

石取りゲームの変種であるチョコレートゲーム

宮寺 良平¹ 井上 泰志¹ 小笠 航¹ 中村 駿佑^{1,a)}

受付日 2011年8月30日, 採録日 2012年3月2日

概要: 石取りゲームの変種であるチョコレートゲームについて, 3方向の切断可能なチョコレートの段数を表す3つの座標 $\{x, y, z\}$ が不等式 $3y \leq x + z$ を満たす場合を研究し, 座標 $\{x, y, z\}$ を持つポジション (チョコレート) が後手必勝であるための必要十分条件は, x, y, z の排他的論理和が0であることを証明することができた. また後手必勝ポジション (P-position) の座標の集合が, 立体的なシュルピンスキー図形を作り出すことを見つめることができた. この後手必勝ポジションの法則は伝統的な石取りゲームの場合とよく似ているが, 証明方法はかなり異なる. また, 類似のチョコレートゲームにおいて, 座標が $ky \leq x + z$ で k が偶数の場合に関しては, 後手必勝ポジションの座標の持つ性質はまったく分かっていない. 本論文で扱うような, 不等式を満たすチョコレートゲームは, 組合せゲームの研究では新しいものである.

キーワード: 石取りゲームの変種, チョコレートゲーム, 後手必勝ポジション, シュルピンスキー図形

Chocolate Games that are Variants of a Game of Nim

RYOHEI MIYADERA¹ TAISHI INOUE¹ WATARU OGASA¹ SHUNSUKE NAKAMURA^{1,a)}

Received: August 30, 2011, Accepted: March 2, 2012

Abstract: Chocolate games that are variants of a game of Nim are studied in this article. You can cut these chocolates in 3 directions. When you can cut this chocolate x, y, z times in each directions respectively, we represent the chocolates with 3 non-negative integers $\{x, y, z\}$. It is easy to see that x, y, z satisfy the inequality $3y \leq x + z$. The authors proved that $\{x, y, z\}$ is a previous player's winning position (P-position) if and only if the exclusive disjunction of x, y, z is 0. They also discovered that the set of P-positions forms a three dimensional Sierpinski Gasket. The condition for the P-position is very similar to that of the traditional game of nim, but the method used in the proof is very different from the method used in nim. They also studied chocolates that satisfy inequalities $ky \leq x + z$ for an even number k , but they could not find any formula for P-positions. The chocolate games that satisfy inequalities are new theme in the research of combinatorial games.

Keywords: Variants of a game of Nim, Chocolate games, previous player's winning position, Sierpinski Gasket

1. チョコレートゲームについて

本論文では石取りゲームの変種であるチョコレートゲームについて研究する. 石取りゲーム全般については触れない. 用語の定義もチョコレートゲームに限定する. 石取りゲームについては, 一松 [4], 山崎 [7], 秋山ら [8]などを参考にしてほしい.

チョコレートゲームは実際にプレーして見ると分かりやすい. Canada Wide Virtual Science Fair [13]のホームページに, 著者によるチョコレートゲームのJavaアプレットが掲載されており, Wolfram demonstration project [12]も, 著者によるチョコレートゲームである.

これからチョコレートゲームを定義していく. なお, 以下のゲームの定義は具体的な図形と組み合わせることで使うことにする. 本論文においては, 図 1.1, 図 1.5, 図 2.1のチョコレートを念頭において読んでいただきたい.

¹ 関西学院
Kwansei Gakuin, Nishinomiya, Hyogo 662-8501, Japan
a) runners@kwansei.ac.jp

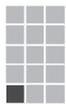


図 1.1 5×3
Fig. 1.1 5×3 .



図 1.2 5×2
Fig. 1.2 5×2 .



図 1.3 4×3
Fig. 1.3 4×3 .



図 1.4 3×3
Fig. 1.4 3×3 .



図 1.5 $\{3, 6, 2\}$
Fig. 1.5 $\{3, 6, 2\}$.



図 1.6 $\{1, 6, 2\}$
Fig. 1.6 $\{1, 6, 2\}$.



図 1.7 $\{3, 6, 0\}$
Fig. 1.7 $\{3, 6, 0\}$.



図 1.8 $\{3, 5, 2\}$
Fig. 1.8 $\{3, 5, 2\}$.

定義 1.1. 薄いグレーの部分は甘く、濃いグレーの部分は苦くて食べることができないチョコレートがある。このチョコレートを2人のプレイヤーが交互に、切り取り線に沿って2つに割り、濃いグレーの部分を含む方を残して、薄いグレーだけの部分を食べる。その結果として食べた部分は消去される。最後に苦い部分を残されたプレイヤーが負けである。

例 1.1. 図 1.1 のチョコレートを考える。縦と横のブロックの数を使って 5×3 のチョコレートと呼ぶことにする。切り取り線は、白い部分で、縦か横に切ることができる。切るとチョコレートの図形が2つのパートに分割されるが、左下の濃いグレーの部分を含んだ部分はそのままにして、もう一方の部分は食べてしまう。結果として、縦に切るとすれば、 $5 \times y$ ($1 \leq y < 3$) となる。例の1つとしては図 1.2。横に切るとすれば $x \times 3$ ($1 \leq x < 5$) となり、例としては図 1.3, 図 1.4 などがある。このチョコレートゲームのプレーを続けていくときに現れるチョコレートの形は $x \times y$ ($1 \leq x < 5, 1 \leq y < 3$) となる。

図 1.1 にある、 5×3 のチョコレートを使ってゲームをするとき、先手と後手のどちらが有利であるかを考える。実はあなたが先手でプレーすれば勝つことができる。方法は簡単である。チョコの形を 3×3 の図 1.4 とすればよい。ここから相手は $x \times 3$ ($1 \leq x < 3$) か $3 \times y$ ($1 \leq y < 3$) に移る。そうすればあなたは $x \times x$ ($1 \leq x < 3$) か $y \times y$ ($1 \leq y < 3$) に移ればよい。すなわち相手がどのようにプレーしても、あなたは縦と横のブロック数を同じに保ち続けたら、最終的に 1×1 のチョコの状態にして、相手に苦くて食べられない部分を残して勝てる。

注意 1.1. 定義 1.1 においては、最後に苦くないチョコを割って食べた者が勝つ。苦いチョコを残されたものは食べることができない。最後に食べた者が勝つので、ゲーム理論では正規形ゲームと呼ばれるものである

次にもう1つのチョコレート問題を紹介する。これもよく知られているものだが、チョコレートの座標という概念を理解していただくには良い例である。これ以降において、 $Z_{\geq 0}$ を非負整数全体の集合とする。

例 1.2. 図 1.5 のチョコレートを考える。例 1.1 のチョコ

のように $n \times m$ と表すことはしないで、別の方法を使う。苦い部分の左側に3列、上方に6段、右側2列チョコのブロックがあるので、 $\{3, 6, 2\}$ をこのチョコレートの座標と呼ぶことにする。表現を変えると、右側を最大3回、上方を最大6回、左側を最大2回切ることができる。最大という表現をもう少し詳しく説明すると、右側の3列を1度に切ってしまうとそれで終わりだが、1度に1列ずつ切っていくと最大3回切れるということができる。ここで、ブロックの数を数えるときに、濃いグレーの苦い部分は数えていない。切り取り線は、白い部分で、水平か垂直に切り、チョコレートの図形が2つのパートに分割されるが、濃いグレーの部分を含んだ部分はそのままにして、もう一方の部分は食べて（消去して）しまう。濃いグレーの部分の左を縦に切るとすれば、 $\{x, 6, 2\}$ ($0 \leq x < 3$)、濃いグレー部分の右を縦に切るとすれば、 $\{3, 6, z\}$ ($0 \leq z < 2$)、濃いグレー部分の上を横に切るとすれば、 $\{3, y, 2\}$ ($0 \leq y < 6$) となる。切り方の例としては、図 1.6, 図 1.7, 図 1.8 のようになる。最初の形のチョコレートからプレーを続けていく場合、現れるチョコレートの形は $\{x, y, z\}$ ($0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 6, 0 \leq z \leq 2$) となる。図 1.5~図 1.8 において、チョコレートの形と座標を書く。

注意 1.2. 図 1.5 のチョコレートの必勝方法については、Robin [5], [6] にある。図 1.1, 図 1.5 のチョコレートは Robin [5], [6] によって Mathematical Gazette 誌の問題コーナーに提出された問題である。

2. 座標が不等式 $y \leq \lfloor (x+z)/3 \rfloor$ を満たすチョコレートゲーム

次に考えるのは、図 2.1 のチョコレートである。このチョコレートは右上から左下に向かう白線、底面に平行な白線、左上から右下に向かう白線に沿って切ることができる。

注意 2.1. 底面に平行な白線と他の平行線の関係を正確に定義すると次のようになる。左上から右下に向かう白線で、濃い色の苦いチョコレートの部分に接しているものを選ぶ。その線を底辺から左上に向けてたどっていくと、右上から左下に向かう白の平行線との交点と出会う。初めの交点（濃い色のチョコレートの三角形の頂点）から数えて

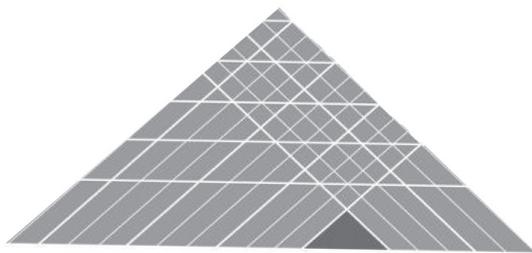


図 2.1 {10, 5, 5}
Fig. 2.1 {10, 5, 5}.

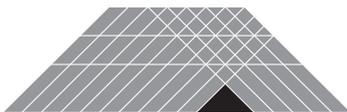


図 2.2 {10, 2, 5}
Fig. 2.2 {10, 2, 5}.



図 2.3 {5, 2, 2}
Fig. 2.3 {5, 2, 2}.

3 番目ごとの交点において、底辺と平行な白線が引かれている。なお、別のタイプのチョコレートの場合には、違ったルールに従って底辺に平行な白線を引くことがあるので注意していただきたい。

定義 2.1. このチョコレートの状態を表す座標を導入する。図 2.1 はチョコレートを右上から左下に向かう白線に沿って、最大 10 回、底面に平行な白線に沿って最大 5 回、左上から右下に向かう白線に沿って最大 5 回切ることができる。したがって座標は {10, 5, 5} とする。

本論文においては、このタイプのチョコレート問題を中心テーマとして扱うが、チョコレートの白線の構造は注意 2.1 に従うものとして、チョコレートの大きさに関しては任意の大きさを考える。

チョコレートの形と座標の例を図 2.2, 図 2.3 にあげる。

これらの図の例を見ると分かるように、これらの座標 $\{x, y, z\}$ は不等式 $3y \leq x + z$ を満たすが、この式は次の不等式と同値である。

$$y \leq \left\lfloor \frac{x+z}{3} \right\rfloor. \quad (1)$$

ここで $\lfloor \cdot \rfloor$ は小数点切り捨て関数である。次に関数 $move(\{x, y, z\})$ を定義する。これは $\{x, y, z\}$ の座標を持つチョコレートから一手で（直接）移ることができるチョコレートの座標の集合である。

定義 2.2. $move(\{x, y, z\})$ に属する座標は次の [1], [2], [3], [4], [5] の場合である。

[1] $\{u, y, z\}$ ただし、 $u < x$ かつ $y \leq \lfloor \frac{u+z}{3} \rfloor$.

[2] $\{u, v, z\}$ ただし $u < x$, $v < y$, $v = \lfloor \frac{u+z}{3} \rfloor$.

[3] $\{x, v, z\}$ ただし $v < y$.

[4] $\{x, y, w\}$ ただし $w < z$ かつ $y \leq \lfloor \frac{x+w}{3} \rfloor$.

[5] $\{x, v, w\}$ ただし、 $v < y$, $w < z$, $v = \lfloor \frac{x+w}{3} \rfloor$.

例 2.1. $move$ について具体的な例をあげて説明する。まず、定義 2.2 の [1], [4] は対称性を考えると、同じものであるので [4] だけを考える。[4] の例としては、図 2.2 から

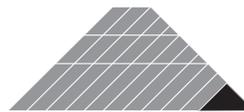


図 2.4 {10, 2, 0}
Fig. 2.4 {10, 2, 0}.

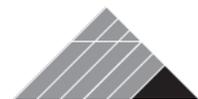


図 2.5 {5, 1, 0}
Fig. 2.5 {5, 1, 0}.

図 2.4 への移動がある。ここでは、3 番目の座標が 5 から 0 となるが、1, 2 番目の座標はそれによって影響を受けない。

[2], [5] は対称性を考えると同じものであるが、少し分かりにくいので両方とも例を使って説明する。[2] の例としては、図 2.4 から図 2.5 への移動がある。1 番目の座標を 10 から 5 へ減らすことで、2 番目の座標が影響を受けて 2 から 1 に減る。このようなことが起きることは、チョコレートの形を見れば理解できる。なお、ここで $1 = \lfloor \frac{5+0}{3} \rfloor$ となっている。

[5] の例としては、図 2.3 から図 2.5 への移動がある。3 番目の座標を 2 から 0 へ減らすことで、2 番目の座標が影響を受けて 2 から 1 に減る。このようなことが起きることは、チョコレートの形を見れば理解できる。なお、ここで $1 = \lfloor \frac{5+0}{3} \rfloor$ となっている。

[3] の例としては、図 2.1 から図 2.2 への移動がある。2 番目の座標は 5 から 2 へ減るが、そのことで他の座標が影響を受けることはない。

チョコレートゲームにおいては重要な 2 つのポジション（座標）がある。1 つは P-position (a previous-player-winning position) と呼ばれ、後手必勝ポジションである。もう 1 つは N-position (a next-player-winning position) と呼ばれ、先手必勝ポジションである。チョコレートゲームにおいて、最も重要なテーマの 1 つは P-position をすべて見つけることである。

組合せゲームにおいて重要な概念であるニム和を定義する。

定義 2.3. $x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし、2 進数表示して、 $x = \sum_{i=0}^n x_i 2^i$, $y = \sum_{i=0}^n y_i 2^i$ とする。なおここで $x_i, y_i \in \{0, 1\}$ とする。このときニム和 $x \oplus y$ を次のように定義する。

$$x \oplus y = \sum_{i=0}^n w_i 2^i. \quad (2)$$

ここで $w_i = x_i + y_i \pmod{2}$ とする。すなわち w_i は $x_i + y_i$ を 2 で割った余りである。

ニム和は計算機科学の分野では排他的論理和と呼ばれることが多い。

定義 2.4. $A_1 = \{\{x, y, z\}; x, y, z \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, y \leq \lfloor \frac{x+z}{3} \rfloor \text{ かつ } x \oplus y \oplus z = 0\}$, $B_1 = \{\{x, y, z\}; x, y, z \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, y \leq \lfloor \frac{x+z}{3} \rfloor \text{ かつ } x \oplus y \oplus z \neq 0\}$ とする。

定理 2.1. A_1 はチョコレートの P-position の集合で、 B_1 は N-position の集合である。

定理 2.1 は、4 章で証明する。

3. ニム和と不等式に関連したいくつかの定理

この章では $x, y, z \in Z_{\geq 0}$ に対して、 $\{x, y, z\} = \{0, 0, 0\}$ のときは、 $n = 0$ と決め、 $\{x, y, z\} \neq \{0, 0, 0\}$ のときは、 $n = \lfloor \log_2 \max(x, y, z) \rfloor$ と決めて、 $x = \sum_{i=0}^n x_i 2^i$, $y = \sum_{i=0}^n y_i 2^i$, $z = \sum_{i=0}^n z_i 2^i$ と 2 進数表示する。このように、複数の非負整数を扱うために 2 進数表示するときは、一番大きな数に合わせて n を決めておく。他の文字 a, b, c, p, q, r などを扱うときも同様にする。

補題 3.1. $\{x, y, z\} \in A_1$ を仮定すると、(a) または (b) が成り立つ。

(a) $x = y = z = 0$.

(b) $x, z \geq 1$.

証明. $\{x, y, z\} \in A_1$ と $x = 0$ を仮定する。すると $0 \oplus y \oplus z = 0$ から $y = z$ を得て、 $y \leq \lfloor \frac{x+z}{3} \rfloor$ を使うと $x = y = z = 0$ を得る。 $\{x, y, z\} \in A_1$ かつ $z = 0$ である場合も、同様に $x = y = z = 0$ を得る。したがって、 $x, y \geq 1$ であるか、あるいは $x = y = z = 0$ となる。

補題 3.2. $x \oplus y \oplus z = 0$ を仮定すると、 $i = 0, 1, 2, \dots, n$ に対して、 $x_i + z_i - y_i$ は 0 または 2 となり、 $y_i \leq x_i + z_i$ となる。したがって、 $y \leq x + z$ となる。

証明. 定義 2.3 から $i = 0, 1, 2, \dots, n$ に対して、 $x_i + y_i + z_i = 0$ または、2 となる。したがって、非負整数 x_i, y_i, z_i のうちの 2 つが 1 で、残りが 0 であるか、あるいは 3 つがすべて 0 であるかのどちらかである。このことから、 $x_i + z_i - y_i$ は 0 または、2 となり、 $y_i \leq x_i + z_i$ となる。したがって、 $y \leq x + z$ となる。

補題 3.3. $\{p, q, r\} \neq \{0, 0, 0\}$ を満たす $p, q, r \in Z_{\geq 0}$ に対して、この章の最初に書いたように n を決め、次の条件を仮定する。

$$p \oplus q \oplus r = 0. \tag{3}$$

このとき、次の (a) と (b) は同値である。

(a)

$$q \leq \left\lfloor \frac{p+r}{3} \right\rfloor. \tag{4}$$

(b)

$$p_n = r_n = 1 \text{ かつ } q_n = 0. \tag{5}$$

証明. (a) を仮定する。式 (3) により、 $p_n + q_n + r_n = 0 \pmod{2}$ が成り立つが、もし $q_n = 1$ とすると、 $p_n + r_n = 1$ となる。 $\lfloor \frac{p+r}{3} \rfloor = \lfloor \frac{\sum_{i=0}^n (p_i+r_i)2^i}{3} \rfloor \leq \lfloor \frac{2^n + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i}{3} \rfloor = \lfloor \frac{3 \times 2^n - 2}{3} \rfloor = 2^n - 1 < 2^n \leq q$ となり、(a) に反する。次に $q_n = 0$ とする。 $\{p, q, r\} \neq \{0, 0, 0\}$ と n の決め方により $p_n = r_n = 1$ となり (b) を得る。

(b) を仮定する。式 (3) により、 $p \oplus q \oplus r = 0$ となるが、こ

の場合 2 進数の 2^{n-1} の位までを考えてもニム和は 0 になるので、 $\sum_{i=0}^{n-1} p_i 2^i \oplus \sum_{i=0}^{n-1} q_i 2^i \oplus \sum_{i=0}^{n-1} r_i 2^i = 0$ となり、補題 3.2 により、 $q_n = 0$ を使うと、次の式を得る。

$$q = \sum_{i=0}^{n-1} q_i 2^i \leq \sum_{i=0}^{n-1} p_i 2^i + \sum_{i=0}^{n-1} r_i 2^i. \tag{6}$$

$p_n = r_n = 1$ であるから、

$$q = \sum_{i=0}^{n-1} p_i 2^i \leq 2^n - 1 < p_n 2^n, r_n 2^n. \tag{7}$$

式 (6) と (7) により、

$$3q < \sum_{i=0}^{n-1} p_i 2^i + \sum_{i=0}^{n-1} r_i 2^i + p_n 2^n + r_n 2^n = p + r \tag{8}$$

となり、(a) を満たす。

補題 3.4. $\{p, q, r\} \neq \{0, 0, 0\}$ を満たす $p, q, r \in Z_{\geq 0}$ に対して、この章の最初に書いたように n を決めるとき、次の (a) と (b) は同値である。

(a)

$$p \oplus q \oplus r = 0 \text{ かつ } q = \left\lfloor \frac{p+r}{3} \right\rfloor. \tag{9}$$

(b) $p_n = r_n = 1, q_n = 0$ かつ $0 \leq i < n$ を満たすような i に対して

$$r_i = 1 - p_i, q_i = 1. \tag{10}$$

注意 3.1. 任意の正数 $p \in Z_{\geq 0}$ に対して、補題 3.4 により、式 (9) を満たすような q, r が一意的に決まり、式 (10) を満たす。ただし n は p, q, r に対して、この章の最初で決めた数である。 $p = 0$ の場合は、式 (9) を満たす q, r は、 $q = r = 0$ しかない。なぜなら、 $p \oplus q \oplus r = 0$ によって、 $q = r$ となり、それを不等式に代入すると $q = r = 0$ となる。

証明. (a) を仮定する。補題 3.3 により、 $p_n = r_n = 1$ と $q_n = 0$ を得る。 $p \oplus q \oplus r = 0$ なので、 2^n の桁を除いてもニム和は 0 のままなので、 $\sum_{i=0}^{n-1} q_i 2^i \oplus \sum_{i=0}^{n-1} p_i 2^i \oplus \sum_{i=0}^{n-1} r_i 2^i = 0$ となり、補題 3.2 と $q_n = 0$ により、

$$q = \sum_{i=0}^{n-1} q_i 2^i \leq \sum_{i=0}^{n-1} p_i 2^i + \sum_{i=0}^{n-1} r_i 2^i \tag{11}$$

となる。 $0 \leq k < n$ を満たすような k があって、 $q_k = 0$ と仮定すると、

$$q = \sum_{i=0}^{n-1} q_i 2^i \leq 2^n - 1 - 2^k \leq p_n 2^n - 2, r_n 2^n - 2. \tag{12}$$

式 (11) と (12) により、 $3q \leq p + r - 4$ となり、 $q < \lfloor \frac{p+r}{3} \rfloor$ となって、式 (9) に反する。したがって、 $0 \leq i < n$ を満たすようなすべての i に対して、 $q_i = 1$ となる。したがって $p \oplus q \oplus r = 0$ により、 $0 \leq i < n$ を満たすような i に対して

$$r_i = 1 - p_i \tag{13}$$

が成り立つ。以上のことにより (b) が成り立つ。

逆に、(b) を仮定すると、 $p \oplus q \oplus r = 0$ は明らか。また $p + r = p_n 2^n + r_n 2^n + \sum_{i=0}^{n-1} (p_i + r_i) 2^i = 3 \times 2^n - 1$ かつ、 $q = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$ となり、 $q = \lfloor \frac{p+r}{3} \rfloor$ を得る。したがって (a) を得る。

補題 3.5. $\{a, b, c\} \neq \{0, 0, 0\}$ を満たす $a, b, c \in Z_{\geq 0}$ に対して、

$$a \oplus b \oplus c = 0 \text{ と } b = \lfloor \frac{a+c}{3} \rfloor \tag{14}$$

を仮定する。このとき下の [1], [2] が成立する。

[1] $d < b$ を満たす $d \in Z_{\geq 0}$ に対して、ある $e \in Z_{\geq 0}$ が存在して $a \oplus d \oplus e = 0$ かつ $d \leq \lfloor \frac{a+e}{3} \rfloor$ となる。

[2] ある $d, e \in Z_{\geq 0}$ が存在して $a \oplus d \oplus e = 0$ かつ $d < \lfloor \frac{a+e}{3} \rfloor$ となるならば、 $d < b$ が成り立つ。

証明. $\{a, b, c\} \neq \{0, 0, 0\}$ 、式 (14) と補題 3.4 により、 $a_n = c_n = 1, b_n = 0$ と $b_i = 1, c_i = 1 - a_i$ が $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ に対して成り立つ。なお、 n はこの章の最初のように決めている。ここまでの条件だけならば、 $n = 0$ の場合もありうるので、 $b = 0$ の可能性がある。しかし以下の [1], [2] の場合には $b > 0$ となる。

[1] $d < b$ とすると、ある $m \in Z_{\geq 0}$ が存在して、

$$d_n = b_n = 0, d_i = b_i \tag{15}$$

が $i = m+1, m+2, \dots, n-1$ に対して成り立ち、そして $d_m = 0 < 1 = b_m$ が成り立つ。このとき $e = \sum_{i=0}^n e_i 2^i$ を次のようにして定める。

$$i = m+1, m+2, \dots, n \text{ に対して } e_i = c_i \tag{16}$$

と決め、

$$i = 0, 1, \dots, m \text{ に対して } e_i = a_i + d_i \pmod{2} \tag{17}$$

と決める。まず式 (14), (15), (16) により、 $a_i + d_i + e_i = a_i + b_i + c_i = 0 \pmod{2}$ が $i = m+1, m+2, \dots, n$ に対して成り立ち、式 (17) により、 $a_i + d_i + e_i = 0 \pmod{2}$ が $i = 0, 1, 2, \dots, m$ に対して成り立つので、 $a \oplus d \oplus e = 0$ を得る。

次に d と $\lfloor \frac{a+e}{3} \rfloor$ の大きさを比較する。 $a_i + d_i + e_i = 0 \pmod{2}$ が $i = 0, 1, 2, \dots, n$ が成り立つことと $a_n = c_n = e_n = 1, d_n = 0$ により、補題 3.3 を使うと、 $3d \leq a + e$ を示すことができる。

[2] ある $d, e \in Z_{\geq 0}$ が存在して

$$a \oplus d \oplus e = 0 \text{ かつ } d < \lfloor \frac{a+e}{3} \rfloor \tag{18}$$

となるとすると、補題 3.3 により、 $a_n = e_n = 1, d_n = 0$ となる。ここでもし $d_i = 1$ が $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ に対して成り立つとすると、 $d = b$ となり、式 (14), (18) により、

$c = e$ となり、 $d = b = \lfloor \frac{a+c}{3} \rfloor = \lfloor \frac{a+e}{3} \rfloor$ となり、式 (18) に反する。したがって、ある $m \in Z_{\geq 0}$ があって、 $d_m \neq b_m = 1$ となる。したがって、 $d_m = 0$ であり、 $d < b$ 。

定理 3.1. $x \oplus y \oplus z \neq 0$ と $y \leq \lfloor \frac{x+z}{3} \rfloor$ を仮定する。このとき [1], [2], [3], [4], [5] のうちどれかが成立する。

[1] $u < x$ かつ $y \leq \lfloor \frac{u+z}{3} \rfloor$ を満たす $u \in Z_{\geq 0}$ が存在して $u \oplus y \oplus z = 0$ となる。

[2] $u < x, v < y$ かつ $v = \lfloor \frac{u+z}{3} \rfloor$ を満たす $u, v \in Z_{\geq 0}$ が存在して $u \oplus v \oplus z = 0$ となる。

[3] $v < y$ を満たす $v \in Z_{\geq 0}$ に対して $x \oplus v \oplus z = 0$ となる。

[4] $w < z$ かつ $y \leq \lfloor \frac{x+w}{3} \rfloor$ を満たす $w \in Z_{\geq 0}$ が存在して $x \oplus y \oplus w = 0$ となる。

[5] $v < y, w < z$ かつ $v = \lfloor \frac{x+w}{3} \rfloor$ を満たす $v, w \in Z_{\geq 0}$ が存在して $x \oplus v \oplus w = 0$ となる。

証明. $x \oplus y \oplus z \neq 0$ により、ある $m \in Z_{\geq 0}$ に対して、

$$x_i + y_i + z_i = 0 \pmod{2} \tag{19}$$

が $i = m+1, m+2, \dots, n$ に対して成り立ち、

$$x_m + y_m + z_m \neq 0 \pmod{2} \tag{20}$$

となることを仮定する。いくつかの場合に分けて証明する。
[i] $y_m = z_m = 0$ かつ $x_m = 1$ とする。 z に対して補題 3.4 と注意 3.1 により、

$$s \oplus t \oplus z = 0 \text{ かつ } t = \lfloor \frac{s+z}{3} \rfloor \tag{21}$$

を満たすような $s, t \in Z_{\geq 0}$ があある。

[a] もし $y < t$ とすると、補題 3.5 の [1] により、 $u \in Z_{\geq 0}$ があって、

$$u \oplus y \oplus z = 0 \text{ かつ } y \leq \lfloor \frac{u+z}{3} \rfloor \tag{22}$$

となる。補題 3.5 の [1] においては、第 1, 2 座標の a, d に対して第 3 座標の e が存在するが、ここでは第 2, 3 座標の y, z に対して第 1 座標の u が存在することを使っている。順序が変わると少し分かりにくいので注意しておく。ここで、 $u < x$ を示すことができれば、今証明している定理の [1] の場合に相当する。

[b] もし $y = t$ であれば $u = s$ とすると、式 (21) により、式 (22) が成り立つ。ただし不等号の部分は等号が成立する。

[a], [b] の場合について、 $u < x$ を示す。式 (19), (22) により、 $u_i = y_i + z_i = x_i$ が $i = m+1, m+2, \dots, n$ に対して成立し、式 (22) と [i] の仮定である $y_m = z_m = 0$ と $x_m = 1$ により、 $u_m = y_m + z_m = 0 \pmod{2}$ と $x_m = 1 > u_m$ を得る。したがって、 u と x を比べると、2 進数表示した場合に、 2^m の位では x が大きく、それより大きい位では 2 つの数は等しい。このことによって、 $u < x$ となる。

[c] もし $y > t$ ならば $\lfloor \frac{x+z}{3} \rfloor \geq y > t = \lfloor \frac{s+z}{3} \rfloor$ となり、 $x > s$ を得る。 $u = s$ と $v = t$ とおけば、 $u \oplus v \oplus z = 0$,

$v = \lfloor \frac{u+z}{3} \rfloor$, $u = s < x$ かつ $v = t < y$ となるので, $[c]$ は今証明している定理の [2] の場合に相当する.

[ii] $y_m = 1$ とする. 次のようにして v を決める. まず $i = m + 1, m + 2, \dots, n$ に対して, $v_i = y_i$ と決める. 次に $v_m = 0$ とし, $i = 0, 1, 2, \dots, m - 1$ に対して $v_i = x_i + z_i \pmod{2}$ とする. このように決めると明らかに $x \oplus v \oplus z = 0$ かつ $v < y$ となる. これは [3] の場合に相当する.

式 (20) により, [i] と [ii] 以外の場合としては, 次の [iii] しかない.

[iii] $x_m = y_m = 0$ かつ $z_m = 1$ とする. この場合は [i] と同様のやり方で証明することができる. この場合は今証明しようとしている定理の [4], [5] に相当する.

定理 3.2. $x \oplus y \oplus z = 0$ と $y \leq \lfloor \frac{x+z}{3} \rfloor$ を仮定する. このとき次の [1], [2], [3], [4], [5] が成り立つ.

[1] $u < x$ を満たす $u \in Z_{\geq 0}$ に対して $u \oplus y \oplus z \neq 0$ が成り立つ.

[2] $u < x$, $v < y$ かつ $v = \lfloor \frac{u+z}{3} \rfloor$ を満たす $u, v \in Z_{\geq 0}$ に対して $u \oplus v \oplus z \neq 0$ が成り立つ.

[3] $v < y$ を満たす $v \in Z_{\geq 0}$ に対して $x \oplus v \oplus z \neq 0$ が成り立つ.

[4] $w < z$ を満たす $w \in Z_{\geq 0}$ に対して $x \oplus y \oplus w \neq 0$ が成り立つ.

[5] $v < y$, $w < z$ かつ $v = \lfloor \frac{x+w}{3} \rfloor$ を満たす $v, w \in Z_{\geq 0}$ に $x \oplus v \oplus w \neq 0$ が成り立つ.

証明. ニム和が 0 の場合に, 1 つの数を変化させるとニム和が 0 でなくなることはニム和の基本性質であるから, [1], [3], [4] は明らかである.

次に [2] を示す. $u < x$, $v < y$ を満たす $u, v \in Z_{\geq 0}$ に対して $u \oplus v \oplus z = 0$ と $v = \lfloor \frac{u+z}{3} \rfloor$ を仮定する.

もし $y < \lfloor \frac{x+z}{3} \rfloor$ ならば, 補題 3.5 の [2] において, 使われている a, b, c, d, e のところに z, v, u, y, x を代入して使うと, $y < v$ を得て, $v < y$ に矛盾する.

もし $y = \lfloor \frac{x+z}{3} \rfloor$ ならば, 補題 3.4 と注意 3.1 により, u, v と x, y は z に対して一意に決まるので, $y = v$ となり, $v < y$ に矛盾する. したがって, $u \oplus v \oplus z \neq 0$ が成り立つ.

[5] は [2] と同様に証明することができる.

4. 定理 2.1 の証明

ここでは定理 2.1 の証明を行う.

A_1 に属する座標を持つチョコレートから出発すれば, どのような手を使っても 1 手で, 必ず B_1 に属する座標を持つチョコレートへ移ることを証明する.

定理 4.1. 任意の $\{x, y, z\} \in A_1$ に対して $move(\{x, y, z\}) \subset B_1$ となる.

証明. $\{x, y, z\} \in A_1$ とすると

$$x \oplus y \oplus z = 0 \tag{23}$$

かつ

$$y \leq \lfloor (x+z)/3 \rfloor \tag{24}$$

となる. $\{x, y, z\}$ から $\{p, q, r\} \in move(\{x, y, z\})$ へ移ったとして, $\{p, q, r\} \in B_1$ を証明する.

$move(\{x, y, z\})$ の定義 2.2 によれば, $\{x, y, z\}$ から直接移ることができるすべての場合に対して, 定理 3.2 の [1], [2], [3], [4], [5] をそれぞれ適用していくと, どの場合も $p \oplus q \oplus r \neq 0$ となる.

次に B_1 に属する座標を持つチョコレートから出発すれば, 正しい手を選ぶことによって, A_1 に属する座標を持つチョコレートへ移ることができることを証明する.

定理 4.2. 任意の $\{x, y, z\} \in B_1$ に対して, $move(\{x, y, z\}) \cap A_1 \neq \emptyset$ となる.

証明. $\{x, y, z\} \in B_1$ とする. すると,

$$x \oplus y \oplus z \neq 0 \tag{25}$$

かつ

$$y \leq \lfloor (x+z)/3 \rfloor \tag{26}$$

となる.

$\{p, q, r\}$ を定理 3.1 の [1], [2], [3], [4], [5] の場合の, $\{u, y, z\}$, $\{u, v, z\}$, $\{x, v, z\}$, $\{x, y, w\}$, $\{x, v, w\}$ とそれぞれ考えることによって, $p \oplus q \oplus r = 0$ となる. $move(\{x, y, z\})$ の定義 2.2 と定理 3.1 によればこれらは $\{p, q, r\} \in move\{x, y, z\}$ となっている.

定理 4.1 と 4.2 により, 定理 2.1 の証明を完成することができる.

今のチョコレートの状態が $\{x, y, z\} \in A_1$ とする. 私がこのチョコレートからゲームを始めると, 定理 4.1 により, どのような手を使っても B_1 に属する座標のチョコレートへ移る. 定理 4.2 により, 私の対戦相手はうまく選ぶことによって A_1 に属する座標を持つチョコレートへ移る. 私と対戦相手がプレーするたびにチョコレートの大きさが小さくなっていき, 私の対戦相手はつねに A_1 に移ることができて, 最終的に $\{0, 0, 0\} \in A_1$ に移り, 勝利する.

今のチョコレートの状態が $\{x, y, z\} \in B_1$ とする. 私がこのチョコレートからゲームを始めると, 定理 4.2 により, うまく選ぶと $\{x, y, z\} \in A_1$ となる. このような状態を続けながら, 最終的に私の番のときに $\{0, 0, 0\}$ へ移り, 勝利を収めることができる.

以上のことにより, A_1 は後手必勝ポジション (P-position) で, B_1 は先手必勝のポジション (N-position) である.

5. 後手必勝ポジションの座標とシュルピンスキー図形

例 5.1. ここで, $\{(x, y, z); x \leq 60, y \leq 30, z \leq 60\}$ の範囲で, チョコレートの P-position の集合を作り, 3D グラフを作ったところ, 図 5.1 となった. この図を回転させてみたところ, 図 5.2 のような図形を得た. これはシュルピンスキー図形に非常に似たものになった. この章の目的は, 実際にそれがシュルピンスキーの三角形になることを証明することである.

$$y \leq \left\lfloor \frac{x+z}{3} \right\rfloor \tag{27}$$

シュルピンスキー図形はよく知られている概念であるが, ここで扱うのは次の定義によるものとする. この定義は Fraenkel らによって [9] で与えられている.

定義 5.1. S を $Z_{\geq 0} \times Z_{\geq 0}$ の任意の部分集合とし, 任意の $n \in Z_{\geq 0}$ に対して, S^n を次のように定義する.

$$S^n = \{(x, y) \in S; x + y < 2^n\}.$$

また, 任意の $u, v \in Z_{\geq 0}$ に対して, $S^n_{(u,v)}$ を次のように定義する.

$$S^n_{(u,v)} = \{(x + u \cdot 2^n, y + v \cdot 2^n); (x, y) \in S^n\}.$$

定義 5.2. シュルピンスキー図形とは次の条件を満たすものとする.

- (1) $(0, 0) \in S$ となる. すなわち原点を含む.
- (2) 任意の $n \in Z_{\geq 0}$ に対して次の再帰関係が成立する.

$$S^{n+1} = S^n \cup S^n_{(1,0)} \cup S^n_{(0,1)}.$$

注意 5.1. ここで定義されている集合がシュルピンスキー図形という名前にふさわしいことを示すために, 後で例 5.2 でグラフを与える. 定義 5.2 は Fraenkel らの論文 [9] の Definition 1 と同値である. 本論文では, シュルピンスキー図形の定義をもう少し広げることにする.

定義 5.3. 集合 S がシュルピンスキー図形と相似な場合, または縦横の比率だけを変えた場合, その集合をシュルピンスキー図形と名付ける.

定義 5.4. 任意の $x, y \in Z_{\geq 0}$ を 2 進数表示して, $x =$

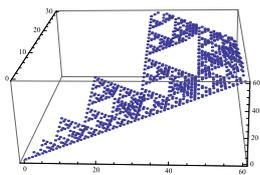


図 5.1 P-position の集合のグラフ

Fig. 5.1 The graph of P-positions.

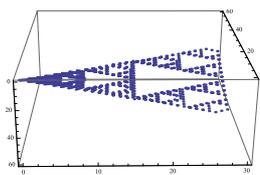


図 5.2 図 5.1 を回転させたもの

Fig. 5.2 A rotated version of Fig. 5.1.

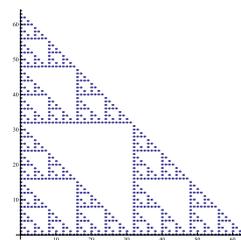


図 5.3 シュルピンスキー図形
Fig. 5.3 Sierpinski triangle.

$\sum_{i=0}^n x_i 2^i, y = \sum_{i=0}^n y_i 2^i$ とおく. ここで, $x_i, y_i \in \{0, 1\}$ とする. このとき, ニム積 $x \otimes y$ を次のように定義する.

$$x \otimes y = \sum_{i=0}^n w_i 2^i, \tag{28}$$

$$\text{ここで } w_i = \begin{cases} 1 & (x_i + y_i = 2 \text{ であるとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

定理 5.1. 集合 $\{(x, y); x \otimes y = 0\}$ はシュルピンスキー図形である.

この定理は, Fraenkel らの論文 [9] の Theorem 3 で与えられている. この論文において, q-sieve といわれているものは, $q = 2$ の場合にはシュルピンスキー図形である.

例 5.2. 定理 5.1 の例をあげる. 集合 $\{(x, y); x \otimes y = 0, 0 \leq x \leq 63 \text{ かつ } 0 \leq y \leq 63\}$ のグラフを作ると, 図 5.3 を得る. この形はシュルピンスキー図形という定義にふさわしい.

図 2.1 のチョコレートゲームの P-position の集合がシュルピンスキー図形を生成することを証明するが, そのためにはいくつかの定理と補題が必要である.

補題 5.1. $p, q \in Z_{\geq 0}$ が

$$p \otimes q = 0 \tag{29}$$

を満たすとき, $(p + q) \oplus p \oplus q = 0$ が成り立つ.

証明. $p, q \in Z_{\geq 0}$ が式 (29) を満たすとする. p, q を 2 進数表示して $p = \sum_{i=0}^m p_i 2^i, q = \sum_{i=0}^m q_i 2^i$ とする. ただし, 各 $i = 0, 1, \dots, m$ に対して, $p_i \in \{0, 1\}, q_i \in \{0, 1\}$ とする. 式 (29) と定義 5.4 により,

$$p_i + q_i = 0 \text{ あるいは } 1 \tag{30}$$

となるので, $p + q = \sum_{i=0}^m (p_i + q_i) 2^i$ が $p + q$ の 2 進数表示となる. 式 (30) により, 各 $i = 0, 1, 2, \dots, n$ に対して, $(p_i + q_i) + p_i + q_i = 2(p_i + q_i) = 0 \pmod{2}$ となる. したがって, ニム和の定義 2.3 により, $(p + q) \oplus p \oplus q = 0$ となる.

補題 5.2. $x, y, z \in Z_{\geq 0}$ が

$$x \oplus y \oplus z = 0 \tag{31}$$

を満たすと仮定すると, $\frac{y+x-z}{2} \otimes \frac{y-x+z}{2} = 0$ が成り立つ.

証明. $x, y, z \in Z_{\geq 0}$ が式 (31) を満たすとして, x, y を 2 進数で表して, $x = \sum_{i=0}^n x_i 2^i, y = \sum_{i=0}^n y_i 2^i$ とする. ここで $i = 0, 1, \dots, m$ に対して, $x_i \in \{0, 1\}$ かつ $y_i \in \{0, 1\}$ とする. 式 (31) と補題 3.2 により, $y_i + x_i - z_i, y_i - x_i + z_i$ は 0 または 2 となる. したがって, $\frac{y+x-z}{2}, \frac{y-x+z}{2}$ の 2 進数表示は $\sum_{i=0}^n \frac{y_i+x_i-z_i}{2} 2^i, \sum_{i=0}^n \frac{y_i-x_i+z_i}{2} 2^i$ となる. $\frac{y_i+x_i-z_i}{2} + \frac{y_i-x_i+z_i}{2} = y_i = 0, 1$ であるから, 定義 5.4 により $\frac{y+x-z}{2} \otimes \frac{y-x+z}{2} = 0$ となる.

定義 5.5. $C = \{(y, z-x); x, y, z \in Z_{\geq 0} \text{ かつ } x \oplus y \oplus z = 0\}$ と定義し, $D = \{(p, q); p \otimes q = 0\}$ と定義する.

注意 5.2. 定理 5.1 により, D はシュルピンスキー図形である.

補題 5.3. $D = \{(p, q); \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\}$ かつ $(s, t) \in C$.

証明. $(s, t) \in C$ とすると, ある $x, y, z \in Z_{\geq 0}$ があって, $s = y, t = z - x$ かつ $x \oplus y \oplus z = 0$ となる. $p = \frac{s-t}{2} = \frac{y-(z-x)}{2} = \frac{y+x-z}{2}$ かつ $q = \frac{s+t}{2} = \frac{y+(z-x)}{2} = \frac{y-x+z}{2}$ であるから, 補題 5.2 により $p \otimes q$ となる.

もし $p \otimes q$ であれば, 補題 5.1 により $(p+q) \oplus p \oplus q = 0$ となる. $x = p, y = p+q$ かつ $z = q$ とおくと, $x \oplus y \oplus z = 0$ となる.

$s = y$ かつ $t = z - x$ とおくと, $(s, t) \in C$ かつ $\frac{(s-t, s+t)}{2} = \frac{(y-z+x, y+z-x)}{2} = \frac{(2p, 2q)}{2} = (p, q)$ となる.

補題 5.4. C はシュルピンスキー図形である.

これは定義 5.3, 定義 5.5, 補題 5.3 と定理 5.1 を合わせて使うと, 明らかである.

補題 5.5. $\{(y, \frac{z-y}{2}); x \oplus y \oplus z = 0\}$ はシュルピンスキー図形である.

証明. ここで, R^2 から R^2 の上への関数 f を, $f((x, y)) = (x, \frac{y}{\sqrt{2}})$ によって定義する. すると, 定義 5.3 によれば, シュルピンスキー図形の縦横比だけを変えたものはシュルピンスキー図形と考えるので, 補題 5.4 によって, $f(C)$ がシュルピンスキー図形になることが分かる.

例 5.3. ここで集合 $\{(y, z-x); x, y, z \in Z_{\geq 0}, x \oplus y \oplus z = 0 \text{ かつ } x, y, z \leq 40\}$ と $\{(y, \frac{z-x}{\sqrt{2}}); x, y, z \in Z_{\geq 0}, x \oplus y \oplus z = 0 \text{ かつ } x, y, z \leq 40\}$ のグラフ (図 5.4, 図 5.5) を見ていただく. 縦横の比率だけが異なることに注意.

補題 5.6. 以下の 2 つの変換 (1) と (2) によって, 空間の

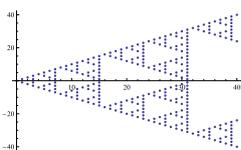


図 5.4 シュルピンスキー図形 1

Fig. 5.4 Sierpinski triangle 1.

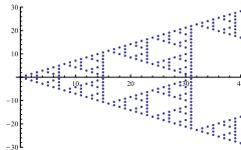


図 5.5 シュルピンスキー図形 2

Fig. 5.5 Sierpinski triangle 2.

点 (a, b, c) は平面上の点 $(b, \frac{c-a}{\sqrt{2}})$ へ移される.

(1) 第 2 座標軸の周りの角度 $\frac{\pi}{4}$ の回転 (あるいはベクトル $(0, 1, 0)$ の周りの回転といってもよい).

(2) 第 2, 3 座標軸で作られる平面上への射影.

証明. 回転行列 $\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & 0 & \sin \frac{\pi}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \frac{\pi}{4} & 0 & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ によって点 (a, b, c) は点

$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (\frac{a+c}{\sqrt{2}}, b, \frac{c-a}{\sqrt{2}})$ へ移る.

この点を第 2, 3 座標軸で作られる平面上へ射影すると, $(b, \frac{c-a}{\sqrt{2}})$ を得る.

定理 5.2. 不等式 $y \leq \lfloor \frac{x+z}{3} \rfloor$ を満たすチョコレートゲームの P-position の集合を, 補題 5.6 で与えられた変換で送ると, シュルピンスキー図形を得る.

証明. P-position の集合は $\{(x, y, z); x \oplus y \oplus z = 0\}$ である. この集合を, 補題 5.6 の変換で送ると, $\{(y, \frac{z-y}{2}); x \oplus y \oplus z = 0\}$ となり, それは補題 5.5 によりシュルピンスキー図形である.

6. 他のチョコレートゲーム, 逆形ゲーム

本論文で扱ったチョコレート問題と異なるタイプの問題について考える. 図 6.1, 図 6.2 のチョコレートは著者によって提案された. 図 6.2 については, 著者によって P-position が計算されて, その結果はオンラインのパズル雑誌である MathPuzzle の 2006 年 1 月分 [3] とセルビア国立数学研究所のオンライン雑誌 [10] において掲載された. しかし, P-position を表すような数学的な公式は見つかつ

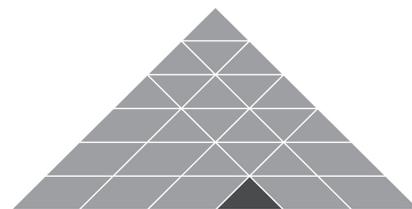


図 6.1 $y \leq x+z$

Fig. 6.1 $y \leq x+z$.

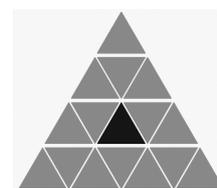


図 6.2 6 方向に切れるチョコレート

Fig. 6.2 A chocolate that can be cut in six directions.

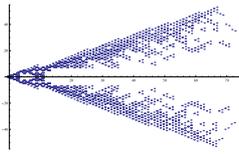


図 6.3 $2y \leq x + z$ を満たすゲームのグラフ

Fig. 6.3 A graph of the game that satisfies $2y \leq x + z$.

ていない。

図 6.1 のチョコレート座標は不等式 $y \leq x + z$ を満たしている。このチョコレート問題の切り方は、本論文の問題とはほぼ同じであり、研究は完成している。宮寺、井上ほかによってゲーム学会誌 [1] に掲載が決まっており、座標 $\{x, y, z\}$ を持つポジションが P-position であるための必要十分条件は、式 (32) と (33) である。

$$y \leq x + z. \tag{32}$$

$$x - 1 \oplus y \oplus z - 1 = 0. \tag{33}$$

補題 3.2 により、式 (33) から $y \leq (x - 1) + (z - 1)$ が導かれ、この不等式から式 (32) が導かれる。結果として図 6.1 のチョコレートの場合は、P-position の条件としては、不等式 (32) は必要でなく、式 (33) だけでよい。

それに対して、本論文での P-position の条件は式 (34)、(35) である。

$$3y \leq x + z. \tag{34}$$

$$x \oplus y \oplus z = 0. \tag{35}$$

補題 3.2 を用いても、式 (35) から導かれるのは $y \leq x + z$ であって、不等式 (34) を導くことはできない。このように本論文においては、不等式 (34) の条件が必須で、不等式による制限が P-position の条件に密接に関わってくる。このような理由で、本論文の証明方法と宮寺、井上ほかによるゲーム学会誌 [1] の証明方法は大きく異なる。

不等式 $ky \leq x + z$ を満たすチョコレートで、 k が奇数の場合には Miyadera ら [10] においてシュルピンスキー図形が得られており、P-position を表す式は $k = 3$ の場合に近いという予想ができ、著者らはその証明の完成を目指しているが、証明方法はゲーム学会誌 [1] で使われたものではなく、本論文で使われた方法を拡張することで実現しそうな見込みである。理由は上に述べたように、 $k > 1$ となると不等式の条件が必須になるためである。

k が偶数の場合に関しては P-position の特徴づけはまったく分かっていない。付録の数式処理ソフト Mathematica のプログラムによって、 $2y \leq x + z$ を満たすチョコレートゲームの P-position の集合を補題 5.6 と同じ変換で平面へ射影すると図 6.3 ができる。この図はシュルピンスキー図形とはまったく違う。前節で考察したシュルピンスキー図形とニム和の関係性を考えると、ニム和が 0 であるとか、それに近いような数式で P-position の集合を特徴づけること

は難しいという予想ができる。

チョコレートゲームのような組合せゲームと呼ばれる分野では、正規形ゲームと逆形ゲームを考える。正規形ゲームとは最後にプレーしたプレイヤーが勝つものである。本論文で扱ってきたチョコレートゲームでは、苦い部分を食べることができない。したがって、相手に苦い部分を残したプレイヤーが勝つ。座標で表現すると、 $\{0, 0, 0\}$ の状態にしたプレイヤーが勝つ。これは最後にプレーした者が勝つことであるから、正規形ゲームである。それに対して逆形ゲームとは、最後にプレーした者が負けるとするものである。チョコレートゲームの正規形と逆形には興味深い関係がある。それについては宮寺 [11] において発表する予定である。最後に本論文の研究に使った Mathematica のコードを書く。 $k = 2$ となっているが、 k の値を他の数に変えることで座標が不等式 $ky \leq x + z$ を満たすチョコレートゲームの P-position の座標を計算することができる。

参考文献

- [1] 宮寺良平, 小笠 航, 井上泰志, 中岡拓磨, 西村幸一朗: 石取りゲームの変種を用いた高校生による数学研究. ゲーム学会論文誌掲載予定.
- [2] 峰松大介, 内藤昌宗, 宮寺良平ほか: Combinatorial games - A Research Project by High School Students Using Computer Algebra Systems II, 京都大学数理解析研究所講究録, No.1666, pp.172-182 (2009).
- [3] Bitter Chocolate Problem, "Material added 8 Jan 06 (Happy New Year)", MathPuzzle.com (online), available from <http://www.mathpuzzle.com/26Feb2006.html> (accessed 2012-01-03).
- [4] 一松 信: 石とりゲームの数理, 森北出版, POD 版 (2003).
- [5] Robin, A.C.: A poisoned chocolate problem, Problem corner, *The Mathematical Gazette*, Vol.73, No.466, p.341 (1989).
- [6] Robin, A.C.: A poisoned chocolate problem, Problem corner, *The Mathematical Gazette*, Vol.74, No.468, p.171 (1990).
- [7] 山崎洋平: 組み合わせゲームの裏表, シュプリンガー・フェアラーク東京 (1989).
- [8] 秋山 仁, 中村義作: ゲームにひそむ数理—ゲームでみがこう!! 数学的センス, 森北出版 (1998).
- [9] Fraenkel, A. and Kontorovich, A.: The Sierpinski Sieve of Nim-varieties and Binomial Coefficients, Technical Report MCS05-05, Computer Science and Applied Mathematics, The Weizmann Institute of Science (online), available from <http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~fraenkel/Papers/sierpinski.pdf> (accessed 2011-01-03).
- [10] Miyadera, R., Naito, M., et al.: Combinatorial Games and Beautiful Graph produced by them, *Visual Mathematics Art and Science Electric Journal of ISIS-Symmetry*, Vol.11, No.3 (2009) (online), available from <http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/pap.htm> (accessed 2012-01-03).
- [11] 宮寺良平: The Relation between Normal Play Chocolate Games and Misere Play Chocolate Games that Satisfy Inequality $y \leq \lfloor \frac{x+z}{k} \rfloor$, 京都大学数理解析研究所講究録. (to appear).
- [12] Inoue, T., Nakaoka, T. and Miyadera, R.: A Bitter Chocolate Problem That Satisfies an Inequality, *The*

Wolfram Demonstrations Project (online), available from <http://demonstrations.wolfram.com/ABitterChocolateProblemThatSatisfiesAnInequality/> (accessed 2012-01-03).

- [13] Ogasa, W., Inoue, T., et al.: Combinatorial games, Canada Wide Virtual Science Fair 2011 (online), available from <http://www.virtualsciencefair.org/2010/inouxt2> (accessed 2012-01-03).

付 録

```
k=2;ss=75;al=Flatten[Table[{a,b,c},{a,0,ss},{b,0,ss},
{c, 0, ss}], 2];
allcases=Select[al,(1/k)(#[[1]]+#[[3]])>=#[[2]]&];
move[z_]:=Block[{p},p=z;
Union[Table[{t1,Min[Floor[(1/k)(t1+p[[3]])],p[[2]]],
p[[3]]},{t1,0,p[[1]]-1}],
Table[{p[[1]],t2,p[[3]]},{t2,0,p[[2]]-1}],
Table[{p[[1]],Min[Floor[(1/k)(t3+p[[1]])],p[[2]]},t3},
{t3,0,p[[3]]-1}]]];
Mex[L_]:=Min[Complement[Range[0,Length[L]],L]];
Gr[pos_]:=Gr[pos]=Mex[Map[Gr,move[pos]]];
pposition=Select[allcases,Gr[#]==0&];
```



宮寺 良平

関西学院高等部教諭。高校生や大学初年級の生徒を中心とした数学研究を行い、国内外の学術誌に論文を出し、内外の学会で発表している。2012年文部科学省から優秀教員表彰を受ける。

1981年関西学院大学理工学研究科博士課程前期修了。1981年から関西学院高等部教諭。1990年大阪市立大学から関数解析の研究により理学博士（論文博士）を受ける。2006年神戸大学から計算機を使った数学教育についての研究により博士号を受ける（早期修了の課程博士）。日本数学会，日本数式処理学会，ゲーム学会，日本折紙学会各会員。



井上 泰志

関西学院大学理工学部人間システム学科学学生。Institute of Technology, Undergraduate Math Journal において、2009年に2編、Proceeding of the Joint Conference of ASCM 2009 and MACIS 2009で論文を出版し、Visual Mathematicsで2009年に2編の論文を出版している。



小笠 航

関西学院大学理工学部人間システム学科学学生。日本折紙学会誌から2011年に論文を出版しており、2011年のWolfram Research User Conference等で小笠図形と呼ばれる、新しい折り紙図形を発表して好評であった。



中村 駿佑（学生会員）

関西学院高等部学生。日本折紙学会誌で、2011年に論文を出版し、Proceeding Of Computational Mathematics, Computational Geometry & Statistics, 2012において、論文を出版している。