

# Exclusive Hypervolumeの近似手法

田 川 聖 治<sup>†1</sup>

Exclusive Hypervolume (EH) とは, Hypervolume に対する各非劣解の貢献度を示すものであり, 2 つの Hypervolume の差として定義される. 4 目的以上の最適化問題を対象とした進化型多目的最適化において, EH は非劣解の有効な評価指標である. しかし, Hypervolume と同様に EH の計算量は指数時間となる. 本稿では, 計算量が多項式時間である EH の近似値として Pairwise EH (PEH) を提案する.

## An Approximation of Exclusive Hypervolume

KIYOHARU TAGAWA<sup>†1</sup>

Exclusive Hypervolume (EH) is defined by a gap between two hypervolumes and used to estimate how much hypervolume is lost by removing a solution from a non-dominated set. EH can be used by Evolutionary Multiobjective Optimization (EMO) algorithms as the indicator for ranking non-dominated solutions. However, EH cannot be calculated in polynomial complexity. This paper proposes an approximation of EH called Pairwise Exclusive Hypervolume (PEH). The proposed PEH can be calculated in polynomial complexity.

### 1. はじめに

多目的最適化問題のパレート最適解集合を獲得するため, 進化型多目的最適化 (EMO: Evolutionary Multiobjective Optimization) アルゴリズムが利用される. NSGA-II<sup>1)</sup> に代表される多くの EMO アルゴリズムでは, 次世代の集団に残す個体 (解) をパレート優劣関係に基づき選択する. しかし, 目的関数が 4 以上の最適化問題では, 集団内の大半の個体が早期に非劣解となり, EMO アルゴリズムによるパレート最適解の探索が停滞する.

<sup>†1</sup> 近畿大学  
Kinki University

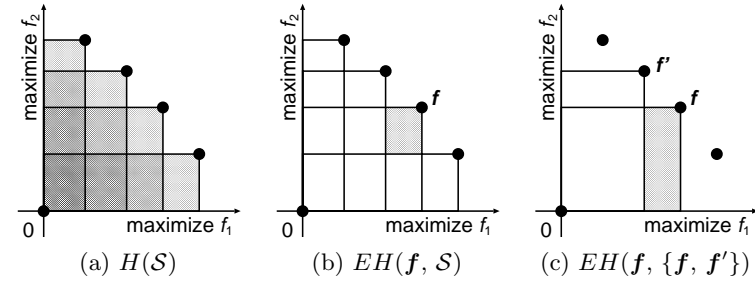


図 1 4 個の非劣解を含む集合  $S \subset \mathbb{R}^2$   
Fig. 1 Non-dominated set  $S \subset \mathbb{R}^2$  consisting of four solutions

EMO の研究分野において, Hypervolume は非劣解集合の評価指標として広く用いられている. また, Exclusive Hypervolume (EH) とは, Hypervolume に対する個々の非劣解の貢献度を示すものであり, 2 つの Hypervolume の差として定義される. EH は EMO アルゴリズムにおける非劣解の有効な評価指標であると考えられ, その高速計算アルゴリズムが報告されている<sup>2)</sup>. しかし, Hypervolume と同様に EH の計算量は指数時間となる.

本稿では, EH の近似値として Pairwise EH (PEH) を提案する. PEH は EH の上限値であり, 多項式時間で計算できる. また, PEH の近似精度と計算時間を評価する.

### 2. Exclusive Hypervolume (EH)

$M$  目的の最適化問題は式 (1) により定式化される.

$$\begin{cases} \text{maximize} & \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}), \dots, f_M(\mathbf{x})) \\ \text{subject to} & \mathbf{x} \in \mathcal{X} \end{cases} \quad (1)$$

式 (1) において, 解空間を  $\mathcal{X}$ , 目的関数空間を  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^M$ ,  $M$  次元の目的関数を  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{F}$  とする. 本稿では一般性を失うことなく, 目的関数空間の原点  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^M$  を基準とする最大化問題を考え, 目的関数値は非負  $f_m(\mathbf{x}) \geq 0$  ( $m = 1, \dots, M$ ) とする. さらに, 解  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  に代えて, その目的関数値  $\mathbf{f} = f(\mathbf{x}) \in \mathcal{F}$  を式 (1) の多目的最適化問題の解と呼ぶ.

原点  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^M$  と解  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}$  を対角の端点とする超直方体を  $B(\{\mathbf{f}\}) \subset \mathbb{R}^M$  とする. 次に, 非劣解集合  $S \subseteq \mathcal{F}$  により形成される領域  $B(S) \subset \mathbb{R}^M$  を式 (2) のように定義する.

$$B(S) = \bigcup_{\mathbf{f} \in S} B(\{\mathbf{f}\}) \quad (2)$$

非劣解集合  $S \subseteq \mathcal{F}$  の Hypervolume とは領域  $B(S) \subset \mathbb{R}^M$  の体積  $H(S) \in \mathbb{R}$  である .

$$H(S) = \text{vol}(B(S)) = \text{vol}\left(\bigcup_{f \in S} B(\{f\})\right) \quad (3)$$

ここで , 非劣解  $f \in S$  の  $H(S)$  に対する貢献度である EH は式 (4) により定義される .

$$EH(f, S) = H(S) - H(S \setminus \{f\}) \quad (4)$$

### 3. Pairwise Exclusive Hypervolume (PEH)

本稿では , EH の近似値である PEH を式 (5) により定義する .

$$PEH(f, S) = \min_{f' \in S \setminus \{f\}} \{EH(f, \{f, f'\})\}. \quad (5)$$

式 (5) の  $PEH(f, S)$  の理解を容易とするため , 4 個の非劣解 (黒丸) を含む  $S \subset \mathbb{R}^2$  と  $f \in S$  について ,  $H(S)$  ,  $EH(f, S)$  ,  $EH(f, \{f, f'\})$  のイメージを図 1 に示す .

まず , PEH は EH の上限値であり , 式 (6) の関係が成り立つことが証明できる<sup>3)</sup> .

$$PEH(f, S) \geq EH(f, S) \quad (6)$$

次に , 式 (3) と式 (4) より , 式 (5) の  $EH(f, \{f, f'\})$  は下記のように変形できる .

$$\begin{aligned} EH(f, \{f, f'\}) &= H(\{f, f'\}) - H(\{f'\}) \\ &= \text{vol}(B(\{f, f'\})) - \text{vol}(B(\{f'\})) \\ &= \text{vol}(B(\{f\})) - \text{vol}(B(\{f\}) \cap B(\{f'\})) \end{aligned} \quad (7)$$

さらに ,  $B(\{f\}) \cap B(\{f'\})$  も超直方体となるため , 式 (7) から式 (8) が導出できる .

$$EH(f, \{f, f'\}) = \prod_{m=1}^M f_m - \prod_{m=1}^M \min\{f_m, f'_m\} \quad (8)$$

式 (8) に基づく  $EH(f, \{f, f'\})$  の計算量は  $O(M)$  である . したがって , 式 (5) に示した  $PEH(f, S)$  の計算量は  $O(M \cdot |S|)$  となる . ただし , 集合  $S$  の要素数を  $|S|$  とする .

### 4. 計算機実験による評価

5 目的のテスト問題 DTLZ1 と DTLZ2 のパレート・フロント上に 100 個の解  $f \in S$  をランダムに生成し , EH と PEH に基づき順序付けを行った . 図 2 では EH による順序を横軸とし , PEH による順序を縦軸として解  $f \in S$  を描画している . ただし , 図 2 の結果は 10 回の試行の平均である . 図 2 から EH と PEH の明瞭な相関関係が観察できる .

次に ,  $M$  目的のテスト問題 DTLZ1 と DTLZ2 のランダムに生成した 200 個のパレート最適解  $f \in S$  に対する EH と PEH の計算に要した時間 (msec) を表 1 に示す . ただし , 表 1 の結果は 30 回の試行の平均値であり , 括弧内は計算時間の標準偏差である .

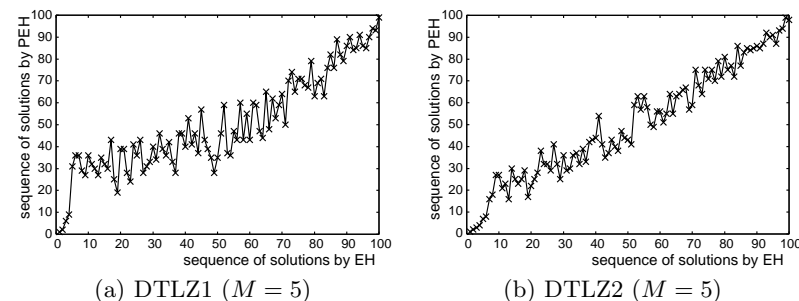


図 2 EH と PEH により並べた非劣解の順序

Fig. 2 Sequences of non-dominated solutions sorted by EH and PEH

表 1 EH と PEH の計算時間の比較

Table 1 Comparison of computational times between EH and PEH

		$M$	2	3	4	5	6
DTLZ1	EH		11.0 (12.5)	26.0 (17.4)	141.1 (54.9)	509.6 (210.5)	3091.9 (1133.6)
	PEH		1.0 (3.8)	1.1 (4.6)	1.5 (4.0)	1.6 (4.7)	1.6 (4.6)
DTLZ2	EH		7.76 (10.6)	24.4 (17.8)	124.9 (41.4)	481.3 (219.5)	2781.4 (879.2)
	PEH		1.5 (4.7)	1.5 (2.9)	1.6 (4.8)	1.6 (3.9)	1.5 (4.6)

### 5. おわりに

EH の近似値として PEH を提案し , それが多項式時間で計算できることを示した . また , 計算機実験によって EH と PEH による非劣解の順序付けが類似していることを確認した . 今後の課題は , PEH を利用した EMO アルゴリズムの性能を評価することである .

### 参考文献

- 1) K. Deb, et al.: “A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II”, *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, Vol.6, No.2, pp.182–197, (2002).
- 2) L. Bradstreet, L. While, L. Barone: “A fast incremental hypervolume algorithm,” *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, Vol.12, No.6, pp.714–723, (2008).
- 3) K. Tagawa, H. Shimizu, H. Nakamura: “Indicator-based differential evolution using exclusive hypervolume approximation and parallelization for multi-core processors,” *Proc. of GECCO2011*, pp.657–664, (2011).