

非線形最適化による一様に分布するドットパターンの生成

今道 貴司^{1,a)} 沼田 英俊¹ 井手 剛¹

概要: 液晶ディスプレイは複数の光学部品から構成されている。その中でも導光板や光拡散フィルムはバックライトの照明を一様にする光学部品である。本論文では導光板や光拡散フィルムのためのドットパターンの新しい生成方法を提案する。従来より分子動力学シミュレーションによる手法が提案されており、高品質のドットパターンを生成することが実証されている。その手法の主要な技術的要素は、ドットパターンにおいてドット間の重なりを除去することにより、ディスプレイの見た目のムラの発生を防ぐことである。本研究では、ドット間の重なりに対してペナルティを設定して、そのペナルティの総和を最小化する最適化問題を定式化して、非線形最適化の手法を適用して高速に局所最適解を得ることによりドット間の重なりを除去を行う手法を提案する。計算実験により、提案手法が従来の分子動力学シミュレーションによる手法と同等以上の品質のドットパターンをより高速に生成できることを示した。

キーワード: 液晶ディスプレイ, ドットパターン生成, 衝突除去, 非線形最適化

Non-overlapping Random Dot Pattern Generation Using Nonlinear Optimization

TAKASHI IMAMICHI^{1,a)} HIDETOSHI NUMATA¹ TSUYOSHI IDE¹

Abstract: In this paper we propose a new method to generate random dot patterns with no inter-dot overlap for the light guide and diffuser films in liquid crystal displays (LCDs). Molecular-dynamics-based algorithms have been proposed for this purpose and proven to generate dot patterns with good quality. The key technical challenge is how to remove inter-dot overlap. If dot patterns contain inter-dot overlap, it causes visible roughness in the luminance distribution. In this paper, we propose a new overlap removal method of dots. Our method penalizes the overlap of dots and minimizes the sum of the penalties by a nonlinear optimization technique. Through computational experiments with real world data, we show that our optimization-based method obtains dot patterns with comparable quality faster than a simulation-based method does.

Keywords: Liquid crystal displays, Dot pattern generation, Overlap removal, Nonlinear optimization

1. はじめに

液晶ディスプレイはテレビやコンピュータのモニターとして用いられる他に、携帯電話端末や携帯型ゲーム機などの表示部としても用いられている。テレビや携帯電話端末は頻りに新しいモデルが開発されるために、液晶ディスプレイの設計の効率化は重要な問題の一つである。液晶ディス

プレイの典型的な構造は、冷陰極管や発光ダイオードなどのバックライトで液晶セルを背後から照明する方式になっている(図1)。一般にバックライトの明るさは液晶セル全体に対して一様ではないため、導光板や光拡散フィルムを用いてそれを一様にする必要がある。導光板や光拡散フィルムは照明の出力の分布に応じたドットパターンが埋め込まれている。

液晶ディスプレイの製造プロセスにおいて、導光板や光拡散フィルムの設計は最も手間のかかる工程である。一般に、ドットパターンは次の要件を満たす必要があると言わ

¹ 日本アイ・ピー・エム株式会社 東京基礎研究所
IBM Research - Tokyo, 1623-14 Shimotsuruma, Yamato,
Kanagawa 242-8502, Japan.

^{a)} imamichi@jp.ibm.com

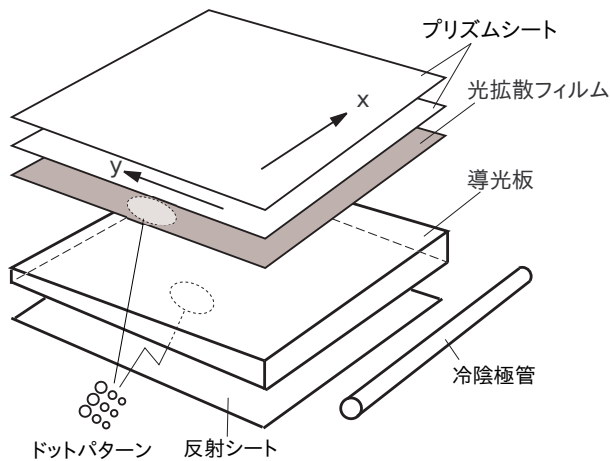


図 1 エッジライト式バックライトの典型的構造
Fig. 1 Conventional structure of edge-lit backlight unit

れている。

- (1) モアレ縞を出さない程度に十分不規則であること。ドットを格子点上のように規則的に配置すると、モアレ縞が発生する。
- (2) ムラが目視されない程度に十分一様であること。ドット間に重なりがある場合に、見た目にムラが発生する。またドット間に重なりがないとしても、あまり近接しすぎるのも好ましくない。
- (3) 任意のドットの連続的の充填率分布に対応できること。

これらの条件を満たすドットパターンを生成するために、分子動力学シミュレーションによる手法が従来より提案されており、高品質のドットパターンを生成することが実証されてきた。Idé ら [5] は、二段階に分けてドットパターンを生成する方法を提案している。一段階目では非均一なドットパターンを生成するために Tezuka ら [10] による超一様分布列 (low-discrepancy sequences, LDS) を用いてドットの初期配置を求める。二段階目ではドット間に斥力を設定して、運動方程式を解くことで、ドットの初期配置に含まれるドット間の重なりを除去する。Chang と Lee [4], Chang ら [3] も同様の分子動力学シミュレーションに基づくドットパターンの生成方法を提案している。一方で、Chang と Fang [2] はドットの位置を格子点上に固定した上でドットの半径を反復的に最適化する手法を提案している。

本研究では、最適化による新しいドットの位置を決める手法を提案する。まずドットパターンの初期配置は従来の分子動力学シミュレーションによる手法と同様に LDS を利用して生成する。そして初期配置の各ドットを、ドットの位置する領域の充填率に応じた半径の円に置き換える。続いて円の間重なりペナルティを最小化する非線形最適化問題を定式化して非線形最適化の手法を適用することで高速に局所最適解を得る。ここで円の移動範囲を制限する領域を設定することにより、空白領域にドットが逃げるのを防ぐ工夫も加えている。最後に、各円を元のドットに置き換えることで最終的なドットパターンを得る。

実際の導光板のデータを用いて計算実験を行い、提案手法が従来の分子動力学シミュレーションによる手法よりも高速に同等以上の品質のドットパターンを生成することを確認した。なお、本研究の内容の詳細は [8] にて報告している。

2. 分子動力学シミュレーションによる手法

この節では Idé ら [5] による Dynamic LDS (DLDS) 法の概要を紹介する。入力として、ドットを配置する長方形の容器 (導光板や光拡散フィルムに相当) と容器を長方形に区切った領域ごとのドットの充填率が与えられる。目的は充填率を満たしつつ、不規則かつ重なりがないようにドットを配置することである。Idé らの手法は、以下の二段階

のフェーズで構成される。

- (1) ドットの初期配置を求める。ドットの充填率を満たすように不規則にドットを配置する。ただし、疑似乱数による揺らぎを排除するために、疑似乱数の代わりに Tezuka ら [10] による超一様分布列 (low-discrepancy sequences, LDS) を用いる。
- (2) ドットの初期配置に含まれるドット間の重なりを除去する。ドット間に斥力を設定し、LDS によるドットの初期配置を初期条件として、運動方程式のシミュレーションを適切な時間進めることでドット間の重なりを除去する。

Idé らはこの手法が、疑似乱数からドットパターンを生成する単純な手法に比べてより高い輝度一様性を達成することを報告している。

以下の節で各フェーズの詳細を紹介する。

2.1 ドットの初期配置の生成

ここでは Idé らの手法でドットの初期配置を生成する方法の詳細を述べる。ドットを配置する容器 (導光板や光拡散フィルムに相当) が大きさが $L_x \times L_y$ で等しい m 個の長方形の領域 $\{R_1, \dots, R_m\}$ に分割されていて、 $R_i (i = 1, \dots, m)$ におけるドットの充填率が ρ_i であるとする。なお、ドットの充填率 ρ_i は R_i 内のドットの面積の総和と R_i の面積の比で定義する。そして、ドットが R_i に置かれる確率 $P_i = \rho_i / \sum_{j=1}^m \rho_j$ を導入する。

ドットの初期配置は以下の操作を n 回繰り返すことで実現する。

- (1) 超一様分布列から、 $[0, 1]^3$ 内の 3 次元の点の集合を生成し超一様点集合とよぶ。そこから取り出した 1 点を (U_0, U_1, U_2) とする。
- (2) $1, \dots, m$ の中から次の条件を満たす k を選択する。

$$\sum_{j=1}^k P_j \leq U_0 < \sum_{j=1}^{k+1} P_j.$$

- (3) R_k の $(\eta_k + L_x U_1, \xi_k + L_y U_2)$ にドットを 1 点配置する。ただし、 (η_k, ξ_k) は R_k の左下角の座標とする。ここで生成した n 個のドットの初期配置は (x_i, \dots, x_n) と表す。

超一様点集合により生成した点集合は高い一様性を持っていて、疑似乱数によってドットパターンを生成するよりもドット間の重なりが少ないことが期待できるが、ドットの大きさが 0 ではないために、実際にはドット間の重なりが見られて、別途ドット間の重なりを除去する必要がある。

2.2 斥力緩和法

Idé ら [5] は超一様点集合によるドットパターンに含まれるドット間の重なりを除去するために、ドットの集合を斥力的に相互作用する粒子系とみなし、分子動力学シミュ

レーションによりドットパターンを改善する斥力緩和法を提案している。この手法はドットパターンの生成では有効な手法として他の手法でも用いられている [3], [4]。

ドット i と j の間の斥力 f_{ij} を次のように定義する。

$$f_{ij} = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} \times \begin{cases} 1 & b_{ij} < D, \\ \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| - b_{ij}}{L}\right) & b_{ij} \geq D, \end{cases} \quad (1)$$

なお、 D と b_{ij} はパラメータである。

そして、超一様点集合によるドットパターンを初期条件として、次の運動方程式を解くことでドットの配置を改善する。

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} + c \frac{d \mathbf{x}_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j).$$

この方程式は差分方程式で次のように記述して、 $\mathbf{x}_i(t)$ を十分小さな Δt を設定して計算する。

$$\mathbf{x}_i(t + \Delta t) = \mathbf{x}_i(t) + \frac{1}{c} \Delta t \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{ij}(t), \quad (2)$$

Idé らはこの斥力緩和法によって、ドットパターンの初期配置を改善できることを示したが、我々はこの手法には二点改善すべき点があると考える。

一点目がこの手法の計算コストが大きいことである。特にドットの充填率が小さい領域があるときにその傾向が顕著になる。差分方程式 (2) を解く際には、ドット間の斥力 (1) の総和を計算する必要がある。初期配置の非均一性を維持するために、各ドットに対して相互作用するドットを少なくしすぎはいけないので、 D を小さくしすぎはいけない。Idé らは D をドットの充填率の平方根に逆比例するように設定したが、そのため充填率が低い領域に含まれるドットに対する斥力の計算のコストが増大している。

二点目がドットの移動に制限がないために、一部のドットが斥力によって充填率が小さい領域に逃げてしまうことである。これは充填率の小さい領域のドット数が少ないので、その方向からの斥力の支えが小さくなるためである。図 2 の左の図で実際に空白領域に一部のドットが逃げているのが確認できる。

3. 最適化による手法

ここでは、我々が提案する最適化によるドットパターンの生成方法 OptDot について説明する。提案手法の大枠は 2 節の分子動力学シミュレーションによる手法と同じで、超一様点集合を用いてドットパターンの初期配置を求めた後に、ドット間の重なりを除去するというものである。提案手法が新しくなっているのは、ドット間の重なりを除去する部分で、Imamichi らの [6] による Multi-sphere scheme による最適化による手法を適用する。Multi-sphere scheme は 2 次元や 3 次元の図形の衝突のない配置を求めるための

汎用のフレームワークで、図形を円や球の集合で近似した後、その円や球の集合間に設定したペナルティの総和を制約なしの非線形最適化の手法を適用して行うことで図形間の重なりを除去する。本論文では、各ドットをそれぞれ一つの円で表して衝突除去を行う。

我々は最適なドットパターンを得るために二つの工夫を加えた。一つ目が各ドットを充填率に応じて適切なサイズの円に置き換えて、置き換えた円の間衝突を除去することで、元のドットパターンにおけるドット間の重なりを除去することである。二つ目が個々の円に対して移動可能な領域を円のサイズに応じて設定することにより、ドットが超一様点集合による初期配置から離れすぎるのを防ぐことである。超一様点集合による初期配置からかけ離れ過ぎないことは、ドットの位置の不規則性を残すことにつながり、モアレ縞を防ぐ意味で重要である。

長方形の容器 C 、ドットの充填率 ρ 、ドットの半径 r_0 が入力で、OptDot はドットパターン $\{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ を出力する。その手順は以下の通りである。まずドットパターンの初期配置 $\{x_1, \dots, x_n\}$ をドットの充填率 ρ を満たすように超一様点集合を用いて生成する (2.1 節)。なお、ドットの数 n はここで決定される。 x_i をドット i の位置とする。次に、各ドット i に対して半径 r_i を計算する (3.2 節)。なお、ドット i を置換する円を S_i として、その中心座標を x_i 、半径を r_i とする。そして、円 $\{S_1, \dots, S_n\}$ の間の衝突を除去する (3.1 節)。最後に、各円を元のドットで置換して、最終的なドットパターンを得る。図 3 は OptDot の手順を表している。

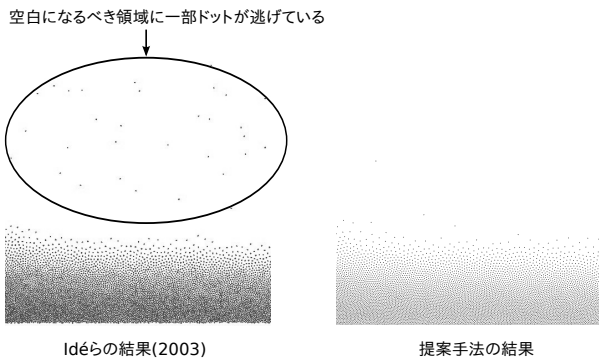


図 2 「角」問題例に対する計算結果の比較。Idé ら [5] の手法の結果では一部のドットが空白領域に逃げている

Fig. 2 Comparison of the results by our method and Idé et al. [5] with “Tsunami” instance (Some dots move to empty space depicted by an ellipse where the dot density is zero).

3.1 定式化

ここではドットパターンの初期配置を改善する際の、置換した円の間衝突除去の最適化の定式化について述べる。入力として、ドットを配置する長方形の容器 C と円の集合 S_1, \dots, S_n の初期配置が与えられている。我々は個々の円に対して制限領域を導入する。円 S_i の制限領域 Q_i は、一辺の長さが $4r_i$ で、初期配置における S_i の中心と同じ位置に Q_i の中心があるものとした (図 4)。

円の間衝突除去は、円の中心の座標 x_1, \dots, x_n を決定変数として、以下の 3 種類のペナルティの総和を目的関数とする制約なし非線形最小化問題を解くことを行う。

- (1) 円の間重なりペナルティ
- (2) 円の容器からの突出ペナルティ
- (3) 個々の円に設定された制限領域からの突出ペナルティ

目的関数が 0 の解は、全ての円が重なり合わず、容器や制限領域からもみ出さない配置に相当する。制限領域によるペナルティを加えることで円が超一様点集合の非均一性を維持することと、空白領域にドットが逃げるのを防ぐことができる。

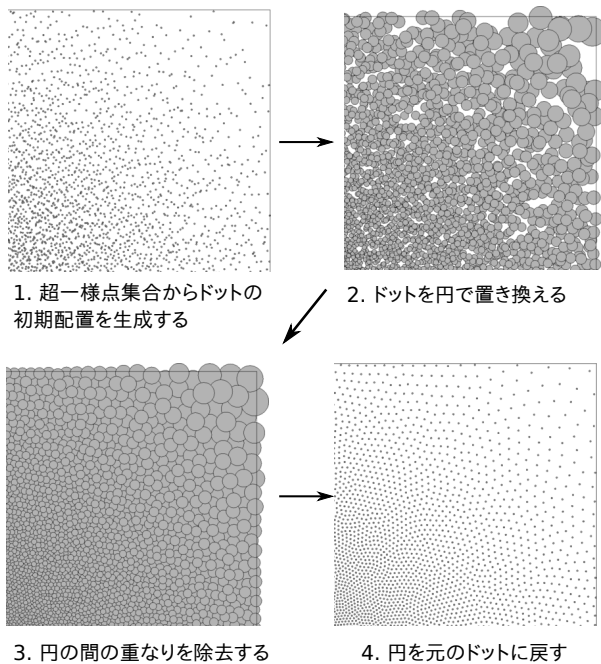


図 3 提案手法の流れ。「LED」問題例に適用した結果の拡大図(4節)

Fig. 3 The outline of the proposed algorithm for non-overlapping randomly-distributed dot patterns. The dot distribution is taken from the “LED” instance (see Section 4).

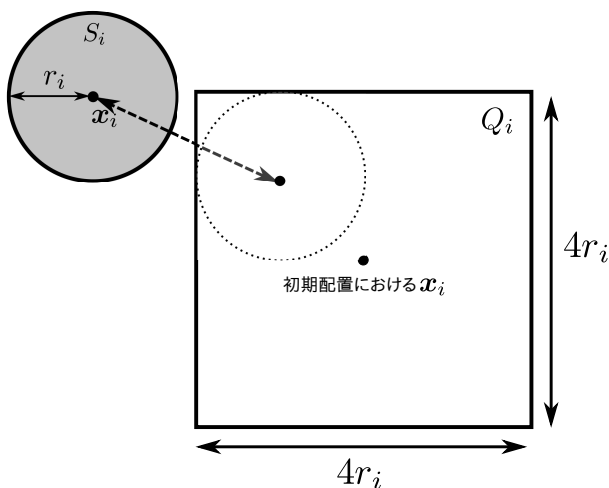


図 4 各円の平行移動を制限する領域。点線の矢印の長さが円の突出している度合いを表す。

Fig. 4 Restricted region for each circle. The length of a dashed arrow corresponds to the protrusion depth.

3種類のペナルティはいずれも貫通深度 [1] を元に定義した。 \bar{A} を集合 A の補集合, ∂A を A の境界, $\text{int}(A) = A \setminus \partial A$ を A の内部とする。図形 S を $x \in \mathbb{R}^2$ だけ平行移動させた結果の図形は

$$S \oplus x = \{t + x \mid t \in S\}.$$

と表す。すると、二つの 2 次元の図形 S と T の貫通深度は S と T を分離するのに必要な最小の平行移動の距離で定義されて、

$$\delta(S, T) = \min\{\|x\| \mid \text{int}(S) \cap (T \oplus x) = \emptyset, x \in \mathbb{R}^2\}$$

と表される。ただし $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムを表す。円 S_i と S_j に対しては、その貫通深度は

$$\delta(S_i, S_j) = \max\{r_i + r_j - \|x_i - x_j\|, 0\}.$$

と簡単に計算することができる。円 S_i と長方形の補集合 \bar{R} の貫通深度 $\delta(S_i, \bar{R})$ も同様に計算することができる。

ここで我々は円の衝突除去問題 (3) を制約なし非線形計画問題として定式化する。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \sum_{1 \leq i < j \leq n} \delta(S_i \oplus x_i, S_j \oplus x_j)^2 \\ & && + \sum_{1 \leq i \leq n} \delta(S_i \oplus x_i, \bar{R})^2 \\ & && + \sum_{1 \leq i \leq n} \delta(S_i \oplus x_i, \bar{Q}_i)^2, \\ & \text{subject to} && x_i \in \mathbb{R}^2, 1 \leq i \leq n \end{aligned} \quad (3)$$

なお、全てのペナルティの関数は微分可能である。

円の衝突除去問題 (3) は目的関数が微分可能なので準ニュートン法などを適用して高速に局所最適解を計算することができるが、我々は Liu ら [9] による Limited-memory BFGS(L-BFGS) 法を採用した。これは、実際に計算実験で用いるデータの一部が 10 万点以上のドットを含むため、領域計算量が $O(n)$ の L-BFGS 法が大規模な問題を解くのに向いているからである。

円の衝突除去問題に L-BFGS 法を適用する際には、目的関数とその微分が繰り返し計算されるので、その高速化が重要である。特に計算量が大いのが円の間衝突のペナルティの計算である。その他のペナルティが $O(n)$ 時間しかかからないのに対して、円の間衝突のペナルティの計算は総当たりで行うと $O(n^2)$ 時間かかる。そこで我々は Imamichi ら [7] による、スラブ分割と平面走査法を組合せた円の衝突判定の手法を適用した。このアルゴリズムは、円の半径比と次元を定数と見なせる場合に、最適な時間計算量 $O(n \log n + K)$ で全ての円の間衝突を検出できる。ただし K は衝突している円のペアの数である。

3.2 半径の設定

ここではドットを円で置換する際の半径の設定方法を述べる．適切な半径を設定して円の衝突除去問題 (3) を解くことでドット間の距離が一樣なドットパターンを得ることができる．

r_0 をドットの半径, ρ をある領域 X_i のドットの充填率 (ドットの面積の総和と領域の面積の比) とする．そして r を X_i 内でドットを置き換える円の半径とする．

我々は r を円が最も密に充填される六方充填配置における ρ から設定した．六方充填配置における円の半径 r' は

$$r' = r_0 \sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{3}\rho}}$$

となる．

予備実験の結果, r' をそのまま円の半径として用いた場合は, 結果のドットパターンに多少のムラが残ることを確認した．これは実際のドットパターンを変換した円の配置が六方充填配置よりも密な配置にならないためである．そこで我々は円の半径として r' よりも少し大きい半径

$$r = r_0 \sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}\rho}}$$

を採用した．

4. 計算実験

我々は実際の導光板のデータを用いた計算実験を行い Idé ら [5] の結果と比較した．提案手法は C++ で実装し Core 2 Duo T9300 CPU (2.5GHz) の PC で双方のプログラムを実行した．なお, 双方ともドットの配置を改善する反復の回数は 200 回とした．

我々は, 「角」, 「直下」, 「LED」とよばれる 3 種類の実際の導光板の問題例を用いた．表 1 は各問題例に含まれるドットの数を表している．ドットの半径 r_0 はいずれの問題例でも $23\mu\text{m}$ で設定した．

表 1 ドットパターンに含まれるドット数

Table 1 Number of dots in the initial dot patterns.

問題例	ドット数	ドットペア数
角	111211	6183887655
直下	287080	41207319660
LED	117088	6854741328

表 2 は計算時間を比較したものである．いずれの問題例に対しても提案手法の方が高速にドットパターンを生成した．

我々は生成されたドットパターンの質を比較するために, 見た目のムラを引き起こす原因となる重なっているドットのペア数と, 重なってはいないものの, 非常に近接しているドットのペア数に着目した．表 3 が重なっているドットのペア数を表している (重なっているドットの中心間の距

表 2 計算時間 (分)

Table 2 Computation time (min).

問題例	Idé ら [5]	OptDot
角	15	1.9
直下	38	4.7
LED	38	1.8

表 3 重なっているドットのペア数 (ドットの中心間の距離が $46\mu\text{m}$ 未満)

Table 3 Number of colliding dot pairs (the distance between them is less than $46\mu\text{m}$).

問題例	初期配置	Idé ら [5]	OptDot
角	24339	1	0
直下	36827	0	0
LED	57949	1315	0

表 4 非常に近接しているドットのペア数 (ドットの中心間の距離が $60\mu\text{m}$ 未満)

Table 4 Number of too close dot pairs (the distance between them is less than $60\mu\text{m}$).

問題例	初期配置	Idé ら [5]	OptDot
角	45523	66	16
直下	73055	2	0
LED	104530	37844	32644

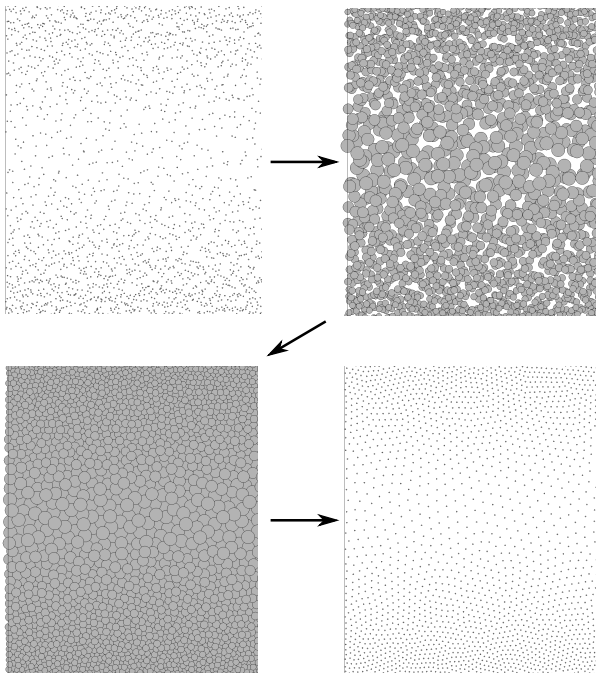


図 5 「直下」問題例の拡大図

Fig. 5 Magnified pictures of the results of “Chokka” instance

離が 46μ 未満).そして表 4 が非常に近接しているドットのペア数を表している(ドットの中心間の距離が $60\mu\text{m}$ 未満を非常に近接していると定義).いずれの問題例に対しても,提案手法の出力するドットパターンの方が重なっているドットのペア数や非常に近接しているドットのペア数が同じか少なくなっている.

提案手法が出力したドットパターンを以下に掲載する.図 3,図 5,図 6 がそれぞれ,「LED」,「直下」,「角」問題例の結果の一部を拡大したものである.提案手法が一般的な分布のドットパターンを生成していることが確認できる.また,「角」問題例のドットパターンの端の部分を図 2 で比較した.提案手法のドットパターンでは,空白領域に移るドット数が少なくなっている.これはドットごとに設定した制限領域の効果と考えられる.

5. むすび

我々は液晶ディスプレイの部品の導光板や光拡散フィルムのために,最適化を用いて非均一で一様なドットパターンを生成する新しい手法を提案した.提案手法は,まず超一様点集合を用いて入力ドットの充填率を実現するようなドットパターンの初期配置を生成したのちに,ドット間の重なりを除去する.ドット間の重なりを除去するために,提案手法はドットを充填率に応じた円で置換した後に,円の間の重なりや円の容器や制限領域からの飛び出しに対するペナルティの総和を最小化する円の重なり除去問題を定式化し,L-BFGS法を適用することで局所最適解を高速に得る.計算実験を通じて,提案手法が従来の分子動力学シミュレーションによる手法よりも高速に計算できるだけで

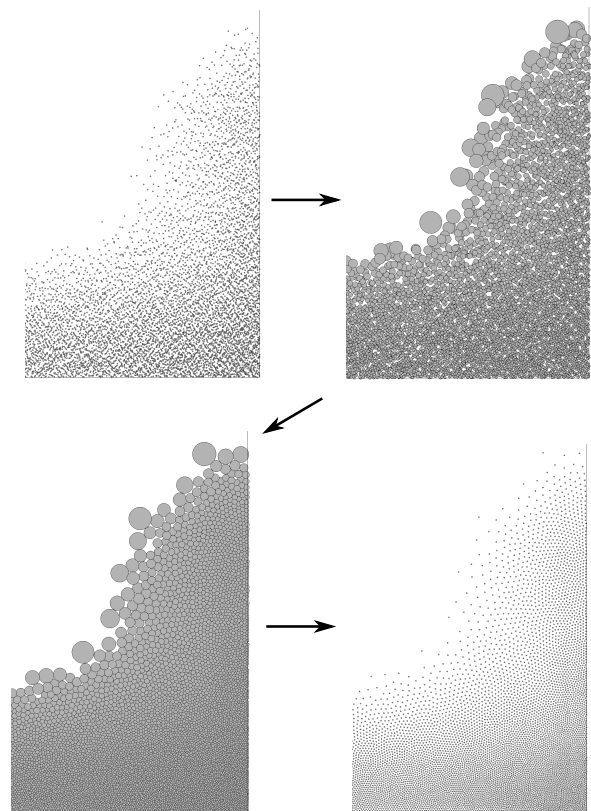


図 6 「角」問題例の結果の拡大図

Fig. 6 Magnified pictures of the results of “Tsuno” instance

なくドット間の重なりや近接が少なく、また空白に逃げるドットが少ないような高品質なドットパターンを生成していることを観察した。

今後の課題としては、我々の提案手法を円のドットパターンの生成だけでなく、長方形のような他の形状のドットパターンの生成へ適用することが挙げられる。この場合は各ドットを円の集合で近似することが考えられる。また、本論文では重なったり近接するドットの数でドットパターンの品質の評価をしたが、計算実験で生成したドットパターンを用いて実際の導光板や光拡散フィルムを作成して物理的性質を評価することも重要な課題である。

puter Simulation, Vol. 3, pp. 99–107 (1993).

参考文献

- [1] Agarwal, P. K., Guibas, L. J., Har-Peled, S., Rabinovitch, A. and Sharir, M.: Penetration depth of two convex polytopes in 3D, *Nordic Journal of Computing*, Vol. 7, No. 3, pp. 227–240 (2000).
- [2] Chang, J.-G. and Fang, Y.-B.: Dot-pattern design of a light guide in an edge-lit backlight using a regional partition approach, *Optical Engineering*, Vol. 46, No. 4, pp. 043002–1–043002–9 (2007).
- [3] Chang, J.-G., Fang, Y.-B. and Ju, S.-P.: Using a generalized molecular dynamics force model for random microstructure generation of different aspect-ratios and orientation for use in the optical design of an LED edge-lit backlight, *Computer Physics Communications*, Vol. 180, No. 8, pp. 1259–1270 (2009).
- [4] Chang, J.-G. and Lee, C.-T.: Random-dot pattern design of a light guide in an edge-lit backlight: integration of optical design and dot generation scheme by the molecular-dynamics method, *Journal of the Optical Society of America A*, Vol. 24, No. 3, pp. 839–849 (2007).
- [5] Idé, T., Mizuta, H., Numata, H., Taira, Y., Suzuki, M., Noguchi, M. and Katsu, Y.: Dot pattern generation technique using molecular dynamics, *Journal of the Optical Society of America A*, Vol. 20, No. 2, pp. 248–255 (2003).
- [6] Imamichi, T. and Nagamochi, H.: A Multi-sphere Scheme for 2D and 3D Packing Problems, *SLS 2007: Proceedings of Engineering Stochastic Local Search Algorithms. Designing, Implementing and Analyzing Effective Heuristics* (Stützle, T., Birattari, M. and Hoos, H. H., eds.), Lecture Notes in Computer Science, Vol. 4638, Heidelberg, Springer, pp. 207–211 (2007).
- [7] Imamichi, T. and Nagamochi, H.: Performance Analysis of a Collision Detection Algorithm of Spheres Based on Slab Partitioning, *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, Vol. E91-A, No. 9, pp. 2308–2313 (2008).
- [8] Imamichi, T., Numata, H., Mizuta, H. and Idé, T.: Non-linear Optimization to Generate Non-overlapping Random Dot Patterns, *Proceedings of the 2011 Winter Simulation Conference* (Jain, S., Creasey, R. R., Himmelspach, J., White, K. P. and Fu, eds.), Piscataway, New Jersey, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., pp. 2419–2430 (2011).
- [9] Liu, D. C. and Nocedal, J.: On the limited memory BFGS method for large scale optimization, *Mathematical Programming*, Vol. 45, No. 1, pp. 503–528 (1989).
- [10] Tezuka, S.: Polynomial arithmetic analogue of Halton sequences, *ACM Transactions on Modeling and Com-*