

立方体上の n -クイーン問題と n -ルーク問題

藤原 美早紀¹ 山村 明弘^{1,a)}

受付日 2011年9月6日, 採録日 2012年3月2日

概要: 2次元チェス盤上のエイトクイーンパズルを立方体表面上に拡張して構成される n -クイーン問題および n -ルーク問題について考察する. 2次元チェス盤上の n -ルーク問題の解は自明であるが, 立方体表面の6つの面に $n \times n$ のチェス盤を置いて構成した立体的なゲーム盤上の n -クイーン問題および n -ルーク問題の解の個数や特徴は明らかではない. 本論文では, 1辺が n の立方体表面上で互いに攻撃しないルークの最大個数は $\lfloor 3n/2 \rfloor$ であることを証明し, 互いに攻撃しない最大個数のルークが立方体表面上に配置されるときに満たさなければならない必要条件を示す. さらに立方体を自分自身に重ね合わせる変換で移り合う n -クイーン問題および n -ルーク問題の解を同一視するため, 正8面体群の立方体への作用から n -クイーン問題および n -ルーク問題の解の集合への作用を導入し, その作用に関する同値類の個数を求めることで本質的に異なる解の個数を計算する. n -クイーン問題 ($n \leq 8$) および n -ルーク問題 ($n \leq 6$) の本質的に異なる解の個数を報告する.

キーワード: エイトクイーンパズル, n -クイーン問題, n -ルーク問題, Cauchy-Frobenius の定理

n -Queens and n -Rooks Problem on Cubes

MISAKI FUJIWARA¹ AKIHIRO YAMAMURA^{1,a)}

Received: September 6, 2011, Accepted: March 2, 2012

Abstract: We discuss n -queen and n -rook problems on cubes, which are generalization of the eight queen puzzle over two-dimensional chessboard. We can easily get a solution of the n -rook problem on a two-dimensional chessboard, while it has not been known the number or any theoretical properties of solutions for the n -rook problem on three-dimensional game board constructed by six chessboards placed on six faces of a cube. We show the maximal number of mutually non-attacking rooks placed on the surface of a cube of side length n is $\lfloor 3n/2 \rfloor$ and give some necessary conditions for maximal numbers of rooks to satisfy when placed on a cube. Furthermore, we apply the octahedral group action on a cube to the set of solutions to identify them if they can transfer to one another. We count the number of essentially different solutions by counting equivalence classes induced from the action. We report the numbers of solutions of the n -queen problem for $n \leq 8$ and the n -rook problem for $n \leq 6$.

Keywords: eight queens puzzle, n -queen problem, n -rook problem, Cauchy-Frobenius theorem

1. はじめに

1.1 チェスを利用したパズルと n -クイーン問題

チェスは2人用のボードゲームで世界で広く楽しまれている. 対戦型のゲームに加えて, ある局面から指定された手数内でチェックメイトにいたる動きを考えるパズル(チェス・プロブレムや詰めチェスと呼ばれる)も広く普及

している. またチェスに根ざしたペンシルパズルも数多く存在する.

縦横8マスのチェス盤上に8個の互いが攻撃しないクイーンの配置を見つけるパズルをエイトクイーンパズルという. クイーンは縦横斜めに動くことができ, 将棋における飛車と角を兼ねる駒である. エイトクイーンパズルを, 一般の n に対して縦横 n マスのチェス盤に拡張したパズルを n -クイーン問題と呼ぶ. n -クイーン問題は制約充足問題の典型例であり, プログラムの高速化の手法の研究対象

¹ 秋田大学

Akita University, Akita 010-8502, Japan

a) yamamura@ie.akita-u.ac.jp

やベンチマークとして取り上げられることも多く、Rivinら [1] が詳しく紹介している。

n -クイーン問題はクラス#Pに含まれないことが知られており [2], 解の個数を求めることは難しい. 8-クイーン問題の解の個数は92となるが, それらはチェス盤を回転させることで他の解と同一の配置となる解を含んでいる. これらの解は本質的に同じ解と見なされ, 本質的に異なる解は全部で12個あることが知られている. たとえば, $n = 17$ では本質的には同じ解を重複して数えた場合の解の個数は95, 815, 104となり, n の増加にともない解の個数は爆発的に増大する. SloaneのThe On-Line Encyclopedia of Integer Sequences [3]に, 多くの組合せ構造に関連する数列がまとめられており, $n = 26$ まで n -クイーン問題の解の個数が与えられている.

1.2 種々の変形

2次元のチェス盤上の n -クイーン問題は種々の変形が提案され研究されている. たとえば, Pólya [4]は $n \times n$ の正方形の相対する辺を同一視して得られるトーラス上のチェス盤における n -クイーン問題について考察している. チェス盤全体をなるべく少ない個数のクイーンで攻撃する方法を見つけるパズルや3次元以上の超立方体に拡張した n -クイーン問題も考えられている [5], [6].

n -ルーク問題は, クイーンの代わりに将棋における飛車と同様に縦横に動くことができる駒であるルークを用いた問題である. 2次元チェス盤上の n -ルーク問題の解 ($n \times n$ チェス盤上の互いに攻撃しない n 個のルークの配置)は, 回転と反転で移り合う解を重複して数えれば, $n!$ 個あることは簡単に分かる. またクイーンはルークの動きも兼ねるため, n -クイーン問題の解は必ず n -ルーク問題の解にもなっており, n -ルーク問題の解の個数は n -クイーン問題の解の個数よりも多い. 実際に, 8-ルーク問題の解の個数は40,320であり, 8-クイーン問題の解の個数よりもかなり多い.

2. 立方体上のパズル

本論文では, 立方体表面の6つの面にそれぞれ $n \times n$ のチェス盤を置くことで構成される $6n^2$ 個のマス目を持つ立方体ボードにおける n -ルーク問題と n -クイーン問題について考察する.

立方体上のルークは, 2次元チェス盤上のルークと同様に縦横に動くことができ, 4つの面を通過し元のルークの位置に戻ってくる. 図1にルークの動きの一例を示す. 一方, 2次元チェス盤上のクイーンの動きを立方体表面に拡張する方法は複数考えられる. 本論文では, 立方体上におけるクイーンの縦横の動きはルークと同様とする. 立方体上の面の対角線上にクイーンがある場合には, 斜めの動きをクイーンが位置している面の上だけに限定する. 立方体

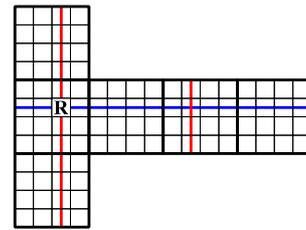


図1 立方体上でのルークの動き
Fig. 1 Moves of a rook on cubes.

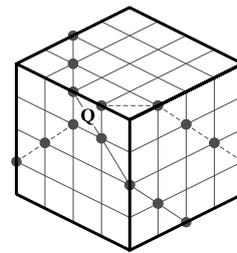


図2 立方体上でのクイーンの動き
Fig. 2 Moves of a queen on cubes.

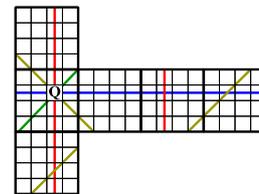


図3 クイーンが面の対角線上にある場合
Fig. 3 A queen on a diagonal of a face.

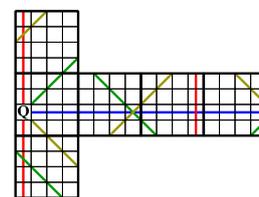


図4 クイーンが面の対角線上にない場合
Fig. 4 A queen not on a diagonal of a face.

上の面の対角線上にクイーンがない場合には, 図2のようにマス目の対角線をたどり, クイーンが存在するマス目と頂点を共有する隣接したマス目へ移動する動きをクイーンの斜め方向の動きとする. 図3, 図4に1辺が4の立方体におけるクイーンの動きを展開図の上で例示した. 対角線上にない場合には, 斜めの動きによりクイーンはすべての面を1回通過して, そのクイーンがある場所に戻ってくる.

立方体上の n -クイーン問題(または n -ルーク問題)の解とは, 立方体上で互いに攻撃しない位置に最大個数のクイーン(またはルーク)を置く配置のことである. ここで, n は立方体の1辺の長さを指しており, 置く駒の個数ではないことに注意してほしい. 実際, 互いに攻撃しない位置に置くことができる駒の最大個数は明らかではない. たとえば, 図5と図6に, 1辺が2の立方体上のルーク問題の

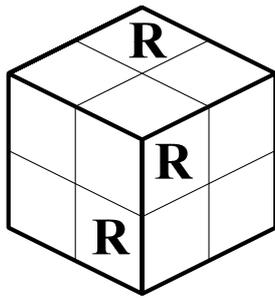


図 5 2-ルーク問題の解
Fig. 5 A solution of 2-rook problem.

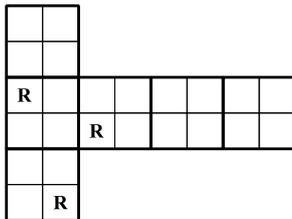


図 6 2-ルーク問題の解の展開図
Fig. 6 A development of a 2-rook-problem solution.

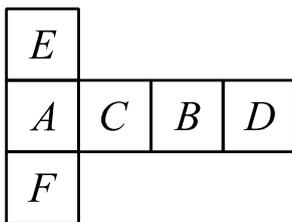


図 7 展開図
Fig. 7 A development.

解とそれを展開図に記載したものを示す。3個のルークは互いに攻撃されない位置にあり、この3個の駒に加えて新しいルークを互いに攻撃しないように置くことができないことも分かる。

2.1 互いに攻撃しないルークの最大個数

補助定理 2.1 1辺が n の立方体上において、 $\lfloor 3n/2 \rfloor$ 個よりも多いルークを互いに攻撃しないように置くことはできない。ここで $\lfloor 3n/2 \rfloor$ は $3n/2$ を超えない最大の整数を表す。

証明: 1辺が n の立方体上の6つの面をそれぞれ A, B, C, D, E, F とし、図7に示すように展開図に配置されていると仮定する。 A と B, C と D, E と F はそれぞれ、立方体において相対する位置にあることに注意してほしい。

互いに攻撃しないようにいくつかのルークを置いたとする。このとき、 A と B に現れるルークの数を x, C と D に現れるルークの数を y, E と F に現れるルークの数を z としよう。図7の展開図において、 A, C, B, D から構成される $n \times 4n$ の長方形には、各行にたかだか1つのルークしか置けないので、鳩の巣原理から n 個以上のルークは置

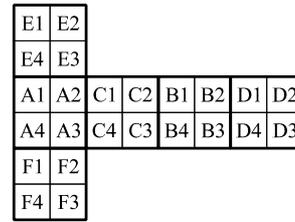


図 8 分割した展開図
Fig. 8 Split development.

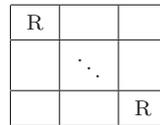


図 9 E1
Fig. 9 E1.

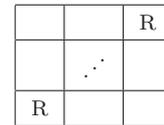


図 10 A2
Fig. 10 A2.

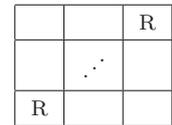


図 11 C4
Fig. 11 C4.

けない。よって、 $x + y \leq n$ が成り立つ。同様にして、以下の連立不等式が成立する。

$$\begin{cases} x + y \leq n \\ y + z \leq n \\ z + x \leq n \end{cases} \quad (1)$$

これから、 $x + y + z \leq 3n/2$ が成立する。立方体上にあるルークの総数は $x + y + z$ であるので、 $\lfloor 3n/2 \rfloor$ 個よりも多いルークを互いに攻撃しないように置くことはできない。

□

さらに以下の定理が成立する。

定理 2.2 1辺が n の立方体上に置くことができる互いに攻撃しないルークの最大個数は $\lfloor 3n/2 \rfloor$ である。

証明: もし $n = 1$ ならばルークの最大個数は $1 = \lfloor 3 \times 1/2 \rfloor$ であり、 $n = 1$ の時は正しい。次に $n = 2k$ (k は自然数) であると仮定しよう。 $\lfloor 3 \times 2k/2 \rfloor = 3k$ なので、補助定理 2.1 から $3k$ 個の互いに攻撃しないルークの具体的な置き方を示せばよい。1辺が $2k$ の立方体 (図7参照) の6つの面 A, B, C, D, E, F をそれぞれ4つに分割する。たとえば A の4つの部分面を $A1, A2, A3, A4$ として、図8のように配置されるとする。

ここで各部分面は1辺が k の正方形である。そこで、 $E1, A2, C4$ において、中心から外部に向かう対角線上にルークを配置する。すなわち、それぞれ図9、図10、図11のようにルークを配置させる。

部分面 A, C, E にはそれぞれ k 個のルークが置かれ互いに攻撃していないことが分かる。 $E1$ に置かれたルークは、 $A1, A4, B2, B3, C2, C3, D1, D4, E1, E2, E4, F1, F3, F4$ に置かれた駒だけを攻撃できるため (図8参照)、 $A2, C4$ に置かれた駒を攻撃することはできない。同様に、 $A2$ に置かれたルークは $E1, C4$ に置かれた駒を攻撃できず、 $C4$ に置かれたルークは $A2, E1$ に置かれた駒を攻撃することができない。このことから、立方体上に互いに攻撃しない $3k$ 個のルークが置かれていることが分かる。

A1	A2	A3
A8	A9	A4
A7	A6	A5

図 12 分割した面
Fig. 12 Split face.

補助定理 2.1 より, $3k$ 個よりも多いルークを互いに攻撃しないように置くことはできない. したがって, 互いに攻撃しないように置くことができるルークの最大個数は $3k$ である.

次に, $n = 2k + 1$ (k は自然数) と仮定しよう. $\lfloor 3(2k + 1)/2 \rfloor = 3k + 1$ なので, 補助定理 2.1 から $3k + 1$ 個の互いに攻撃しないルークの具体的な置き方を示せばよい. 1 辺が $2k + 1$ の立方体の 6 つの面 A, B, C, D, E, F をそれぞれ 9 つに分割する. たとえば A の 9 つの部分面を $A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9$ として, 図 12 のように分割する. ここで, $A8, A9, A4$ は行を 1 つだけ含み, $A2, A9, A6$ は列を 1 つだけ含む. $A1, A3, A5, A7$ は 1 辺が k の正方形である. 同様に, E, C も分割する. $n = 2k$ のときの議論と同様に, $E1, A3, C7$ の対角線上にルークを置く. さらに $A9$ に 1 個のルークを置く. 部分面 C, E にはそれぞれ k 個のルークが置かれ互いに攻撃していない. A には $k + 1$ 個のルークが置かれ互いに攻撃していない. 前の議論と同様にして, 立方体上に互いに攻撃しない $3k + 1$ 個のルークが置かれていることが分かる. 補助定理 2.1 より, $3k + 1$ 個よりも多いルークを置くことはできない. したがって互いに攻撃しないルークの最大個数は $3k + 1$ である. □

2.2 n -ルーク問題の解の特性

次に, n -ルーク問題の解が満たす必要条件を与える. 計算機実験で探索プログラムを実装する際に探索空間を狭めることに役に立つ.

定理 2.3 (1) 1 辺が $n = 2k$ (k は自然数) の立方体上に互いに攻撃しないルークを最大個数置いたときに, 立方体の相対する 2 つの面からなる 3 つのペアにそれぞれちょうど k 個のルークが置かれている.

(2) 1 辺が $n = 2k + 1$ (k は自然数) の立方体上に互いに攻撃しないルークを最大個数置いたときに, 立方体の相対する 2 つの面からなる 3 つのペアのうち 2 つにはちょうど k 個のルークが置かれ, もう 1 つのペアにはちょうど $k + 1$ 個のルークが置かれている.

証明: r は n が偶数ならば 0 を n が奇数ならば 1 を表すものとする. 定理 2.2 より立方体表面に全部で $3k + r$ 個のルークが置かれている. 記号 x, y, z を補助定理 2.1 と

同じものとする, $x + y + z = 3k + r$ となる. よって $y + z = 3k + r - x$ となり, 不等式 (1) から $y + z \leq 2k + r$ であるので, $3k + r - x \leq 2k + r$ を得る. これから $k \leq x$ を得る. 同様に $k \leq y$ と $k \leq z$ を得る. もし n が偶数であれば, $x + y + z = 3k$ から $x = y = z = k$ を得る, 一方で, もし n が奇数であれば, $x + y + z = 3k + 1$ から x, y, z のどれか 2 つは k であり, 残りの 1 つは $k + 1$ でなければならない. □

3. 正 8 面体群の作用

3.1 群の作用と Cauchy-Frobenius の定理

2次元チェス盤を $\pi/2, \pi, 3\pi/2$ 回転させることにより, n -ルーク問題や n -クイーン問題の解から新しい解を導出できる. しかしこれらは元の解と同じ解と見なされる. そこで, 本質的に異なる解を数えるためには 2次元チェス盤の回転により互いに移り合う解を同一視する必要がある.

空間の中にある立方体に, それをそれ自身に重ね合わせる変換を施すと, n -クイーン問題や n -ルーク問題の解から新しい解を導出できるが, この変換によって互いに移り合う解は同じものと考えられる. 立方体をそれ自身に重ね合わせる変換は以下の 3 つのタイプに分類できる.

- (1) 相対する面の中心を結ぶ線を軸として, $\pi/2$ だけ回転する変換.
- (2) 相対する頂点を結ぶ線を軸として, $2\pi/3$ だけ回転する変換.
- (3) 相対する辺の midpoint を結ぶ線を軸として, π だけ回転する変換.

タイプ 1 は 9 個, タイプ 2 は 8 個, タイプ 3 は 6 個あり, 何も動かさない変換も含めて, 全部で 24 個の変換がある. これらの変換は正 8 面体群と呼ばれる群をなし, この群は 4 次対称群 S_4 と同型である. 立方体上の作用を介して正 8 面体群は n -ルーク問題と n -クイーン問題の解の集合にも自然に作用する. 本論文では正 8 面体群の作用から導入される同値関係の同値類の個数を求める. 同値類の個数を求めるには Cauchy-Frobenius の定理が有用である. これについては, Burnside [7], Grove [8] や Liu [9] を参照してほしい.

補助定理 3.1 (Cauchy-Frobenius の定理) 有限群 G が有限集合 S に作用しているとする. このとき, G の作用により導かれる S の同値類の数は

$$(1/|G|) \sum_{g \in G} \psi(g) \tag{2}$$

で与えられる. ここで, 各 $g \in G$ に対して, $\psi(g)$ は g により不変 (つまり $gs = s$) となる S の元 s の個数を表す. □

正 8 面体群の n -クイーン問題 (または n -ルーク問題) の解の集合上の作用において不変となる解の個数を調べることにより, Cauchy-Frobenius の定理から正 8 面体群の作用

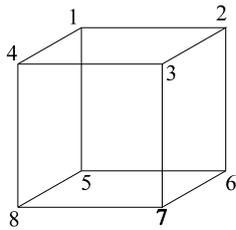


図 13 立方体
Fig. 13 A cube.

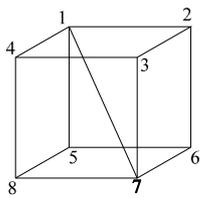


図 14 対角線 a
Fig. 14 Diagonal a.

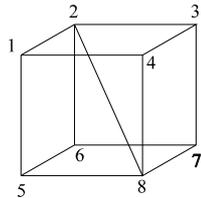


図 15 対角線 b
Fig. 15 Diagonal b.

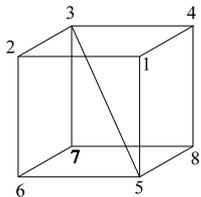


図 16 対角線 c
Fig. 16 Diagonal c.

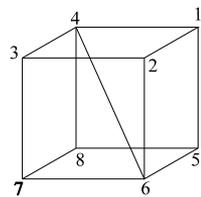


図 17 対角線 d
Fig. 17 Diagonal d.

に関する同値類の個数を求めることができる。

補助定理 3.2 群の元 g_1 と g_2 が同じ共役類に含まれるならば、 $\psi(g_1) = \psi(g_2)$ である。

証明: G の元 g_1 と g_2 は同じ共役類に含まれるとしよう。すると、 $g_2 = x^{-1}g_1x$ となる $x \in G$ が存在する。ここで $s \in S$ に対して $g_1s = s$ と仮定すると、 $g_2x^{-1}s = x^{-1}g_1xx^{-1}s = x^{-1}g_1s = x^{-1}s$ となる。したがって、 $s \mapsto x^{-1}s$ は g_1 の作用で不変な S の元の集合から g_2 の作用で不変な S の元の集合への 1 対 1 対応を与える。したがって、 $\psi(g_1) = \psi(g_2)$ である。 □

補助定理 3.2 から、Cauchy-Frobenius の定理を利用して同値類の数を計算するときには、同じ共役類に含まれる群のすべての元について ψ の値を計算する必要はなく、各共役類につき 1 つの元に対して ψ の値を計算すれば十分である。

次に、正 8 面体群の作用について説明する。立方体（各頂点に図 13 のように番号を付す）は 4 つの対角線を持っており（図 14, 図 15, 図 16, 図 17 を参照してほしい）、正 8 面体群の作用が 4 つの対角線の置換を引き起こす。ここで、頂点 1-7, 2-8, 3-5, 4-6 を結んだ対角線をそれぞれ a, b, c, d と名付ける。

正 8 面体群の作用が引き起こす対角線の置換を考えると、正 8 面体群が 4 次の対称群と同一視できる。たとえ

ば、タイプ 1 の置換である面 1-2-3-4 と面 5-6-7-8 の中心を結ぶ線を軸として $\pi/2$ だけ回転する操作は、対角線 a, b, c, d をそれぞれ対角線 b, c, d, a に移す。これは、置換 $(abcd)$ に対応する。タイプ 1 の置換である、面 1-2-3-4 と面 5-6-7-8 の中心を結ぶ線を軸として π だけ回転する操作は、対角線 a, b, c, d をそれぞれ対角線 c, d, a, b に移す。これは、置換 $(ac)(bd)$ に対応する。

タイプ 2 の置換である、対角線 a を軸として、 $2\pi/3$ だけ回転する操作は、対角線 a, b, c, d をそれぞれ対角線 a, c, d, b に移す。これは、置換 (bcd) に対応する。

タイプ 3 の置換である、辺 1-5 の中心と辺 3-7 の中心を結ぶ線を軸として、 π だけ回転する操作は、対角線 a, b, c, d をそれぞれ対角線 c, b, a, d に移す。これは、置換 (ac) に対応する。同様に正 8 面体群のすべての元は 4 つの対角線 a, b, c, d の置換を引き起こし、実際に 4 次の対称群 S_4 と同型対応が付けられる。したがって、正 8 面体群を 4 つの対角線に関する対称群 S_4 と同一視できる。対称群の共役類は同じ巡回型を持つ元からなることが知られている。すると（4 次の対称群と同一視して）正 8 面体群の共役類は 5 つあり、以下のように分類される。

- (1) e (単位元)
- (2) $(ab), (ac), (ad), (bc), (bd), (cd)$
- (3) $(ab)(cd), (ac)(bd), (ad)(bc)$
- (4) $(abc), (abd), (acb), (acd), (adb), (adc), (bcd), (bdc)$
- (5) $(abcd), (abdc), (acbd), (acdb), (adbc), (adcb)$

したがって、補助定理 3.2 と (2) から n -クイーン問題（または n -ルーク問題）の同値でない解の個数は

$$(1/24)(\psi(e) + 6\psi((ab)) + 3\psi((ab)(cd)) + 8\psi((abc)) + 6\psi((abcd))) \tag{3}$$

により求めることができる。

3.2 計算上の工夫

n -ルーク問題（または n -クイーン問題）の同値でない解の個数を式 (3) により求める際に、不必要な計算を省くことにより計算量を削減する方法について説明する。

補助定理 3.3 $n \geq 2$ ならば立方体上の n -ルーク問題（ n -クイーン問題）の解は、変換 $(ab)(cd)$ と $(abcd)$ により不変ではない。

証明: 変換 $(abcd)$ は前述したように面 1-2-3-4 と面 5-6-7-8 の中心を結ぶ線を軸として $\pi/2$ だけ回転する操作である。この面 1-2-3-4 と面 5-6-7-8 に対して、2 つの相対する面に置くことができる最大個数のルークを置いたと仮定する。もし $n \geq 2$ ならば、定理 2.3 より立方体全体に最大個数のルークを置くと、面 1-2-3-4 と面 5-6-7-8 以外の面にも必ずルークが置かれなければならない。それらのルークは変換 $(abcd)$ によって、変換前のルークから攻撃される位置に移動する。そのため、 n -ルーク問題の解は $(abcd)$ により不

変ではない。変換 $(ab)(cd)$ についても同様である。また、クイーンはルークの動きも兼ねるため、 n -クイーン問題の解は変換 $(ab)(cd)$ と $(abcd)$ により不変ではない。□

補助定理 3.4 $n = 2k + 1$ (k は自然数) ならば立方体上の n -ルーク問題の解は変換 (abc) により不変ではない。

証明: 置換 (abc) は対角線 d を軸に $2\pi/3$ 回転する操作に対応する。定理 2.3 により、 n -ルーク問題の解において 3 つある相対する立方体の面のペアの 1 つには $k + 1$ 個のルークが置かれ、他の 2 つのペアには k 個のルークが置かれる。対角線 d を軸に $2\pi/3$ 回転する操作によって、 $k + 1$ 個のルークが置かれたペアは k 個のルークが置かれたペアに移される。したがって、 n -ルーク問題のすべての解は置換 (abc) によって不変とはなりえない。□

補助定理 3.5 立方体上の n -ルーク問題 (n -クイーン問題) の解において、もし置くルーク (またはクイーン) の数が奇数であるならば、その解は置換 (ac) により不変ではない。

証明: n -ルーク問題の解が置換 (ac) により不変であると仮定する。置換 (ac) は辺 1-5 の中心と辺 3-7 の中心を結ぶ線を軸として π だけ回転する操作に対応する。このとき、面 1-2-6-5 と面 4-3-7-8 からなるペアに置かれるルークと、面 1-4-8-5 と面 2-3-6-7 からなるペアに置かれるルークは置換 (ac) により移り合うので、2 つのペアに置かれるルークの個数は同じである。よって、この 2 つのペアに置かれているルークの個数は $2s$ (s は自然数) と書ける。一方で、置換 (ac) により面 1-2-3-4 は面 5-6-7-8 に移されるので、置かれるルークの個数は同じでなければならない。よって、面 1-2-3-4 は面 5-6-7-8 からなるペアに置かれているルークの個数は $2t$ (t は自然数) と書ける。このとき、立方体表面上に全部で $2(s + t)$ 個のルークが置かれることになり、置かれているルークの個数が偶数でなければならない。したがって、置かれるルークの数が奇数であるならば、その解は置換 (ac) により不変ではない。クイーンについても同様の議論ができる。□

n -ルーク問題に関して、補助定理 3.3 から、 $n \geq 2$ であるならば $\psi((abcd)) = \psi((ab)(cd)) = 0$ となるので、式 (3) から同値でない解の個数は、

$$(1/24)(\psi(e) + 6\psi((ab)) + 8\psi((abc))) \quad (4)$$

と求められる。もし n が奇数のときは補助定理 3.4 により $\psi((abc)) = 0$ なので

$$(1/24)(\psi(e) + 6\psi((ab))) \quad (5)$$

と求められる。もし置かれるルークの個数が奇数であれば補助定理 3.5 により $\psi((ab)) = 0$ なので

$$(1/24)(\psi(e) + 8\psi((abc))) \quad (6)$$

と求められる。特に、 n が奇数でありかつもし置かれる

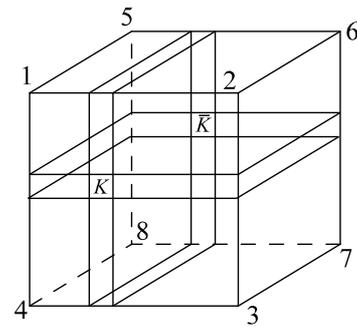


図 18 K と対点 \bar{K}
Fig. 18 K and opposite point \bar{K} .

ルークの個数が奇数であれば

$$(1/24)\psi(e) \quad (7)$$

となる。

n -クイーン問題に関して、補助定理 3.3 から、 $n \geq 2$ であるならば $\psi((abcd)) = \psi((ab)(cd)) = 0$ となるので、式 (3) から同値でない解の個数は、

$$(1/24)(\psi(e) + 6\psi((ab)) + 8\psi((abc))) \quad (8)$$

と求められる。もし置かれるクイーンの数 n が奇数であれば補助定理 3.5 により $\psi((ab)) = 0$ なので

$$(1/24)(\psi(e) + 8\psi((abc))) \quad (9)$$

と求めることができる。

立方体上の解の特性を利用して理論的に n -ルーク問題に関する $\psi(e)$ を導出することができる。面 1234 上のマス目 K に対して、面 5678 上にあるマス目で K に置かれたルークから縦と横の両方向から攻撃されるマス目を K の対点と定義し、 \bar{K} と書くことにする (図 18 参照)。同様にすべての面上のマス目 K に対して、 K の対点 \bar{K} を定義する。 K と対点 \bar{K} はルークを置くと利き筋が同一になる関係にあることから次の補助定理が成立する。

補助定理 3.6 立方体上の n -ルーク問題の解においてルークがマス目 K に置かれていたときに、そのルークを \bar{K} に移して得た配置も n -ルーク問題の解となる。□

立方体表面上に配置した m 個のルークをそれぞれ対点に移動するかそのまま動かさない方法は (何も動かさないことを含めて) 全部で 2^m 通りある。たとえば図 7 の E , A , C 面のみに最大個数のルーク (r 個と仮定する) を配置した n -ルーク問題の解の個数を l とする。 l 個の解それぞれに対して、 E , A , C 面に置かれている r 個のルークをそれぞれ対点に移動するかそのまま動かさないで得た配置も補助定理 3.6 より n -ルーク問題の解である。逆に、任意の解は適当にルークをその位置の対点に移動させると、すべてのルークを E , A , C 面上に移すことができる。したがって、すべてのルークを E , A , C 面上に配置した解をすべて求めると、それらから一般の解も導出できる。また、

全体の解の個数は 2^l となる. このことから, 立方体上の n -ルーク問題の解に対し, $\psi(e)$ の値 (本質的に同じものを重複して数えた解の個数) を以下のように計算できる.

定理 3.7 立方体上の n -ルーク問題の解に関して以下が成立する.

(1) $n = 2k$ (k は自然数) のとき,

$$\psi(e) = C(2k, k) \times P(2k, k) \times P(2k, k) \times P(k, k) \times 2^{3k}.$$

(2) $n = 2k + 1$ (k は自然数) のとき,

$$\psi(e) = 3 \times C(2k + 1, k + 1) \times P(2k + 1, k + 1) \times P(2k + 1, k) \times P(k + 1, k) \times 2^{3k+1}.$$

ここで, $C(n, r)$ と $P(n, r)$ はそれぞれ n 個の異なるものから r 個選ぶ組合せと順列の数を表す.

証明: (2) 定理 2.2 から, $3k + 1$ 個のルークが置かれる. 図 7 の E, A, C 面にすべてのルークが置かれていると仮定する. 定理 2.3 から, E, A, C 面の 1 つ (たとえば E 面) には $k + 1$ 個のルークが置かれ, 他の 2 つにはそれぞれ k 個のルークが置かれる. $k + 1$ 個のルークが置かれる面の選択は 3 通りである. E に $k + 1$ 個のルークを置くとして, その場合の数は $C(2k + 1, k + 1) \times P(2k + 1, k + 1)$ となる. 次に A 面にルークを置く場合の数は, E 面で置かれたルークから攻撃されない位置を選ぶので $P(2k + 1, k)$ となる. 最後に C 面では E, A 面で置かれたルークから攻撃されない位置を選ぶ方法となり $P(k + 1, k)$ となる. さらに補助定理 3.6 から E, A, C 面に置かれた $3k + 1$ 個のルークのいくつかを対点に移動させても解が得られるので 2^{3k+1} を掛けて上記の式を得る. (1) も同様に示すことができる. □

系 3.8 $n = 4m + 1$ (m は自然数) のとき, n -ルーク問題の同値でない解の個数は $C(4m + 1, 2m + 1) \times P(4m + 1, 2m + 1) \times P(4m + 1, 2m) \times P(2m + 1, 2m) \times 2^{6m-2}$ である.

証明: $n = 4m + 1$ であれば n は奇数であり, $k = 2m$ としたとき, 定理 2.2 から配置されるルークの個数は $3k + 1 = 3(2m) + 1$ となり奇数である. 式 (7) から, 同値でない解の個数は $(1/24)\psi(e)$ であり, 定理 3.7 (2) から, $(1/24) \times 3 \times C(4m + 1, 2m + 1) \times P(4m + 1, 2m + 1) \times P(4m + 1, 2m) \times P(2m + 1, 2m) \times 2^{6m+1}$ を得る. □

表 1 立方体上の n -ルーク問題の解の個数

Table 1 The number of n -rook solutions.

n	ルークの数	$\psi(e)$	$\psi((ab))$	$\psi((abc))$	解の個数
1	1	6	0	0	1
2	3	64	0	4	4
3	4	5,184	24	0	222
4	6	110,592	384	48	4,720
5	7	27,648,000	0	0	1,152,000
6	9	884,736,000	0	960	36,864,320

したがって, $n = 5, 9, 13, 17, \dots$ のときに限っては, n -ルーク問題の同値でない解の個数を理論的に求めることができる.

4. 計算機実験

立方体上の n -クイーン問題の解の個数を $n = 8$ まで, n -ルーク問題の解の個数を $n = 6$ まで求めた. 計算機実験には CPU : Intel Core i3 (3.06 GHz), OS : Mac OS X バージョン 10.6.8, メモリ : 8 GB 1,333 MHz DDR3, コンパイラ : GCC バージョン 4.4.3 を用いた.

4.1 立方体上の n -ルーク問題

実験により $\psi(e), \psi((ab)), \psi((abc))$ の値を計算式 (4), (5), (6) および (7) を用いて立方体上の n -ルーク問題の同値でない解の個数を求めた結果を表 1 に示す. 定理 3.7 において理論的に $\psi(e)$ を求めたが, この値が計算機実験で得られた $\psi(e)$ と一致することが確かめられた. 以下に実験プログラムを説明する.

計算機実験で使用したプログラムでは, (図 19 のように) 立方体上でお互いに相対しない 3 つの $n \times n$ の面を L 字型に展開し, この展開図において $\lfloor 3n/2 \rfloor$ 個のルークを置く配置を求め, 補助定理 3.6 を使って, それからすべての解を派生させ, その各々が正 8 面体群の作用によって不変であるかどうか調べ, $\psi(e), \psi((ab)), \psi((abc))$ の値を計算した.

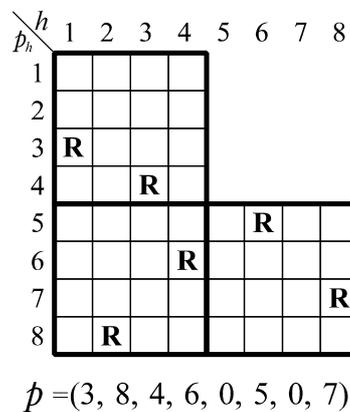


図 19 解の表現方法

Fig. 19 Representation of solutions.

本実験ではルークを配置する面を3つに制限した解の探索にバックトラック法を用いるため、ルークを置く位置をリストとして表す。L字型の展開図の最左列から各列に順々に多くて1個のルークを置いていく。 $2n > \lfloor 3n/2 \rfloor$ であるので、ルークが置かれぬ列も存在する。第1列から第*i*列までルークを置いたときにその配置をリスト (p_1, p_2, \dots, p_i) と表す。ここで、添え字は列番号、各要素の値はその列のルークの位置を表す (図19参照)。つまり、 p_j は第*j*列目の第 p_j 行にルークが置かれたことを表し、もし第*j*列にルークが置かれぬ場合は $p_j = 0$ とする。

定理2.3(1) から $n = 2k$ (k は自然数) のとき、L字型の展開図において第1列から第*n*列まではすべての列に必ずルークが置かれ、第*n*+1列から第2*n*列まではちょうど k 個のルークが置かれる。したがって、リスト (p_1, p_2, \dots, p_i) において、 $i \leq n$ ならば、 p_1, p_2, \dots, p_i はすべて0以外の値であり、 $i > n$ ならば、 p_1, p_2, \dots, p_n はすべて0以外の値であり、かつ、 $p_{n+1}, p_{n+2}, \dots, p_i$ には多くて k 個の0と多くて k 個の非零要素が含まれる。

一方で、定理2.3(2) から $n = 2k + 1$ (k は自然数) のとき、 n -ルーク問題の解は、L字型の展開図において第1列から第*n*列まではちょうど $n - 1$ 個または n 個のルークが置かれ、第*n*+1列から第2*n*列まではちょうど $k + 1$ 個または k 個のルークが置かれる。したがって、リスト (p_1, p_2, \dots, p_i) において、 $i \leq n$ ならば、 p_1, p_2, \dots, p_i には多くて1個の0が含まれ、 $i > n$ ならば、 p_1, p_2, \dots, p_n には多くて1個の0が含まれ、かつ、 $p_{n+1}, p_{n+2}, \dots, p_i$ には多くて $k + 1$ 個の0と多くて $k + 1$ 個の非零要素が含まれる。これらの条件は解の探索時につねに検査される。

次にリスト (p_1, p_2, \dots, p_i) に加えて、第*i*+1列の第 p_{i+1} 行目にルークを置くことができるかどうか調べる。 $i + 1 \leq n$ ならば第*i*+1列の第1行目から、 $i + 1 \geq n + 1$ ならば第*i*+1列の第*n*+1行目から、各行にルークを置くこと

ができるか順次判定していく。もし第 p_{i+1} 行に置くことができるならば、 p_{i+1} を加えてリスト $(p_1, p_2, \dots, p_i, p_{i+1})$ を得る。もしくは第*i*+1列にルークを置かない解のリスト $(p_1, p_2, \dots, p_i, 0)$ を得る。これは解の候補となり、さらに探索を続ける。こうして得たリストに対して、さらに第*i*+1列と同様に第*i*+2列以降へも値を与える。

リストに新しい要素を加えるたびに前述した検査を行い、現在のリストから解が導出される可能性があるか確認する。現在のリストが (p_1, p_2, \dots, p_i) で、もしこのリストが上記の条件を満たさない場合には、このリストから派生する解は存在しないので探索を終了し、次のリストの検査に移る、つまり、第*i*列の第 $p_i + 1$ 行にルークを置くことができるかどうか検査する。もし $p_i = 2n$ であるならば第*i*-1列の探索、つまり $(p_1, p_2, \dots, p_{i-1} + 1)$ に戻り探索を続ける。

以上の探索アルゴリズムにおいてリスト $(p_1, p_2, \dots, p_{2n})$ が解として見つかった場合には、これは $\lfloor 3n/2 \rfloor$ 個のルークがL字型の展開図に出現する n -ルーク問題の解である。

以上の探索を繰り返し、L字型の展開図に出現する n -ルーク問題のすべての解を発見する。解を発見するたびに補助定理3.6により、ルークを対点に移動して別解を派生させる。そして派生させた解それぞれが変換 (ab) と (abc) によって不変かどうか検査する。変換 (ab) により不変ならば $\psi((ab))$ の値を、変換 (abc) により不変ならば $\psi((abc))$ の値を1増やし、次の解の探索あるいは対点移動による別解の派生を行う。ただし n またはルークの個数により、適宜式(4)から(7)を利用し、計算に必要な変換による検査のみを行う。本実験プログラムでは、解そのもの(ルークの配置)をプログラムでは保持せず、 $\psi(e)$, $\psi((ab))$, $\psi((abc))$ の値のみを記録した。図20に以上の立方体上の n -ルーク問題の計算法のアルゴリズムを簡略化したものを示す。

各 n の計算に要した時間を表2に示す。計算時間は

```

while 解  $p \leftarrow$  バックトラック探索 do
   $m :=$  ルークの個数
  for  $i = 0$  to  $2^m - 1$  do { $2^m$  種類の解を派生させる}
     $q_i \leftarrow$  対点移動( $p, i$ ) {対点移動により  $p$  から  $i$  番目の解  $q_i$  をつくる}
     $q'_i \leftarrow$  変換  $(ab)(q_i)$  { $q_i$  を  $(ab)$  で変換し  $q'_i$  をつくる}
    if  $q_i = q'_i$  then {変換  $(ab)$  により不変ならば}
       $\psi((ab)) \leftarrow \psi((ab)) + 1$  { $\psi((ab))$  の値を1増やす}
    end if
     $q'_i \leftarrow$  変換  $(abc)(q_i)$ 
    if  $q_i = q'_i$  then
       $\psi((abc)) \leftarrow \psi((abc)) + 1$ 
    end if
  end for
end while
    
```

図20 立方体上の n -ルーク問題の計算法
Fig. 20 Algorithm of n -rook-problem on cubes.

表 3 立方体上の n -クイーン問題の解の個数
Table 3 The number of n -queen solutions.

n	クイーンの数	$\psi((e))$	$\psi((ab))$	$\psi((abc))$	解の個数
1	1	6	0	0	1
2	3	16	0	4	2
3	4	816	8	0	36
4	6	1,536	40	0	74
5	7	279,648	0	0	11,652
6	9	679,200	0	0	28,300
7	10	252,520,080	3,736	0	10,522,604
8	12	719,751,840	10,832	0	29,992,368

表 2 n -ルーク問題と n -クイーン問題の計算時間
Table 2 Run times of n -rook and n -queen problems.

n	計算時間	
	n -ルーク問題	n -クイーン問題
3	0.002 秒	0.002 秒
4	0.053 秒	0.022 秒
5	0.934 秒	3.107 秒
6	9 分 33.263 秒	35.271 秒
7	—	3 時間 16 分 14.487 秒
8	—	45 時間 46 分 10.185 秒

Linux の time コマンドにより各 1 回計測した。

4.2 立方体上の n -クイーン問題

立方体上の n -クイーン問題の同値でない解の個数を求めた結果を表 3 に示す。1 辺が n の立方体上で互いに攻撃しないように置ける最大のルークの数は定理 2.2 で与えられた。 n -クイーン問題の解は n -ルーク問題の解でもあるので定理 2.2 より、置くことができるクイーンの最大個数は $\lfloor 3n/2 \rfloor$ 以下であるが、その値は理論的には分かっていない。計算機実験により、1 辺が $n \leq 8$ の立方体上に関しては、互いに攻撃しないように置けるクイーンの最大個数は互いに攻撃しないようににおけるルークの最大個数と同じであることが確かめられた。

マス目 K と対点 \bar{K} に置かれたクイーンの斜め方向の利き筋は異なるため、 n -ルーク問題の解の導出に関する補助定理 3.6 の類似はクイーンの場合には成り立たない。よってルーク問題と同じ方法を用いることはできないが、立方体上の n -クイーン問題の解は必ず n -ルーク問題の解になっていることを利用し解を探索する。前述した n -ルーク問題の探索方法により n -ルーク問題の解を発見するたびに、見つけた解が n -クイーン問題の解となっているかを検証し、解を得て解の個数を計算する。したがって、 n -ルーク問題の解と n -クイーン問題の解は同一のプログラムで得ることが可能である。また n -クイーン問題の解のみを得るには、クイーン問題の解であることが確定した場合に変換 (ab) と (abc) によって不変かどうか検査する。表 2 には n -クイーン問題の解のみを得たときの計算時間を各 1 回計測した結

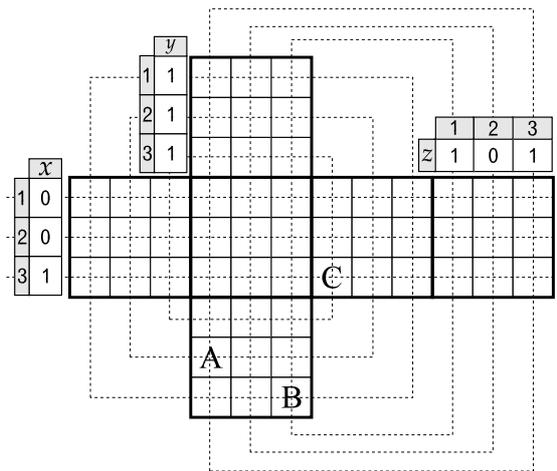


図 21 各マス目の関係
Fig. 21 Relation of each squares.

果を示す。

また、 $n = 9$ の n -クイーン問題も実験を行ったが、1 週間程度の時間を要しても計算は終了しなかった。これまでの計算結果と計算時間から $n = 9$ の場合は計算が実用時間で終わらないことが予想される。

本実験で使用したクイーンどうしが攻撃しないかどうかの検証方法を図 21 を用いて説明しよう。図 21 は $n = 3$ の立方体の各マス目の関係を表したものである。ある列(あるいは行)のクイーンの存在の有無を表す表を x, y, z , 各要素を $x[1], x[2]$ と表すとす。この表の要素が 1 であれば、その列(行)の直線上にはクイーンが存在し、0 であれば存在しない。また、図 21 では図示していないが斜め方向にも同様の表が存在することに注意してほしい。この場合も斜め方向にクイーンが存在すれば 1 となる。初期状態では表のすべての要素が 0 である。

たとえば図 21 の A の位置にクイーンを置いた場合は $y[2], z[3]$, および斜め 2 方向が 1 となる。B の位置に置いた場合は $y[1], z[1]$, および斜め 2 方向が 1 となり、C の位置にも置いたとする(図 21 の状態になる)。クイーンを置くことができるのは各マス目に対応している表の要素がすべて 0 であるときのみであるから、置こうとしているマス目に対応した表の要素を参照し、クイーンを置くことがで

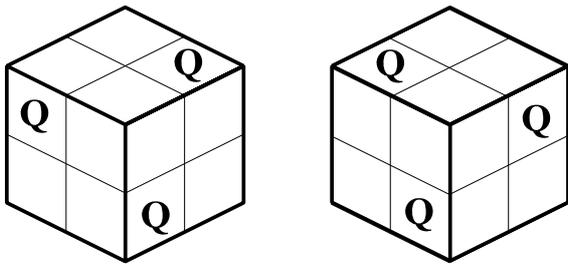


図 22 2-クイーン問題の解
Fig. 22 2-queen-problem solutions.

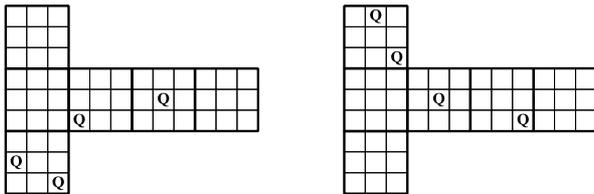


図 23 3-クイーン問題の解
Fig. 23 3-queen-problem solutions.

きるか確かめる. 実際のプログラムでは n -ルーク問題の解の中から n -クイーン問題の解を探すため, 縦・横方向の判定はルーク問題の探索時に行い, クイーン問題の探索時には斜め方向の判定のみを行っている.

図 22 と図 23 に 2-クイーン問題と 3-クイーン問題の解の一部を例示する.

5. まとめ

2次元チェス盤上の n -ルーク問題と n -クイーン問題を, 立方体上に拡張し, その解の理論的な特性を求めた. さらに, 計算機実験により, 立方体上の n -クイーン問題の解の個数を $n = 8$ まで, n -ルーク問題の解の個数を $n = 6$ まで得た. 今後の課題はさらに大きい n に対して解の個数を計算することである. 立方体上の n -ルーク問題と n -クイーン問題は n の拡大により, 解の個数が増え, 探索空間が大きく広がる. そのため, より大きい n に対して解を求めるためには本論文の実験で行った以上の計算の工夫が必要となる. 2次元チェス盤上の n -クイーン問題で行われているように, 初期のクイーンの位置によって処理を分割し, 部分的な解を求める並列処理が考えられる. 今後は並列処理を実現し, さらに大きい n に対する解を求めたい.

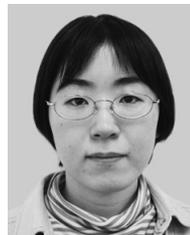
立方体上でのクイーンの動きを本論文では面の対角線上にある場合は図 3 に示したように定めたが, それ以外の動きを定義することも可能である. 本論文とは違う動きに定義した場合の解についても今後の課題である.

また, 1 辺が n の立方体上に互いに攻撃しないように配置できるクイーンの最大個数は本論文では $n \leq 8$ まではルークと同様であることを実験により確認した. 今後は $n > 8$ でもクイーンの最大個数がルークの最大個数と一致するかを確かめ, 理論的な証明を試みる.

匿名の査読者から貴重なコメントを多数ご教示いただき, 本論文の改善に大きく役立った. この場で感謝する. また, 秋田大学工学資源学研究所高谷真弓氏には計算機の整備等で支援をいただいた. 感謝したい.

参考文献

- [1] Rivin, I., Vardi, I. and Zimmerman, P.: The n -Queens Problem, *The American Mathematical Monthly*, Vol.101, No.7, pp.629-639 (1994).
- [2] Hsiang, J., Hsu, D. and Shieh, Y.-P.: On the Hardness of Counting Problems of Complete Mappings, *Discrete Mathematics*, Vol.277, pp.87-100 (2004).
- [3] Sloane, N.: The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, available from (<http://oeis.org>) (accessed 2011-08-30).
- [4] Pólya, G.: *Über die "doppelt-periodischen" Lösungen des n -Damen-Problems*, MIT Press, Cambridge, London, Rota, G.-C. edition (1984).
- [5] Barr, J. and Rao, S.: The n -Queens Problem in Higher Dimensions, *Elemente der Mathematik*, Vol.61, No.4, pp.133-137 (2007).
- [6] 岡田章三: m 次元 n クイーン問題, 岐阜工業高等専門学校紀要, Vol.37, pp.13-16 (2002).
- [7] Burnside, W.: *Theory of Groups of Finite Order*, The University Press (1897).
- [8] Grove, L.: *Algebra*, Academic Press (1983).
- [9] Liu, C.L.: *Introduction to Combinatorial Mathematics*, McGraw-Hill (1958).



藤原 美早紀 (正会員)

平成 2 年生. 平成 24 年秋田大学工学資源学部情報工学科卒業. 同年株式会社アキタ電子システムズに入社. パズルゲーム, 競技プログラミングに興味を持つ. 情報処理学会第 74 回全国大会学生奨励賞受賞.



山村 明弘 (正会員)

1996 年 University of Nebraska-Lincoln 博士課程修了. 1997 年より通信・放送機構招へい研究員. 1999 年より郵政省通信総合研究所主任研究官. 2004 年より情報通信研究機構セキュリティ基盤グループグループリーダー. 2008 年より秋田大学工学資源学部教授. 現在, 秋田大学大学院工学資源学研究所教授. Ph.D. (数学). 情報セキュリティ, 暗号・認証技術, 理論的計算機科学, 代数学に興味を持つ. 電子情報通信学会, ACM, American Mathematical Society 各会員.