

大量印字品質評価法*

山崎 一生** 飯島 泰蔵**

Abstract

It is important to evaluate quantitatively the print quality not only for the valuation of OCR (optical character reader), but also for the development of reliable OCR. This paper deals with objective, mechanical, and efficient quantitative evaluation method of the printed images. The similarity which express the cosine of the angle formed by two pattern-vectors, is employed as the basis of the evaluation. The evaluation based upon the similarity demands the positioning and the coincidence of stroke-widths between an input pattern and the standard pattern, so that these two subjects have been discussed theoretically. Experiments on "model" data with artificial noise have also been described.

1. はしき

大量に印字されている文字データを客観的に評価することは、文字認識装置の性能評価を行なうためばかりでなく、より信頼性の高い文字認識装置を開発するためにも重要である。これまで、印字品質の評価は、多少の測定器具を使用するとしても、ヒトの勘に頼って行なわれていた。ISO*** から勧告案として出されている「光学文字認識用印字仕様規格」¹⁾ で述べられている印字品質の測定法は、あまりにも顕微鏡的で測定値の再現性が乏しく、実際上の適用においては実用的でないことはよく知られている²⁾。しかしながら、これにかわる方法は現在のところ存在しない。そこで、本論文では、大量の印字データを客観的、機械的かつ高速に評価する方式を検討することとしよう。

現実に印字されている文字図形は、白黒2値の図形ではなく、灰色のレベルをも有する濃淡図形であるが、文字図形は本来白黒2値であること、装置の簡単化の二つの点から、ここでは白黒2値の文字図形を取り扱うことにする。また、ある程度以上細かい格子点間隔で文字図形を標本化すれば、アナログな信号としてとらえなかったことによる情報の損失は防ぐことができ

* A Method for Print Quality Evaluation of a Large Number of Data, by Issei Yamasaki and Taizo Iijima (The Electro-Technical Laboratory)

** 電子技術総合研究所

*** International Organization for Standardization (国際標準化機構)

る³⁾。

2. 正規図形の定義

二次元 $x-y$ 平面の全領域を Ω とし、座標をベクトル \mathbf{r} で表示することにする。すなわち、

$$\mathbf{r} = ix + jy$$

ただし、 \mathbf{i} : x 方向の単位ベクトル
 \mathbf{j} : y 方向の単位ベクトル

いま、全領域 Ω には1個の文字図形 $\varphi(\mathbf{r})$ しか描かれていないものとし、 $\varphi(\mathbf{r})$ は白黒2値の図形であるとする、 $\varphi(\mathbf{r})$ は、

$$\varphi^2(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r})$$

を満足し、

$$\varphi(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0: (\text{白}) \\ 1: (\text{黒}) \end{cases}$$

である。また、この $\varphi(\mathbf{r})$ の重心 α は、

$$\alpha \equiv \frac{\iint_{\Omega} \mathbf{r} \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}{\iint_{\Omega} \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}} \quad (1)$$

で定義される。そこで、この重心 α を中心とする文字図形 $\varphi(\mathbf{r})$ を全部囲む領域 (文字わく) R を、図 2.1 に示すように考えることにすると、この領域 R は、

$$u(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0: \mathbf{r} \notin R \\ 1: \mathbf{r} \in R \end{cases}$$

なる関数 $u(\mathbf{r})$ によって表現される。記号 R を領域 R の面積値をも表わすものとすれば、

$$\iint_{\Omega} u(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \iint_R d\mathbf{r} = R \quad (2)$$

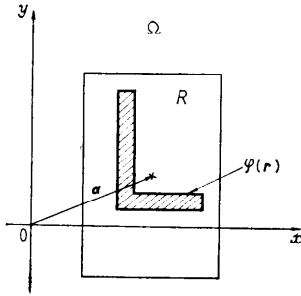


図 2.1 The region R defined by a pattern $\varphi(\mathbf{r})$

となり、領域 R の重心もまた、領域 R の定義によって文字図形 $\varphi(\mathbf{r})$ の重心 α と一致している、

$$\alpha \equiv \frac{\iint_{\Omega} \mathbf{r} u(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}{\iint_{\Omega} u(\mathbf{r}) d\mathbf{r}} = \frac{1}{R} \iint_R \mathbf{r} d\mathbf{r}$$

と書き表わせる。また、このように領域 R を定義すると式 (1) は、

$$\alpha = \frac{\iint_R \mathbf{r} \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}{\iint_R \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}$$

と書き替えられることになる。

そこで、文字図形 $\varphi(\mathbf{r})$ から平均濃度 K と強度 A とを、

$$\left\{ \begin{aligned} K &\equiv \frac{\iint_R \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}{\iint_R d\mathbf{r}} = \frac{1}{R} \iint_R \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (3) \\ A^2 &\equiv \frac{\iint_R \{\varphi(\mathbf{r}) - K\}^2 d\mathbf{r}}{\iint_R d\mathbf{r}} = K(1-K) \end{aligned} \right. \quad (4)$$

のように定義する。そして、濃度について正規化された文字図形を正規図形と名づけ、これを $\psi(\mathbf{r})$ と書くことにすれば、 $\psi(\mathbf{r})$ は、

$$\psi(\mathbf{r}) \equiv (1/A) \{\varphi(\mathbf{r}) - K\} \quad (5)$$

と書き表わされる。この関数 $\psi(\mathbf{r})$ は、

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{R} \iint_R \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} &= 0 \\ \frac{1}{R} \iint_R \mathbf{r} \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} &= 0 \\ \frac{1}{R} \iint_R \psi^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} &= 1 \end{aligned} \right. \quad (6)$$

を満足していることが容易に証明される⁴⁾。すなわち、正規図形 $\psi(\mathbf{r})$ は平均値、重心ともにゼロで、2乗平均値は1に正規化されていることになる。

3. 類似度による印字品質の評価

標準の文字図形と入力文字図形とを、前者を基準

にして比較する問題を考察することにしよう。

領域 R で与えられる任意の入力文字図形 $f(\mathbf{r})$ と、その標準文字図形 $f_0(\mathbf{r})$ との類似度 $S(f, f_0)$ は、

$$S(f, f_0) = (f, f_0) / (\|f\| \cdot \|f_0\|) \quad (7)$$

ただし、 $(,)$: 領域 R での内積
 $\| \cdot \| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$: ノルム

で定義される (以後標準文字に関する量には添字 0 をつけて、これを示すことにする)。

いま、標準と入力との平均濃度 K_0 と K とが、 $K = K_0$

を満足するときの両者の交叉率を γ とすれば、式 (7)

で定義した類似度 $S(f, f_0)$ は、

$$S(f, f_0) = \gamma \quad (8)$$

となる。一方、このときの $f_0(\mathbf{r})$, $f(\mathbf{r})$ をそれぞれ正規図形 $g_0(\mathbf{r})$, $g(\mathbf{r})$ に変換した後の類似度 $s(g, g_0)$ は、式 (2), (4), (6) を考慮すれば、

$$s(g, g_0) \equiv \frac{(g, g_0)}{\|g\| \cdot \|g_0\|} = \frac{\gamma - K}{1 - K} \quad (9)$$

となる。

式 (7) [(8)], (9) でそれぞれ与えられる類似度 $S(f, f_0)$, $s(g, g_0)$ は、入力文字図形と標準文字図形とが完全に一致したときに、最大値 1 をとる量である。

いま、入力の正規図形 $g(\mathbf{r})$ を、標準の正規図形 $g_0(\mathbf{r})$ 成分とこれに直交する成分 $E(\mathbf{r})$ とに分解すると、 $g(\mathbf{r})$ の $g_0(\mathbf{r})$ への射影は $s(g, g_0)$ となり、 $g(\mathbf{r})$ は、

$$g(\mathbf{r}) = s(g, g_0) g_0(\mathbf{r}) + E(\mathbf{r}) \quad (10)$$

と書き表わすことができる。したがって、この式から類似度 $s(g, g_0)$ は、入力の正規図形 $g(\mathbf{r})$ のなかに含まれる標準の正規図形 $g_0(\mathbf{r})$ の成分を表わし、 $E(\mathbf{r})$ は $g_0(\mathbf{r})$ 以外のノイズ成分を表わしていることがわかる。そこで、

$$\varepsilon^2 \equiv \|E\|^2 / R \quad (11)$$

とおけば、式 (6), (9) から、

$$\varepsilon^2 = 1 - s^2(g, g_0) \quad (12)$$

を得る。この ε^2 をノイズ成分と呼ぶことにする。

式 (12) で与えられるノイズ成分 ε^2 は、類似度をもとに定義された量である。ところで、類似度の低下をきたす原因には、入力と標準との相対位置のずれのほかに、標準・入力両文字図形の「骨格」が同じでも文字線幅が異なっていること、入力文字図形の線縁に凹凸があることの二つがある。類似度の低下をきたす後の二つの原因を区別して、ノイズ成分の値を信頼性の高いものとするためには、標準と入力との文字図形の線幅を一致させてやること、すなわち $K = K_0$ とし

てやることも、相対位置をよく一致させてやることのほかに重要となってくる。

4. 平均濃度一致時の類似度の推定

入力文字図形の平均濃度（白黒2値の文字図形を取り扱っているので文字線幅と同義）と一致するように、任意の線幅の標準文字を容易に発生することができればよいが、標準文字図形の発生にはかなりの時間を要する⁵⁾。そこで、数種類の線幅の標準文字図形をあらかじめ用意しておき、これらの用意されている標準文字図形と入力文字図形との類似度から、平均濃度が一致したときの類似度を推定する方法を考察することにしよう。

入力文字図形 $f(r)$ と、これと比較される標準文字図形 $f_0(r)$ との平均濃度を前節にならってそれぞれ K, K_0 とする。標準文字図形の線幅が変化すると、その平均濃度 K_0 は、

$$0 < K_0 < 1$$

なる範囲で変化する。したがって、標準文字図形はその平均濃度 K_0 をパラメータとする関数であるから $f_0(r, K_0)$ と書くことができるが、これを $f_0(r)$ と書くことにする。すなわち、

$$f_0(r) \equiv f_0(r, K_0)$$

いま、変数 ξ を、

$$\xi \equiv K_0 / K \tag{13}$$

で定義し、この変数 ξ の関数 $H(\xi)$ を、 $f_0(r)$ と $f(r)$ との類似度 $S(f, f_0)$ を使って、

$$H(\xi) \equiv S(f, f_0) \sqrt{\xi} \tag{14}$$

で定義する。そうすれば、二つの文字図形 $f(r), f_0(r)$ はともに白黒2値の文字図形であるから、それぞれの文字図形の黒部分が領域 R において占める部分領域を S, S_0 とすれば、 $H(\xi)$ は、

- (1) $S_0 \subset S$ のとき: $H(\xi) = \xi$
- (2) $S_0 \supset S$ のとき: $H(\xi) = 1$
- (3) (1), (2) 以外のとき: $0 < H(\xi) < \min(\xi, 1)$

なる値をとる。図 4.1 に示すようなモデル図形の場合の $H(\xi)$ の形を示せば図 4.2 のとおりとなる。この関数 $H(\xi)$ を次に定義する関数 $\eta(\xi)$ 、すなわち、

$$\eta(\xi) = \{1 + \xi - \sqrt{\xi^2 - 2k\xi + 1}\} / (1+k) \tag{15}$$

ただし、 $-\infty < k \leq 1$

で近似することにしよう。この近似関数 $\eta(\xi)$ と関数 $H(\xi)$ とが同様の形をしていることはすぐ確かめられる。

いま、 ξ のある値 ξ' における $\eta(\xi)$ の値 η' が既

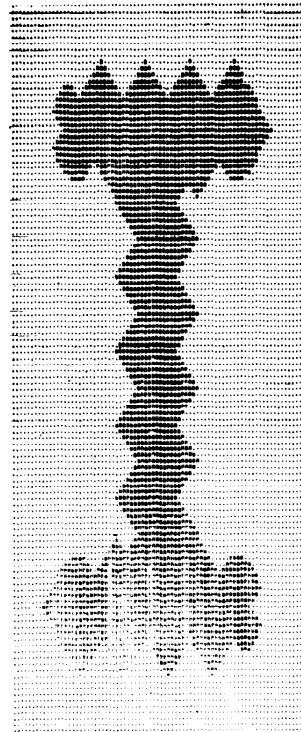


図 4.1 A "model" pattern

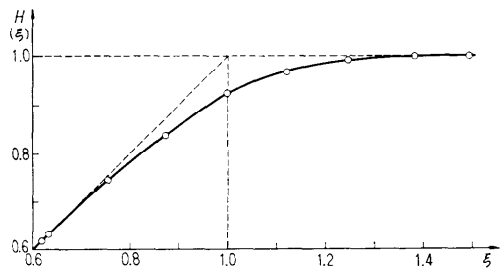


図 4.2 An example of $H(\xi)$

知であったとすると、式 (15) のパラメータ k は、

$$k = 1 - 2(\xi' - \eta')(1 - \eta') / \eta'$$

のように決まり、 $\xi = 1$ (すなわち、 $K = K_0$) における $H(\xi)$ の値 $H(1)$ を推定する近似曲線の形が確定する。そして、このときの $H(1)$ の推定値 H_0 は、

$$H_0 = \eta(1) = \eta' / (\eta' + \sqrt{(\xi' - \eta')(1 - \eta')}) \tag{16}$$

となる。

ところで、与えられた文字図形の線幅（平均濃度）に対する標準文字図形の線幅の選び方によって、変数 ξ の値が1より小なる場合と大なる場合との二つが生じる。そこで、前者の場合の変数 ξ の値を ξ_1 、推定値

を η_1 , 後者の場合の変数 ξ の値を ξ_2 , 推定値を η_2 とすれば, これらの二つの推定値から新たな推定値 η_0 を, 変数 ξ_1, ξ_2 の 1 からの距離によって案分比例して求める式は,

$$\eta_0 = \{(\xi_2 - 1)\eta_1 + (1 - \xi_1)\eta_2\} / (\xi_2 - \xi_1) \quad (17)$$

となる.

$\xi = 1$ における $H(\xi)$ の推定値 η_0 を, 式 (14) によって類似度 $S(f, f_0)$ に変換すると, $\xi = 1$ であるから,

$$S(f, f_0) = \eta_0 \quad (18)$$

となる. また, これを正規図形に変換した後の類似度 $s(g, g_0)$ になおすと, 式 (9) から,

$$s(g, g_0) = (\eta_0 - K) / (1 - K) \quad (19)$$

となる.

以上のことから, 入力文字図形が与えられたときに, この文字図形の平均濃度 (線幅) をはさむように 2 種類の線幅の標準文字図形を二つ選んで, この二つの標準文字図形と入力文字図形との類似度から, 入力と標準との平均濃度が一致したときの類似度を推定する方法が明らかとなった.

5. 真の最大類似度の値とその位置との推定

文字図形はマトリクス状に離散的な点で表現されていて, 標準と入力との相対位置を格子点上で離散的にずらしても, 類似度が真の最大値をとるような相対位置とすることは一般にできない. したがって, 格子点間隔よりも高い精度で相対位置を合わせるか, これと等価な処理をすることが必要である. また, 入力文字へのノイズのつき方が一様であれば, 標準と入力との重心位置が一致したときに類似度が最大値をとることが予想されるが, 実際の文字図形のノイズによる変形は一様ではないので, 両文字図形の重心を合わせた状態で類似度が真の最大値をとるとは限らない. そこで, 類似度の真の最大値とその位置とを推定する方法を考察することにしよう.

いま, 文字図形が与えられる領域 R を図 5.1 に示すように, 標準文字図形の重心 \mathbf{a}_0 を一つの格子点とする間隔 d の網目でおおい, 各格子点に記号 $P_{i,j}$ ($i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) をこの図に示すようにつけることにしよう. そうすると, 点 $P_{i,j}$ に重心がくるように平行移動した入力文字図形 $f_{i,j}(\mathbf{r})$ は,

$$f_{i,j}(\mathbf{r}) = f^*(\mathbf{r} - \mathbf{d}_{i,j})$$

$$\text{ただし, } \begin{cases} \mathbf{d}_{i,j} = \mathbf{i}(id) + \mathbf{j}(jd) \\ i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

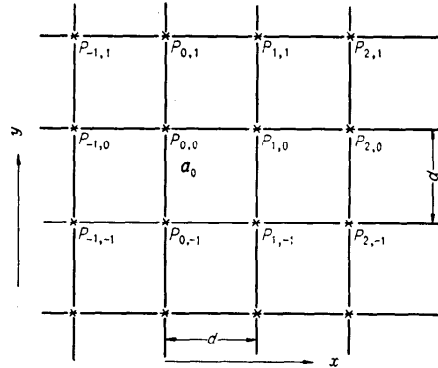


図 5.1 Rectangular network of points for estimating the maximum similarity

と書き表わすことができる. ここで, $f^*(\mathbf{r})$ は標準文字図形の重心 \mathbf{a}_0 と入力文字図形の重心 \mathbf{a} とが一致するように入力文字図形をずらした図形, すなわち,

$$f^*(\mathbf{r}) \equiv f(\mathbf{r} - \mathbf{a} + \mathbf{a}_0) \quad (20)$$

である.

ところで, 入力文字図形と標準文字図形との相対位置をずらすと, 類似度は山型の変化となり, 類似度が最大値をとる相対位置からさらにずらしていくと, その変化はある範囲において直線的になる⁶⁾. いま, 位置移動した入力文字図形 $f_{i,j}(\mathbf{r})$ と標準文字図形 $f_0(\mathbf{r})$ との類似度 $S_{i,j}$, すなわち,

$$S_{i,j} \equiv S(f_{i,j}, f_0)$$

を考え, 助変数 i, j を逐次変化したときの類似度 $S_{i,j}$ の最大値を $S_{I,J}$ と書くことにすれば, $S_{I,J}$ は,

$$S_{I,J} \equiv \max_{i,j} (S_{i,j})$$

ただし, I, J は類似度 $S_{i,j}$ の最大値を与えるときの i, j の値

である.

しかるに, 変数 $z_0, z_1, z_2, \dots, z_4$ を,

$$\begin{cases} z_0 \equiv S_{I,J} \\ z_1 \equiv S_{I+1,J} \\ z_2 \equiv S_{I,J+1} \\ z_3 \equiv S_{I-1,J} \\ z_4 \equiv S_{I,J-1} \end{cases} \quad (21)$$

とおくことにすれば, 類似度の真の最大値 S_{\max} は,

$$S_{\max} = z_0 + (1/2)|z_1 - z_3| + (1/2)|z_2 - z_4| \quad (22)$$

で与えられ, 網目状の点上で相対位置をずらしたときの最大類似度 $S_{I,J}$ を与える点 $P_{I,J}$ を基準とする, 真の最大類似度 S_{\max} を与える点の偏位 \mathbf{a}' は,

$$\mathbf{a}' = \mathbf{i}pd + \mathbf{j}pd \quad (23)$$

ただし、

$$p = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{z_1 - z_3}{z_0 - z_3} & ; z_1 > z_3 \\ -\frac{1}{2} \frac{z_3 - z_1}{z_0 - z_1} & ; z_1 < z_3 \end{cases}$$

$$q = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{z_2 - z_4}{z_0 - z_4} & ; z_2 > z_4 \\ -\frac{1}{2} \frac{z_4 - z_2}{z_0 - z_2} & ; z_2 < z_4 \end{cases}$$

で与えられる*。

また、類似度が真の最大値をとるときの、入力文字図形の重心の位置 d は、標準文字図形の重心 a_0 を基準にして、

$$d = d_{ij} + a' \tag{24}$$

で与えられる。

以上の結果から、ある適当な間隔 d で十字型5点標準と入力との相対位置をずらして類似度を計算した結果から、真の最大類似度の値とその位置とを求める方法が明らかとなった。

6. モデルデータの評価

6.1 モデルデータ

文字図形は格子点間隔 0.04 (mm) の基盤目状のわく (65×87) に表現されているものとしよう。

モデルデータは標準文字の文字線縁にノイズを付加したものである。ある点にノイズがつくか否かはその点とそのまわりの8点、すなわち 3×3 のマトリクスに占める黒点の数によって確率的に決まる。ノイズの量を決める確率は表 6.1 に示す4種類である。この表を見ればわかるように、(1),(2),(3),(4)の順にノイズ量が大きくなる。

OCR-A, OCR-B の 0 から 9 までの数字に上に述べたようにしてノイズを付加する。ノイズを付加する前の標準文字図形の線幅は 0.27, 0.35, 0.43, 0.51 (mm) の4種類である。

したがって、各ノイズレベルにおけるデータの数は $2 \times 10 \times 3 = 60$ 個である。

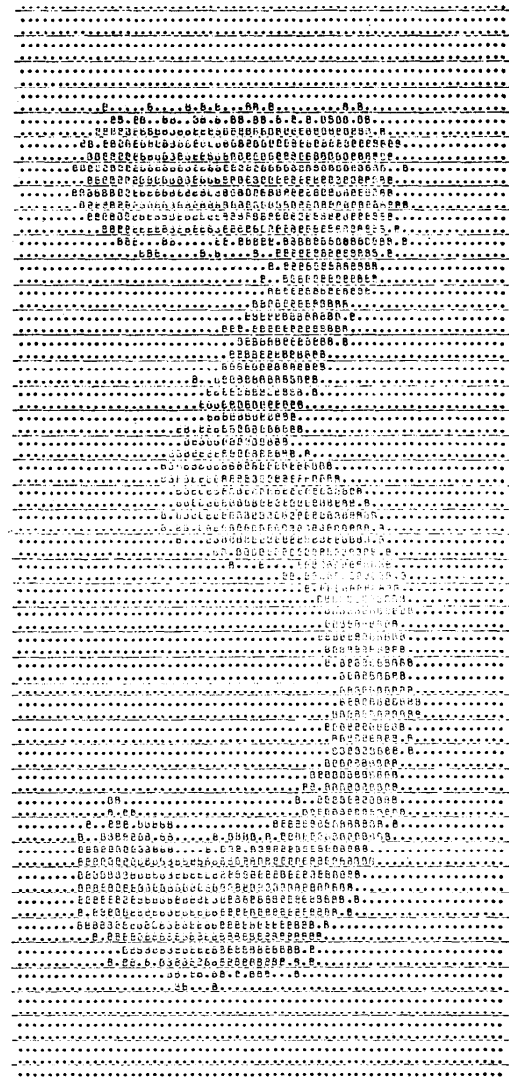


図 6.1 An example of "model" pattern with artificial noise

モデルデータの例を図 6.1 に示す。これはノイズレベル (3) の場合の OCR-B 「3」である。

表 6.1 Probability of attaching artificial noise.

noise level	number of black points in 3×3 submatrix	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(1)		0.000	0.001	0.005	0.025	0.125	0.625	0.975	0.995	0.999	1.000
(2)		0.00	0.01	0.02	0.04	0.08	0.16	0.32	0.64	1.00	1.00
(3)		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	1.0
(4)		0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9

* 付録参照

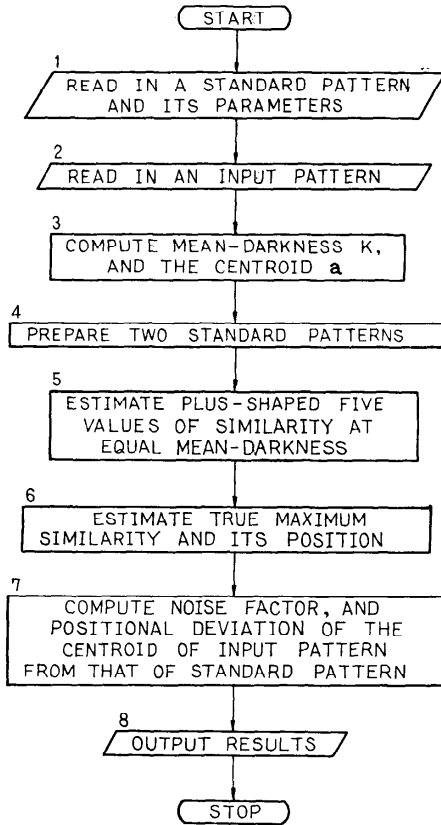


図 6.2 Flow chart of print quality evaluation

6.2 評価手順と評価結果

評価の手順の概略を図 6.2 に示す。

図 6.1 に示したモデルデータの場合の評価の結果を表 6.2 に示す。

各ノイズレベルにおけるノイズ成分 e^2 の平均値, 最大値, 最小値, 標準偏差を表 6.3 に示す。この表からノイズ成分 e^2 が文字図形の品質を評価する量として有用であることがうかがえる。

表 6.3 Evaluated results for "model" data

		noise level			
		(1)	(2)	(3)	(4)
OCR-A	mean	0.017	0.027	0.171	0.294
	max	0.024	0.044	0.252	0.340
	min	0.003	0.004	0.114	0.217
	standard deviation	0.005	0.010	0.030	0.029
OCR-B	mean	0.022	0.030	0.160	0.287
	max	0.037	0.054	0.235	0.338
	min	0.005	0.004	0.038	0.205
	standard deviation	0.007	0.012	0.037	0.028
OCR-A and OCR-B	mean	0.020	0.029	0.165	0.290
	max	0.037	0.054	0.252	0.340
	min	0.003	0.004	0.038	0.205
	standard deviation	0.006	0.011	0.034	0.029

7. むすび

大量の印字データの品質評価を客観的, 機械的, 効率的に行なう方式と, その方式の実用可能性について述べた。

紙面上に印字されている 1 個の文字図形の品質の評価値となりうる量には, ノイズ成分 e^2 のほかに, 文字が与えられる領域に占める黒部分の量を表わす平均濃度 K , 入力文字図形の重心が標準文字図形の重心を基準にして, どの方向にいかなる量ずれているかを表わす変位量 d がある。

灰色の濃淡レベルをも有する実際の印字文字を評価するためには, 閾値, 標本点間隔のほか, 用意する標準文字図形の線幅の種類, 真の最大類似度の値を推定するために十字形に 5 点相対位置をずらして類似度を計算するときのずらしの大きさなどを決めなければならないが, これらの事項の検討は後の機会に譲りたい。

なお, 本論文で述べたことは, 日本電子工業振興協会に設置されていた「OCR 印字仕様分科会」での仕事の一部として行なわれたものである。

謝辞 種々ご討論いただいた東芝総合研究所の森健一氏, 日本電気中央研究所の星野幸夫氏をはじめ, OCR 印字仕様分科会の委員各位に感謝の意を表した

表 6.2 Evaluated values of the pattern shown in Fig. 6.1 and reference data

```

NAME ** 3C14
ZEROTH MOMENT ** 1529
THE CENTROID ** ( 33.5, 40.4 )
*****
ERROR FACTOR ** 0.107
TRANSLATED DISTANCE FROM THE CENTROID OF STANDARD ** ( 0.0, -0.0 )
MEAN DARKNESS ** 0.2704
*****
  
```

い.

参考文献

- 1) ISO/TC 97: DR 1831, Printing Specifications for Optical Character Recognition(May. 1968).
- 2) たとえば B.J. Vincent: Unofficial USA Comments on ISO/DR 1831 (March. 1970).
- 3) 山崎・飯島: “文字図形の観測機構”, 信学論誌 D, 55-D, 1, pp, 15-22 (1972. 1).
- 4) 吉村, 山崎, 飯島: “文字図形の重心とひろがりについて”, 情報処理, Vol. 9, No. 5, pp, 277-284 (1968).
- 5) 山崎, 飯島: “計算機による標準文字図形の発生”, 情報処理, Vol. 12, No. 3, pp. 168-175 (1971).
- 6) 山崎・飯島: “類似度の 2, 3 の性質”, 信学大全, 117 (昭和 45.8).

付 録

5. で導いた類似度の最大値とその位置とを推定する式は, ここで述べる一次元の場合を二次元の場合に拡張して導いたものである.

いま, 図 A 1 に示すように z_1, z_0, z_3 が間隔 d ごとに与えられているとしよう. そこで, z_1, z_0, z_3 の間には,

$$z_0 > z_1, z_3 \tag{A1}$$

なる関係式が成立するものとし, z の変化は直線的であるものとする.

まず, z_1, z_3 の小さいほうの値 (図では z_3) と z_0 とを通る直線の式を求めると,

$$(z - z_0)d = (z_0 - z_3)x \tag{A2}$$

となる. 次に, z_1, z_3 の大きいほうの値 (図では z_1) とを通る上の直線と逆勾配の直線の式を求めると,

$$(z - z_0 - z_1 + z_3)d = -(z_0 - z_3)x \tag{A3}$$

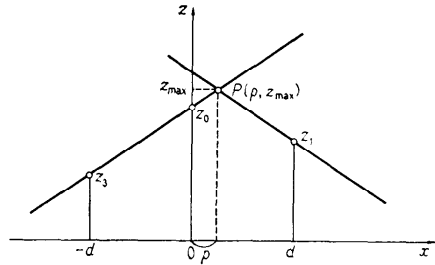


図 A 1 Estimation of the point $P(p, z_{max})$

となる. これらの二つの式から交点を求めると,

$$\begin{cases} z = z_0 + \frac{1}{2}(z_1 - z_3) \equiv z_{max} \\ x = \frac{1}{2} \frac{z_1 - z_3}{z_0 - z_3} \equiv p \end{cases} \tag{A4}$$

となる.

一方, z_1 が z_3 よりも小さい場合には, 交点は,

$$\begin{cases} z_{max} = z_0 + \frac{1}{2}(z_3 - z_1) \\ p = -\frac{1}{2} \frac{z_3 - z_1}{z_0 - z_1} \end{cases} \tag{A5}$$

で与えられる.

式 (A4), (A5) の結果をまとめると, 推定値 z_{max} , p はそれぞれ,

$$z_{max} = z_0 + \frac{1}{2}|z_1 - z_3|$$

$$p = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{z_1 - z_3}{z_0 - z_3} & ; z_1 > z_3 \\ -\frac{1}{2} \frac{z_3 - z_1}{z_0 - z_1} & ; z_1 < z_3 \end{cases} \tag{A6}$$

となる.

(昭和 46 年 11 月 27 日受付)