

磁化プラズマにおける位相空間乱流の並列シミュレーション

龍野 智哉^{1,a)}

概要: 宇宙空間や実験室に見られる、磁化された完全電離プラズマのダイナミクスを位相空間でシミュレーションする数値コード AstroGK の並列化に関する概要と、近年行われた位相空間乱流に関するシミュレーション結果を概観した。

キーワード: プラズマ, 乱流, 位相空間, 連続体シミュレーション, AstroGK

Parallel simulation of phase-space turbulence in magnetized plasmas

TATSUNO, TOMOYA^{1,a)}

Abstract: This document summarizes the parallelization scheme of numerical code AstroGK which simulates the dynamics of fully-ionized, magnetized plasmas seen in space and laboratory; and recent simulation results made for phase-space turbulence.

Keywords: plasma, turbulence, phase space, continuum simulation, AstroGK

1. はじめに

宇宙空間や核融合実験装置において、プラズマは乱流状態で観測されることが多い。乱流は大スケールで注入されたエネルギーが非線形相互作用によって小スケールへと運搬され(カスケードと呼ぶ)、小スケールで効果的に働く散逸機構によって散逸される現象である。上に挙げたような環境におけるプラズマは衝突頻度が少ないため、粒子の平均自由行程より小さいスケールまで揺動が生成されていることが近年わかってきた [1], [2]。このような小スケールの散逸機構を理解するためには、いわゆる流体的な取り扱いでは不十分であり、Boltzmann 方程式などを用いて、位相空間における粒子の速度分布関数を追跡する必要がある。

通常の流体乱流では、流速や圧力などの巨視的物理量を位置 \mathbf{r} の関数として表し、Navier-Stokes 方程式などを用いて直接数値シミュレーションを行うことができる。一方、位相空間におけるプラズマ乱流の解析には、粒子の速度分布関数を、位置 \mathbf{r} に加え粒子速度 \mathbf{v} の関数として表

し、 (\mathbf{r}, \mathbf{v}) の 6 次元空間における発展を追跡する必要がある。そのため直接数値計算に必要なデータ量、計算量とも膨大になり、大型の並列計算が必須である。

本稿では、我々が行った最近の乱流計算について、数値コードの概要と計算の結果を簡単に紹介する。位置空間 \mathbf{r} の中で多数の粒子を動かす PIC などのシミュレーションもよく行われるが、ノイズが大きく散逸量を正確に計算するには不向きであるため、我々は速度空間 \mathbf{v} も位置空間 \mathbf{r} と同じようにグリッドに切った連続体シミュレーションを行う。

2. 計算モデル

位相空間のダイナミクスを追跡するには Boltzmann 方程式が有用であるが、そのままでは次元が高すぎ、また時間スケールも細かすぎるので、磁化プラズマの特徴を用いた簡約化を行う。磁場 \mathbf{B} によって磁化された荷電粒子は、もっとも速い時間スケールでは磁力線のまわりを旋回運動し、弱い電場 \mathbf{E} に対しては $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトという横滑り運動を示す。旋回運動とドリフト運動の時間スケールが大きく異なるとき、速い旋回運動について粒子の運動を平均

¹ 電気通信大学, University of Electro-Communications, 1-5-1 Chofugaoka, Chofu, Tokyo 182-8585, Japan

^{a)} tomo.tatsuno@uec.ac.jp

化することができる。こうして導出されたのがジャイロ運動論方程式 [3] である。

まず分布関数 f を

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = F_0(v) + \delta f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (1)$$

のように等方な平衡成分 F_0 と揺動成分 δf に分ける。ただし $v := |\mathbf{v}|$ である。次に、粒子の旋回運動 (ジャイロ運動) を平均化したリングの運動を追跡するために、粒子位置 \mathbf{r} に対するリングの中心位置 \mathbf{R} を

$$\mathbf{R} := \mathbf{r} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{e}_z}{\Omega} \quad (2)$$

と定義する [4]。ここで \mathbf{e}_z を z 方向の単位ベクトルとして磁場の方向を z 軸に取り ($\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$)、 $\Omega := qB/m$ は荷電粒子の磁力線まわりの旋回周波数、 q, m は粒子の電荷と質量を表す。(2) 式の第 2 項は粒子の位置から回転中心を指すベクトルであり、回転半径が粒子の磁力線に垂直な速度に比例していることを示している。

簡単のため静電的揺動に限ることとし、リングの位置 \mathbf{R} を固定した旋回角に関する摂動分布関数の平均 $g(\mathbf{R}, v_\perp, v_\parallel, t) := \langle \delta f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle_{\mathbf{R}}$ を導入すれば、Boltzmann 方程式を旋回平均したジャイロ運動論方程式は

$$\frac{\partial g}{\partial t} + v_\parallel \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{1}{B} \{ \langle \phi \rangle_{\mathbf{R}}, g \} = \langle C(h) \rangle_{\mathbf{R}} \quad (3)$$

と書ける。ただしここで $h(\mathbf{R}, v_\perp, v_\parallel, t) := \delta f + qF_0\phi/T_0$ 、 $\phi(\mathbf{r}, t)$ は静電ポテンシャル、 T_0 は平衡分布 F_0 に関する温度であり、 $\{ \phi, \psi \} := (\partial\phi/\partial x)(\partial\psi/\partial y) - (\partial\phi/\partial y)(\partial\psi/\partial x)$ は Poisson 括弧を表す。また $v_\parallel := \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z$ 、 $v_\perp := |\mathbf{v} - v_\parallel \mathbf{e}_z|$ とした。衝突項 $\langle C(h) \rangle_{\mathbf{R}}$ は、一般に分布関数 $h(\mathbf{R}, v_\perp, v_\parallel, t)$ に対する速度空間の微分と積分を含む [5]。

(3) 式にあらわれる ϕ は、各点においてプラズマが電荷的に中性であると近似する準中性条件*1

$$\sum_s q_s \delta n_s = \sum_s q_s \int \delta f_s d\mathbf{v} = 0 \quad (4)$$

から定められる。ここで添字の s は粒子種を示し、摂動密度は $\delta n_s(\mathbf{r}, t) := \int \delta f_s d\mathbf{v}$ から求められる。プラズマ中にはイオンと電子が存在し、その双方について (3) を用いることもできるが、これらの質量が大きく異なるため、ここでもスケール分離が良い近似で成り立つと考えれば、イオンの運動のみを考えることができる。その場合、電子は Boltzmann 応答、ゼロ応答など、状況に応じて何らかの応答を仮定することができ、電子密度 δn_e がポテンシャルの関数として与えられる。

*1 ポテンシャルがゼロでないにもかかわらず電荷中性であると主張することは奇異に感じられるかもしれないが、この近似を用いた解と、Poisson 方程式を解いた正しい解は多くの場合ほぼ変わらないことが知られている。逆に、Poisson 方程式を解くためには Debye 長という小さいスケール長を考慮に入れなければならないため、数値計算の負荷が大きくなる。

3. 並列数値計算コード AstroGK

我々は (3)-(4) の初期値問題を数値的に解く MPI 並列化 Fortran 95 コード AstroGK を開発した [6]。*2*3 AstroGK では、位置空間 \mathbf{r} や \mathbf{R} のうち磁力線に垂直な方向に周期境界条件を仮定し、Fourier 展開に基づく擬スペクトル法を用いている。速度空間には、求積法に基づく非等間隔グリッドでの積分と、数値的な保存を意識した差分公式を用いた。時間積分は、(3) 式第 2 項には 2 次の中心差分、非線形項は 3 次の Adams-Bashforth 公式、衝突項は Godunov スプリッティングと 1 次の陰的 Euler 公式を用いた。アルゴリズムの全体像は文献 [6] に譲ることとし、ここでは並列化について述べる。

3.1 分布関数のレイアウト

AstroGK では、次元の高い分布関数の配列をプロセスごとに分割する。*4 衝突作用素が v と $\xi := v_\parallel/v$ についての偏微分で記述されるので、時刻 t における分布関数 g の独立変数を (\mathbf{R}, v, ξ) とする。その上で $\sigma = \xi/|\xi|$ とし、基本レイアウト (`g_lo` と記す) における分布関数 g の配列を $(z, \sigma, \text{others})$ の 3 次元に分ける。すなわち、Fortran の慣習に従ってメモリ上で早く変化するインデックスから順に

$$\text{g_lo} : (z, \sigma, \text{others}) \quad (5)$$

とする。ここで `others` は $x, y, v, |\xi|$ をひとまとめたインデックスであり、この基本レイアウトは (3) 式左辺第 2 項と (4) における積分計算に用いられる。問題の性質によって必要な各計算の頻度が異なりうるため、`others` に含まれるインデックスの順序はユーザーが指定できるようになっている。ここではひとまず $(y, x, v, |\xi|)$ という順序でメモリに格納されているとする。*5 この場合分布関数は $|\xi|, v, \dots$ という順序で切り、各プロセスに振り分けられる。例えば各座標のグリッド数が $(N_y, N_x, N_v, N_{|\xi|}) = (32, 32, 32, 16)$ であり、プロセス数が 2 のとき ($N_{\text{proc}} = 2$)、2 つのプロセスはそれぞれ $(N_y, N_x, N_v, N_{|\xi|}) = (32, 32, 32, 8)$ 点の情報をもつ。また $N_{\text{proc}} = 32$ であれば、 $|\xi|$ で切り分けただけでは分割数がプロセス数に満たないため v でも切り、各プロセスはそれぞれ $(N_y, N_x, N_v, N_{|\xi|}) = (32, 32, 16, 1)$ 点の情報をもつ。

次に非線形項 [(3) 式中の Poisson 括弧] の計算では、Fourier 空間で微分を計算 (波数 \mathbf{k} の掛け算) して FFT を行う。この際、もし x, y グリッドのすべてが一つのプロ

*2 ここでは述べなかったが、AstroGK は電磁揺動のある問題を解くこともできる。

*3 Fortran 95 では標準規格外である関数ポインタを用いるため、一部 C 言語でも記述されている。

*4 静電ポテンシャルなど位置のみの関数は次元が小さいため、各プロセスで同じものを複製してもっている。

*5 実際、後に示す計算ではこの基本レイアウトを用いている。

セス上にある場合*6には2次元のFFTを行うことができるが、そうでない場合、 x, y 方向のグリッド1次元が一つのプロセスに乗るよう配置換えを行う。これらFFT用のレイアウトをそれぞれ

$$\text{xxf_lo} : (x, \text{others}) \quad (6)$$

$$\text{yxf_lo} : (y, \text{others}) \quad (7)$$

として、FFTW [7] を用いて1次元変換を行う。ここで others は、 xxf_lo では x 以外の変数を意味するが、これらその他の変数の中では、基本レイアウト (5) の順序を尊重し、 (z, y, v, ξ) などとするのが変換効率が良い。以下 yxf_lo や衝突におけるレイアウトでも同様である。

衝突項の計算では、 v や ξ に関する微分があらわれるため、これらの変数のインデックスが配列添字の最初にくるようなレイアウト

$$\text{e_lo} : (v, \text{others}) \quad (8)$$

$$\text{lz_lo} : (\xi, \text{others}) \quad (9)$$

を定義し、差分計算はローカルに行うことにする。このように、時間ステップを1ステップ進めるために、各項の計算のためにレイアウト変換を多数回行う必要がある。

3.2 レイアウト変換

前節で述べたレイアウト変換は、原理的には全プロセス同士のコミュニケーションが発生する可能性がある。ところがプロセス数や基本レイアウトによっては、コミュニケーションの数が限られる場合がある。例えば (5) の下に挙げた2つの例では、FFTのためのレイアウト変換は必要ない。衝突項の計算でも、 $N_{\text{proc}} = 2$ の場合には g_lo から e_lo への変換でコミュニケーションは発生せず、 $N_{\text{proc}} = 32$ の場合でも、プロセス0と1、2と3、というように隣り合うプロセスとのみコミュニケーションすれば良い。

グリッド数とプロセス数はシミュレーションが始まってから終わるまで変化しないため、開始時点で各レイアウトについて各々のプロセスが担当するグリッドは明らかである。従って、初期化の段階で各プロセスの担当グリッドについて表を作っておくことで、コミュニケーションを制御することができる。この初期化に多少の時間(大きいランでは10分程度)が掛かるが、毎回 all to all でコミュニケーションするよりも全体としては速いと考えられる。ただし、デッドロックが生じないよう、細やかな制御が必要となる。

4. シミュレーション結果

この節では、簡単にシミュレーション結果について紹介する [8], [9]。第1節で、乱流は大スケールで注入されたエ

*6 前の段落で述べた2つの例ではそうであり、FFTのためにレイアウト変換を行う必要がない。

ネルギーが非線形相互作用によって小スケールへと運搬され、小スケールで効果的に働く散逸機構によって散逸される現象であると述べた。(3)式は荷電粒子の平均自由行程よりも小さいスケールで成り立つ方程式であるが、散逸は右辺の衝突項で実現される。これまで何度か述べたように、この衝突項は速度空間における拡散型的作用素であり、従って散逸が効果的に起こるには速度空間に小さいスケールの構造を作る必要がある。

速度空間構造の生成は(3)式左辺の第2項、第3項によって引き起こされるが、それぞれの項の性質から、これらの現象は線形(第2項)、および非線形(第3項)位相混合と呼ばれる。線形位相混合とその散逸の様子については Watanabe らの報告がある [10]。ところが揺動の振幅が大きくなると、非線形項が線形項を超越し、(3)式第3項が重要になる。Poisson 括弧は、ジャイロ平均されたポテンシャル $\langle \varphi \rangle_{\mathbf{R}}$ による $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトを表すが、(2)式からわかるように回転半径が速度に比例するため、ジャイロ平均されたポテンシャルは粒子の磁力線に垂直な速度に依存する。すなわち $\varphi = \varphi(\mathbf{r}, t)$ であっても $\langle \varphi \rangle_{\mathbf{R}} = \langle \varphi \rangle_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}, v_{\perp}, t)$ と速度依存性が入る。この効果によって、非線形位相混合によって速度空間の構造が生成されるのである。

我々は磁力線方向に揺動の変化がない場合を考え [$\partial/\partial z = 0$ により (3)式左辺第2項は無視できる]、非線形位相混合による速度空間構造の生成を調べた。その結果、非線形位相混合のメカニズムより位置空間のカスケードに伴って速度空間にも構造が生成され、乱流カスケードは位置と速度空間が密接に絡み合って進む。この事実を用い、Navier-Stokes 乱流における Kolmogorov の理論 [11] を位相空間に拡張すると、磁化プラズマ中の乱流カスケードはエントロピーの位相空間カスケードと理解できることがわかった [8]。さらに、文献 [9] では非線形相互作用によるエネルギーの移送についても調べ、拡張された理論で用いた仮定がよく成立することを示した。

5. まとめと今後の展望

本稿では、宇宙空間や核融合実験装置などの磁化プラズマにおける低衝突ダイナミクスを位相空間において初期値問題として解くコード AstroGK について紹介し、一つの応用例として位相空間乱流のシミュレーション結果について示した。AstroGK は他にも太陽風 [12] や磁気リコネクション [13] などの問題にも用いられている。

AstroGK はすべて MPI で通信を行うが、近年一つのCPUに多数のコアが載せられるマシンが普及してきた。これらのコアがメモリを共有していれば、ノード内のレイアウト変換にはデータを移動する必要がないと考えられる。その点を考慮すれば更なる高速化が可能であるかもしれない。また、新世代計算資源として普及しつつあるGPUにあった高速計算の方法も探りたい。

謝辞 数値コードは M. Barnes, W. Dorland, G. G. Howes, 沼田龍介博士らと共同開発し, シミュレーション結果の解析は S. C. Cowley, G. G. Plunk, A. A. Schekochihin 博士らと共同研究を行ったものである. またシミュレーションには米国の大型計算機 Jaguar, Kraken, Ranger などを用いた. ここに謝意を表す.

参考文献

- [1] E. Mazzucato, D. R. Smith, R. E. Bell *et al.*, Phys. Rev. Lett. **101**, 075001 (2008); A. D. Gurchenko, E. Z. Gusakov, D. V. Kouprienko *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **53**, 035010 (2010).
- [2] S. D. Bale, P. J. Kellogg, F. S. Mozer *et al.*, Phys. Rev. Lett. **94**, 215002 (2005); F. Sahaoui, M. L. Goldstein, P. Robert *et al.*, Phys. Rev. Lett. **102**, 231102 (2009); O. Alexandrova, J. Saur, C. Lacombe *et al.*, Phys. Rev. Lett. **103**, 165003 (2009).
- [3] E. A. Frieman and L. Chen, Phys. Fluids **25**, 502 (1982); 洲鎌 英雄, プラズマ・核融合学会誌 **79**, 107 (2003); G. G. Howes, S. C. Cowley, W. Dorland *et al.*, Astrophys. J. **651**, 590 (2006); A. J. Brizard and T. S. Hahm, Rev. Mod. Phys. **79**, 421 (2007).
- [4] P. Catto, Plasma Phys., **20**, 719 (1978).
- [5] I. Abel, M. Barnes, S. C. Cowley *et al.*, Phys. Plasmas **15**, 122509 (2008); M. Barnes, I. Abel, W. Dorland *et al.*, Phys. Plasmas **17**, 072107 (2009).
- [6] R. Numata, G. G. Howes, T. Tatsuno *et al.*, J. Comput. Phys. **229**, 9347 (2010).
- [7] <http://www.fft.w.org/>. 現在のところ AstroGK では Version 2 を用いている.
- [8] T. Tatsuno, W. Dorland, A. A. Schekochihin *et al.*, Phys. Rev. Lett. **103**, 015003 (2009).
- [9] T. Tatsuno, M. Barnes, S. C. Cowley *et al.*, J. Plasma Fus. Res. SER. **9**, 509 (2010).
- [10] T.-H. Watanabe and H. Sugama, Phys. Plasmas **11**, 1476 (2004).
- [11] A. N. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk SSSR **30**, 299 (1941); *ibid.* **32**, 16 (1941) [Proc. Roy. Soc. London A **434**, 9 (1991); *ibid.* **434**, 15 (1991)].
- [12] G. G. Howes, J. M. TenBarge, W. Dorland *et al.*, Phys. Rev. Lett. **107**, 035004 (2011).
- [13] R. Numata, W. Dorland, G. G. Howes *et al.*, Phys. Plasmas **18**, 112106 (2011).

龍野 智哉

1972年生. 2002年京都大学博士(エネルギー科学). 1999年東京大学大学院新領域創成科学研究科助手, 2003年米国メリーランド大学研究員を経て2011年より現職. プラズマ・核融合学会, 米国物理学会 会員.