる．
- 出題集合が T_{10} のとき，$N \ge 10$ において $(4,5,6)$ が最適な回答となる．
- 出題集合が T_{01} のとき，$N \ge 14$ において $(4,1,5)$ が最適な回答となる．
- 出題集合が T_{00} のとき，$N \ge 8$ において $(4,5,6)$ が最適な回答となる．

定理に書かれていない小さな N に対しては個々に最適な回答が変わるため省略する．N が十分大きいとき，T_{20}，T_{11}，T_{02}，T_{01} において新しい数を使って回答 $(4,5,6)$ をする単純な戦略は最善とはならない．これは $3 \times N$ AB game の最適戦略が複雑で面白いことを示している．

注意 2　前述のとおり，最初の回答はつねに $(1,2,3)$ としても一般性を失なわない．しかし $N = 4$ のとき，もし最初の回答として $(1,2,5)$ を選ぶことができれば総回答数を $69 < S(\Omega_4) = 72$ とより小さくすることができる．$N \ne 4$ ではこのようなことは起こらない．定理 4.2 の T_{00} に対し，$N = 7$ で $(4,5,6)$ が最適な回答とならないのはこのためである．

5. まとめ

$3 \times N$ AB game の回答回数の期待値の最小値および最小化戦略をすべての N に対して求めた．結果，最善の戦略によって回答回数の期待値は $(N/4) + (347/108) + o(1)$ となること，また最善の戦略はできるだけ新しい数を回答に用いるといった単純なものではないことが分かった．この解析結果はコンピュータによる最適解探索アルゴリズムの検証にも役立つと考えられる．

参考文献

[1] Huang, L.T. and Lin, S.S.: Optimal analyses for $3 \times n$ AB Games in the worst case, In: van den Herik, H.J. and Spronck, P. (Eds.), *Advances in Computer games* (*ACG 2009*), LNCS, Vol.6048, pp.170–181, Springer (2010).

[2] Knuth, D.E.: The computer as Master Mind, *J. Recreat. Math.*, Vol.9, pp.1–6 (1976).

[3] Koyama, M. and Lai, T.: An optimal Mastermind strategy, *J. Recreat. Math.*, Vol.25, pp.251–256 (1993).

[4] 田中哲朗：数当てゲーム MOO の最小質問戦略と最強戦略，第 3 回ゲームプログラミングワークショップ報告集，pp.202–209 (1996).

[5] Chen, S.T. and Lin, S.S.: Optimal algorithms for $2 \times n$ AB games – A graph-partition approach, *J. Inf. Sci. Eng.*, Vol.20, No.1, pp.105–126 (2004).

付　　録

最初の回答 $(1,2,3)$ に対する返答によって分割された T_{20}，T_{11}，T_{02}，T_{10}，T_{01}，T_{00} のそれぞれについて総回答数を述べる．これらの総回答数を基に

$$S(\Omega_N) = |\Omega_N| + 9 + S(T_{20}) + S(T_{11}) + S(T_{02})$$

表 **A·1** 各 T_r の総回答数
Table A·1 The number of all guesses of T_r.

N	$\lvert\Omega_N\rvert+9$	$S(T_{20})$	$S(T_{11})$	$S(T_{02})$	$S(T_{10})$	$S(T_{01})$	$S(T_{00})$	$S(\Omega_N)$	$S(\Omega_N)/\lvert\Omega_N\rvert$
5	69	12	28	45	13	29		196	3.267
6	129	21	46	74	47	104	15	436	3.633
7	219	31	68	109	105	235	69	836	3.981
8	345	43	92	145	197	431	196	1,449	4.313
9	513	55	117	188	323	705	436	2,337	4.637
10	729	69	147	234	494	1,066	836	3,575	4.965
11	999	84	177	279	705	1,511	1,449	5,204	5.257
12	1,329	99	208	332	967	2,071	2,337	7,343	5.563
13	1,725	116	244	386	1,283	2,730	3,575	10,059	5.862
14	2,193	134	280	441	1,652	3,500	5,204	13,404	6.137
15	2,739	152	316	502	2,087	4,416	7,343	17,555	6.430
16	3,369	172	358	565	2,583	5,449	10,059	22,555	6.713
17	4,089	193	400	628	3,146	6,622	13,404	28,482	6.981
18	4,905	214	442	697	3,790	7,960	17,555	35,563	7.264
19	5,823	237	490	769	4,502	9,436	22,555	43,812	7.536
20	6,849	261	538	841	5,294	11,084	28,482	53,349	7.800

$$+S(T_{10})+S(T_{01})+S(T_{00})$$

として $S(\Omega_N)$ が求められる．以下に各 $S(T_r)$ の一般項を述べる．小さい N に対しては**表 A·1** にまとめた．

- 最初の回答 $(1,2,3)$ に対する返答が 2A0B であるとき，$N \geq 7$ において

$$S(T_{20}) = \begin{cases} \frac{1}{2}N^2+\frac{25}{6}N-23 & N \text{ を 3 で割った余りが } 0 \\ \frac{1}{2}N^2+\frac{25}{6}N-\frac{68}{3} & N \text{ を 3 で割った余りが } 1 \\ \frac{1}{2}N^2+\frac{25}{6}N-\frac{67}{3} & N \text{ を 3 で割った余りが } 2 \end{cases}$$

である．

- 最初の回答 $(1,2,3)$ に対する返答が 1A1B であるとき，$N \geq 12$ において

$$S(T_{11}) = \begin{cases} N^2+9N-44 & N \text{ を 3 で割った余りが } 0 \\ N^2+9N-42 & N \text{ を 3 で割った余りが } 1, 2 \end{cases}$$

である．

- 最初の回答 $(1,2,3)$ に対する返答が 0A2B であるとき，$N \geq 15$ において

$$S(T_{02}) = \begin{cases} \frac{3}{2}N^2+\frac{31}{2}N-68 & N \text{ を 3 で割った余りが } 0 \\ \frac{3}{2}N^2+\frac{31}{2}N-67 & N \text{ を 3 で割った余りが } 1 \\ \frac{3}{2}N^2+\frac{31}{2}N-69 & N \text{ を 3 で割った余りが } 2 \end{cases}$$

である．

- 最初の回答 $(1,2,3)$ に対する返答が 1A0B であるとき，$N \geq 14$ において

$$S(T_{10}) = \begin{cases} \frac{2}{3}N^3+\frac{7}{3}N^2-\frac{166}{3}N+142 \\ \qquad N \text{ を 3 で割った余りが } 0 \\ \frac{2}{3}N^3+\frac{7}{3}N^2-56N+151 \\ \qquad N \text{ を 3 で割った余りが } 1 \\ \frac{2}{3}N^3+\frac{7}{3}N^2-\frac{169}{3}N+154 \\ \qquad N \text{ を 3 で割った余りが } 2 \end{cases}$$

である．

- 最初の回答 $(1,2,3)$ に対する返答が 0A1B であるとき，$N \geq 15$ において

$$S(T_{01}) = \begin{cases} \frac{4}{3}N^3+\frac{19}{3}N^2-\frac{359}{3}N+286 \\ \qquad N \text{ を 3 で割った余りが } 0 \\ \frac{4}{3}N^3+\frac{19}{3}N^2-\frac{362}{3}N+297 \\ \qquad N \text{ を 3 で割った余りが } 1 \\ \frac{4}{3}N^3+\frac{19}{3}N^2-119N+264 \\ \qquad N \text{ を 3 で割った余りが } 2 \end{cases}$$

である．

- 最初の回答 $(1,2,3)$ に対する返答が 0A0B であるとき，$N \geq 8$ において $S(T_{00})$ は $S(\Omega_{N-3})$ に一致する．

篠田 正人 （正会員）

昭和 44 年生．平成 6 年東京大学大学院数理科学研究科修士課程修了．同年より奈良女子大学理学部助手，現在，同大学理学部准教授（数学科）．統計力学に関わる確率モデルの研究に従事している．博士（数理科学）．