ウエップ文法によるグラフの表現*

安部憲広**・水本雅晴**
豊田順一**・田中幸吉**

Abstract

Recently, by use of the concept of ordinary phrase structured grammars, there are many examples that attempt to describe a set of all pictures having some typical properties. One of such an attemption, web grammars considered by Pfaltz, Rosenfeld and Montanari can be mentioned. In paper, some examples of web grammars that describe a several graphs whose property is prescribed by a graph theory are shown. To put it concretely, it is shown that some types of eulerian graphs, line graphs and 3-connected graphs can be completely rspresented by web grammars.

1. まえがき

最近，2次元図形を従来の句構造文法の概念を拡張して表現しようとする試みがいくつかある．その1つに Pfaltz, Rosenfeld[1], Montanari[2] らによって提案された Web Grammars を挙げることができる．この文法は Shaw[3] によって示された図形表示法を，より一般的に形式化したものと考えられ，図形（本論文ではグラフ（以後はウエップとも呼ぶ））の性質を統一的に表現する能力を有している．Montanariはウエップ文法の間接生成（次節参照のこと）を利用して，平面グラフを記述している．本論文では，その他のグラフ理論において重要とされ，しばしば利用されるいくつかのグラフを表現するウエップ文法の例を与える．

2. ウエップ文法

ウエップ文法とは，頂点にラベルを持つグラフを生成する文法である．ラベルの集合は有限の記号集合であり，通常語彙と呼ばれVで表わされる．このV上のウエップWとは (N_W, F_W, A_W) の3組で表わされ，N_W は頂点集合，F_W は頂点 N_W のラベルを指定する関数であり，形式的に $F_W; N_W \rightarrow V$ と書かれ，A_W は弧の集合であり，頂点 $P, Q \in N_W$ が $(P, Q) \in A_W$ であるとき，頂点 P, Q は隣接であると呼び，弧 (P, Q) はPまたはQに付ずいするという．

ウエップ文法 G_W は $G_W=(V, I, R)$ の3組で表わされる．ここに，Vは互いに排他的な非空の終端語彙 V_T と非終端語彙 V_N との和集合で表わされ，I は初期ウエップの有限集合（ただし，本論文では1点ウエップ $\underset{\cdot}{S}$ に規定している[4]）であり，Rは書き換え規則（以後，単に規則と呼ぶ）の有限集合であり，形式的に (α, C, β, E) の4組で与えられる．α, β はウエップであり，C は規則の適用条件と呼ばれる α に関する論理関数であり，ウエップ α の頂点集合と，書き換えられるべきウエップ（以後，ホストウエップとも呼ぶことがある）中の α, α に隣接な頂点集合に関する言明であると規定する．ここで，一般の文法と同様に，$\forall P \in N_\alpha$, $F_\alpha(P) \in V_N$, $\forall Q \in N_\beta$, $F_\beta(Q) \in V$と仮定しておく．つぎに，Eはうめこみ指定関数とよばれる N_α から N_β の部分集合族への関数（α 中の書き換えを受ける頂点の像を指定する機能を持つ）と，ホストウエップへのβのうめこみを指定する恒真の論理関数である．すなわち，書き換えられるべき頂点を $P \in N_\alpha$ とするとき，Pの像がQと指定されれば，ホストウエップでPに関して隣接（一般にある関係を満たしていた）頂点集合は，その像Qに対しても同様の関係を保存すべきものと規定する．この場合，像が1点のみ存在する規則を正規な規則と呼び，1つ以上の像の存在する規則を非正規な規則と呼び，すべての

* A Description of Graphs represented by Web Grammars, by Norihiro Abe, Masaharu Mizumoto, Junichi Toyoda and Kohkich Tanaka (Osaka University, Faculty of Engineering Science, Department of Engineering of Information and Computer Sciences, Toyonaka, Osaka, Japan, 560)
** 大阪大学基礎工学部情報工学科　豊中市

規則が正規な文法を正規文法，そうでない文法を非正規文法と呼ぶことにする．すぐに理解されることと思うが，非正規文法系は，グラフ理論において，しばしば必要とされる頂点の分割操作の表現に対応している．

初期ウエッブより導出されたあるホストウエッブに対して，規則 (α, C, β, E) が適用可能とは，α に，そのラベル，関係（無向ウエッブでは隣接関係，有向ウエッブでは順序関係，一般ウエッブでは多順序有限関係等）も含めて同型なウエッブがホストウエッブ中に存在する場合があるとする．たとえば，図1のような場合，⦿印上のウエッブに対して，図の規則が，文脈 B 頂点，C 頂点の制限のもとに適用可能（この例では，C は恒真となっている）である．具体的に解説すれば，A 頂点が書き換えられ，その像が D 頂点であり，この規則によるホストウエッブ（a）は（b）のように書き換えられる．A 頂点に隣接であったすべての頂点は，D 頂点に隣接となっていることに注意したい．これに対して，図2に示した規則は非正規であり，図

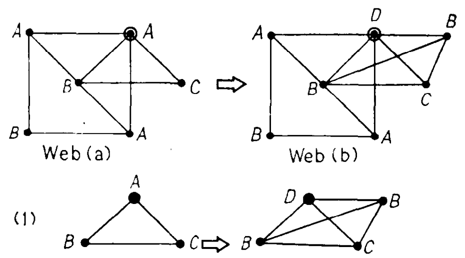

Fig. 1 An example of application of a normal rule (1) to the host web (a). Image of A-vertex is a D-vertex, that is, $E=\{I_m(\underset{\cdot}{A})=\{\underset{\cdot}{D}\}\}$.

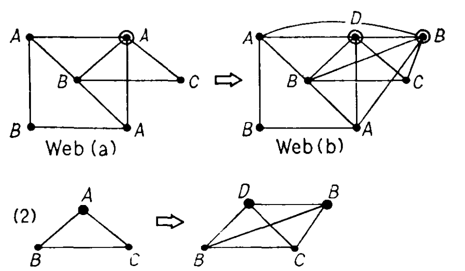

Fig. 2 An example of application of a non-normal rule (2) to the host web (a). Image of A-vertex is D and B-vertex, that is, $E=\{I_m(\underset{\cdot}{A})=\{\underset{\cdot}{D}, \underset{\cdot}{B}\}\}$.

中の α の頂点 A の像は，β 中の2つの頂点 D, B であるため，図1と同型なホストウエッブ（a）によって導出されるウエッブ（c）は（b）に同型ではない．

つぎに，本論文において使用するウエッブ文法のタイプに関して解説する．与えられたウエッブ文法 G_W のすべての規則 (α, C, β, E) において，C が恒真であり，ウエッブ α の頂点数を $|N_\alpha|$ と書くとき，(1), $|N_\alpha| \leq |N_\beta|$ であり，α 中の書き換えを受ける頂点の像がつねに存在するならば，（弧は消えることがあっても良い）その文法を monotone context sensitive web grammar（略して mcswg）と呼び，（2）;（1）かつ，書き換えを受ける頂点が高々1つであり，書き換え後も α 中の弧は消えることがない（文脈となる頂点はもちろん，弧もそのまま保存され，書き換えられる点に隣接なすべての頂点は，書き換え後その像に隣接である）ならば，その文法を context sensitive web grammar (cswg) と呼び，（3）;（1）かつ，$|N_\alpha|=1$ ならば context free web grammar (cfwg) と呼び，β および I 中に V_N の頂点が高々1つしか存在せぬ場合 linear web grammar (lwg) と呼ぶ．

しかし，図形を描く場合，補助線・補助点を利用すれば，図形の表示が容易である場合がしばしば存在する．mcswg は補助線の利用を一部許した場合のモデルとも考えられる．補助点の利用に対するモデルとして，Montanari が定義した文法による間接生成の概念がある．これは，与えられたウエッブ文法 G_W に対して，$V_{LG} \subsetneqq V_{TG}$ なる V_{LG} を設定し，G_W によって導出の終了した（すべての頂点のラベルが V_{TG} に書き換えられた）ウエッブ上の V_{LG} 以外のラベルを持つ頂点をすべて消去する（もちろん，それらの頂点に付ずいする弧も消される）生成手法である．そして，たとえば mcswg による言語を mcswL, 間接生成による言語を I-mcswL, それぞれの言語族を $\mathrm{mcsw}\tilde{\mathrm{L}}$, $\mathrm{I\text{-}mcsw}\tilde{\mathrm{L}}$ と書く．さらに，正規な mcswg を nmcswg, 非正規な mcswg を anmcswg と書く．

本論文では，ncfwg, nmcswg, anmcswg および間接生成を用いて，オイラーグラフ (eulerian-graph), ライングラフ (line-graph), 3-connectad graph のウエッブ文法による表現などについて記す．

3. オイラーグラフの表現

オイラーグラフは良く知られたグラフであるため，定義は略す．グラフが分離可能であるとは，そのグラフの中にある一頂点を取り除くことにより，グラフが

分離された二つ以上の部分に分割される場合をいい，その様な頂点（カットポイント）が存在しないならば，分離不可能であると呼ぶ．

まず最初に，オイラーグラフ表現に必要な文法系について少し考察する．

≪T_{3-1}≫　$\mathrm{ancfw}\tilde{L} \subsetneq \mathrm{ancsw}\tilde{L} \subsetneq \mathrm{anmcsw}\tilde{L}$

$\mathrm{ancsw}\tilde{L} \subsetneq \text{I-}\mathrm{ancsw}\tilde{L}$

（証明）　ウエップ文法Gによって生成されるウエップ集合を L_G と記すことにする．L_{G_1} として，すべての分離不可能なウエップの集合を，L_{G_2} として分離可能であり，そのブロックがサーキットと完全グラフであるウエップの集合をとるとする．そうすれば $L_{G_1} \notin \mathrm{ancfw}\tilde{L}$[4] であるが $\tilde{L}_{G_1} \in \mathrm{ancswL}$ である．また L_{G_2} には，完全グラフを持つウエップが存在するため L_{G_2} は正規系のウエップ言語ではなく，$L_{G_2} \notin \mathrm{ancsw}\tilde{L}$ であるが，$L_{G_2} \in \mathrm{anmcsw}\tilde{L}$, I-ancsw$\tilde{L}$ であることが認識される．形式的包含関係は自明であるから，上記関係の成立が確認される．（証明終.）

≪T_{3-2}≫　分離不可能なオイラーグラフの集合は，いかなる ncswg によっても生成できない．

（証明）　分離不可能なオイラーグラフとして最も簡単なものはサーキットであるが，これは適当な ncswg により導出可能である．このサーキットに弧，弧のチェインを加えても分離不可能性は保存される．この際各頂点の度数(その頂点に付ずいする弧の数を意味し，頂点Pの度数を deg P とかく）が偶数となる時，導出を終了すればよい．偶数の度数，奇数の度数を表わすラベルの集合をそれぞれ V_E, V_0 とし，$A \in V_E$, $\beta \in V_0$ とする．導出終了時には $\underset{.}{A} \Rightarrow \underset{.}{a}$ $(a \in V_T)$ が適用されると仮定して一般性を失なわない．そうしたとき L_G が ncswg によって生成されると仮定すれば，この文法はつぎのタイプの規則，すなわち，

二つの A (B) 頂点間，または A, B 頂点間に弧を加える規則を持たない．

この規則を適用すれば，偶頂点（奇頂点）は奇頂点（偶頂点）に変わるが，ncswg では高々一つの頂点のラベルだけが書き換えられるにすぎない．したがって，奇頂点のラベルがAとなる場合が存在する．このような奇頂点を含むウエップは一般に有限と限らないことより，規則によって修正できない．すなわち，弧を書き加えて目的を達することができないことが認識される．したがって偶（奇）頂点は偶（奇）頂点として保存される規則のみが許される．このような規則としては，α が β の部分ウエップであり，α は完全に分離したウエップかまたは β と同じようにオイラーウエップであるものだけである．このような規則の $|N_\beta|$ の最大値を M とするとき，$2(M+1) \leq K$ なるK個の頂点を持つサーキット（頂点を一方向に名づけて $P_1, P_2, \ldots, P_K$）を考える．このとき $P_2, P_4, \ldots, P_{M_2}$, P_j $(2(M+1) \leq j \leq k)$ なる $(M+1)$ 個の頂点が再びサーキット上にあるオイラーグラフを考えれば，この ncswg の規則を一度適用するだけでは目的は達せられない．ところがこうして導出された長さがM以下のサーキットから $(M+1)$ の長さのサーキットは導出できない．なぜならば，弧の消去が許されないためである．したがって，いかなる ncswg もこのようなオイラーグラフの集合を生成することはできないことが認識される．（証明終.）

オイラーグラフは nmcswg によって生成可能である．ncswg によって分離不可能なウエップを生成する場合と同様なことを考え，ラベルを偶頂点のみが生じるようにコントロールすれば十分である．したがって，つぎのことが成立する．

≪T_{3-3}≫　すべての分離不可能なオイラーグラフを生成する nmcswg が存在する．

≪T_{3-4}≫　すべての分離可能なオイラーグラフを間接生成する nmcswg が存在する．

4.　ライングラフの表現

Sをある集合，Fを $F=\{S_1, S_2, \ldots, S_P\}$ なる S の異なる空でない部分集合の族とするとき，Fのインターセクショングラフ (intersection graph) $\Omega(F)$ を，$V(\Omega(F))=F$* かつ $S_i \cap S_j \neq \phi$ ならば，$(S_i, S_j) \in A\Omega_{(F)}$** であるグラフとする．グラフ$G$のブロックグラフ (block graph) $B(G)$ とは，FをGのブロックとするインターセクショングラフであり，グラフGのライングラフ (line graph) $L(G)$ を，グラフGの弧の集合 A_G を頂点集合 N_G の２点よりなる部分集合の族とするときの $\Omega(A_G)$ とする．分離可能なグラフGのブロック・カットポイント・グラフ (block-cutpoint-graph) $bc(G)$ を，$V(bc(G))=\{B_i\} \cup \{C_j\}$ (B_i はブロック，C_j はカットポイント)，$P, Q \in V(bc(G))$ に対して，$(P, Q) \in A_{bc(G)}$ であるのは $P(Q)$ が B_i に，$Q(P)$ が C_j に対応し，C_j が B_i 上の頂点であるときと定義する．以下，すべてのツリーの集合をTと書くことにする．

* $\Omega(F)$ 上のラベルが，F の要素 $S_i (1 \leq i \leq P)$ であるという意味．
** S_i, S_j をラベルとする頂点が隣接であるという意味．

≪L_{4-1}≫ 図3の ncfwg G_W は $L_G=\{bc(G)|G=L(T)\}$ を生成する．

（証明） グラフH が $H\in L(T)$ である必要十分条件は，Hのカットポイントが，ただ2つのブロック上にのみ存在する連結なブロックグラフであることである．したがって，$bc(G)$ のC点（カットポイントに対応している）は，ちょうど2つのI点（ブロックに対応する）にのみ隣接であるツリーでなければいけない．図に示した文法 G_W では，C 点は2つの A点のみに

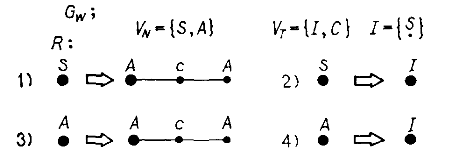

Fig. 3 This **ncfwg** generates a set of all block-cutpoint graphs of line graphs of arbitrary trees.

隣接であり，ツリー以外は生成せず（文献(4)参照)，しかもツリーの任意の枝において端点* はI点，そしてC点と点とが交互に現われることにより，$bc(G)$ である．

また，初期ウエッブから，2つのA点間にただ1つのC点をもち，A点の度数は任意の値をとるすべてのツリーが生成可能であることは明らかである．（証明終.）

≪T_{4-2}≫ 図4の**適用条件をもつ** nmcswg G_W は，$L_{G_W}=\{L(T)\}$ を**間接生成する**．

（証明） 前補題に同じ規則 1)，2) を用いて任意の $bc(G)$ が導出される．分離不可能なウエッブに対応する1点ウエッブに対しては，13)，14)，15) が適用される．

まず，分離可能なすべての $L(T)$ の生成されることを示す．導出された $bc(G)$ に対して，I点に対応するブロックが1本弧だけから成る時，4) を適用す

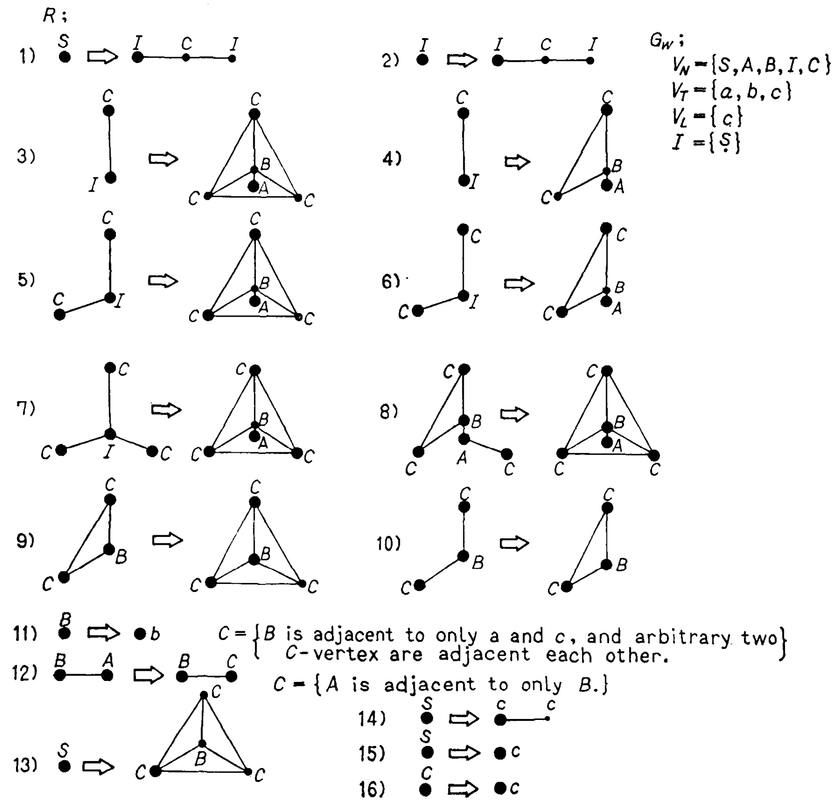

Fig. 4 This **nmcswg** with applicability condition indirectly generates of all line graphs of trees T.

＊ 度数が1である頂点である．

ればよい．すべてのブロックが1本弧である時，その $bc(G)$ の端点を除いたすべての I 点は度数が2であり，その場合は端点の I に対して 4)，他の I 点に対して 6) を適用すれば，その時点で 12) の適用条件はいつも真であり，12)，11) と適用されて導出は終了する．I 点の度数が2以上の時，その I 点に対して 3)〜7) のいずれかが適用される．（4)，6) の適用後に 8)，9)，10) が適用されれば，5)，7) の適用と同様な導出が行なわれる．）規則 8)，9)，10) は新しくブロック上に点を加えたり弧を加えたりする操作を表わしており，この過程は任意のブロック生成に対応している．しかし，$L(T)\simeq B(T)$* であるため，各ブロックは完全グラフでなければならない．しかし，nmcswg では完全グラフは生成できない[4]ため，規則の適用条件によって完全なブロックを作る．すなわち同一ブロック上の任意の隣接でない2つの C 点に対して，10) が適用されねばならないことが適用条件によって規定され，完全なブロックが導出され，導出の終了したウエッブは $bc(G)$ から得られた分離可能なライングラフとなっている．分離不可能なライングラフは完全グラフ K_P** を意味しており，1点から成る $bc(G)$ から作られる．初期ウエッブに対し 15) が適用されれば自明なライングラフ*** が，14) により自明でない最小の分離不可能なライングラフが，また，13) が適用されれば K_3 が，その後 9)，10) が適用されれば，前述の場合と同じく $K_P(P>3)$ が生成される．よってすべての $L(T)$ が生成可能である．$L(T)$ 以外のウエッブが生成されぬことは，$L(T)$ の必要十分条件より明らかであろう．各ブロックは完全であり，1つの C 点は，3)〜7) のいずれの規則によっても高々2つのブロックとのカットポイントとなるのみであり，12) の適用条件によって，$bc(G)$ 上の C 点は必らずいずれかのブロック上の頂点となるので，連結なウエッブのみが間接生成される．よって結果は明らか．（証明終．）

つぎに，すべての $L(G)$ の生成を考える．グラフ H がライングラフである必要十分条件は，そのグラフが完全グラフに分割でき，かつそうした完全グラフ上のどの頂点も3つ以上の完全な部分グラフ上にないことである．任意のライングラフ $L(G)\ni H$ が与えられれば，その分割の族 $F=\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ が存在する．いま，$i\neq j$ なる i, $j(1\leq i, j\leq n)$ に対して，完全なブロック B_i, B_j の両ブロック上の共有点の集合を C_{ij} とするとき，多重路なしのウエッブに対して，次の補題が成立する．

≪L_{4-3}≫　$|C_{ij}|=1$

（証明）　$|C_{ij}|=n(n>1)$ とし，$C_{ij}=\{c_1, c_2, \ldots, c_3\}$ とすると，B_i, B_j は完全ブロック故，$(c_k, c_m)\in A_{B_i}$, $(c_k, c_m)\in A_{B_j}(1\leq k, m\leq n, k\neq m)$ となり多重路を持つ．（証明終．）

上の条件を満足する C_{ij} の集合を $\{C_{ij}\}$ と書くとき，ライングラフ $L(G)\ni H$ の BD グラフを $bd(H)$ と書いて，$V(bd(H))=\{B_i\}\cup\{C_{ij}\}$ とし，P, $Q\in V(bd(H))$ に対して，$(P, Q)\in A_{bd(H)}$ であるのは，$P(Q)$ が B_i（または B_j）に，$Q(P)$ が C_{ij} に対応し，C_{ij} が B_i（または B_j）に含まれるとする．ライング

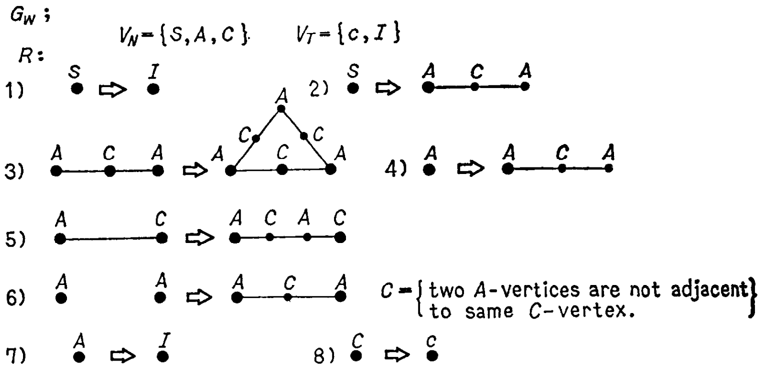

Fig. 5　This nmcswg with applicability condition generates a set of all BD-graphs.

* $\simeq$ は同型を示す関係である．
** P 点から成る完全グラフ．
*** 自明なグラフとは，1点からなるグラフで，一本弧のライングラフである．

ラフHが与えられるとき，その $bd(H)$ を生成すれば，その B_i 点を完全ブロックに，c_{ij} を B_i, B_j の共有点とするライングラフがいつも，しかも無数に生成可能である．1つのライングラフに対する分割の族は一意とは限らないが，可能なすべての $bd(H)$ が生成可能ならば，すべての $L(G)$ が生成可能である．

≪T_{4-4}≫ 図5の**適用条件を持つ** nmcswg G_W はすべての $bd(H)$ それのみを生成する．

(証明) すべての $bd(H)$ の生成を示す．前補題より，C点 (C_{ij} に対応する.) はただ2つのI点 (B_i に対応する.) にのみ隣接であることは，各規則においてC点が2つのA点のみに隣接であり，それ以外の他の点とは隣接でないことより明らかである．また 6) の適用条件により，異なるC点が同一の2つのA点に隣接となることが禁止されるので，やはり前補題を満足する．

また，2つのC点が隣接することはなく，C点は必らず2つのI点に隣接な場合のみが許されるため，C点と他のI点間に弧を加えることは $bd(G)$ 以外のウエッブの生成を生じる．したがって，可能な書き換えを受ける頂点の対としては，2つのA点間にそれらのA点が同一のC点に隣接でない時，新しくC点を加える（規則6）か，それらの間に新しいA点を含む弧のチェインを加える（規則3）か，A点とC点との弧の上に新しくC，A点を加えることのみが可能であり，他の規則は ≪L_{4-1}≫ に示した $bc(G)$ の生成規則と同じである．したがって，すべての $bd(H)$ が生成される．(証明終.)

≪T_{4-5}≫ すべての $L(G)$ それのみを**間接生成**する**適用条件を持つ** nmcswg が存在する．

(証明) ≪T_{4-2}≫ と ≪T_{4-4}≫ より明らかである．

≪L_{4-1}≫〜≪T_{4-5}≫ は，正規系文法による $L(G)$ の生成を考察したが，非正規系によれば，より簡単に記述可能であることを示す．

≪T_{4-6}≫ 図6の ancfwg G_W は，すべてのツリーのライングラフ $L(T)$ を生成する．

(証明) 1) により最小のライングラフが導出され，2) によって導出されたウエッブのA頂点へ 3) を n ($n \geq 0$) 回適用することにより K_{n+2} が生成され，A点が 4) によってB点に書き換えられた後，6) が適用されれば，その頂点は他の完全ブロックとのカットポイントにはならず，5) が適用された場合に限り 5) の規則の右辺のブロックとのカットポイントとなり，このブロック上のA点に 3) を適用することにより，

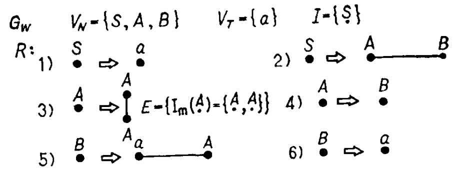

Fig. 6 This **ancfwg** G_W generates a set of all line-graphs of trees.

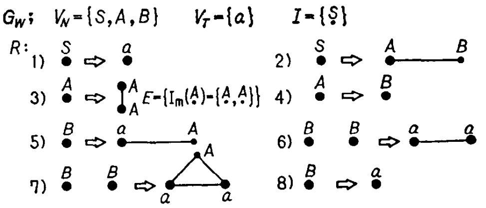

Fig. 7 This **anmcswg** G_W generates a set of all line-graphs.

最初の完全ブロックの導出と同様な議論が成立する．よって，生成されたウエッブのブロックはすべて完全であり，また3つ以上のブロックとのカットポイントとなる頂点は存在しない．よって，結果は明らか．(証明終.)

≪T_{4-7}≫ 図7 の anmcswg G_W はすべてのライングラフ $L(G)$ を生成する．

(証明) 規則 1)〜5) を用いれば，前述のようなツリーのライングラフを導出できる．それ以外のライングラフが規則 6)，または 7) によって生成されることを示せば良い．いま，導出された異なる2つの完全ブロック上の2点は，もうひとつの完全ブロックとの共有点になることができる．この完全ブロックが1本弧の場合に 6) を適用し，それが $K_{n+3}(n \geq 0)$ である場合，7) を1度適用し，n回 3) を適用すれば良い．そうして，他のブロックとの共有点となった頂点のラベルは $a \in V_T$ に書き換えられるため，さらに別のブロックとの共有点となることはない．この議論は，任意の2つのブロック上のラベルがa以外の頂点に対して繰り返し適用可能であるため，帰納法による詳細な証明は省略することにする．(証明終.)

5. 3-connected graph の表現

本節では，Tutte によって与えられた 3-connected graph の表現をウエッブ文法で表現した例を示す．

グラフGのコネクティビティ (connectivty) $K=K(G)$ とは，それらの頂点を取り除くことによって，分離されたグラフか自明なグラフを生じるような頂点

数のうちで最小の数を意味し，グラフが n-connected とは，$K(G)\geq n$ である場合をいう．そうすれば，自明でないグラフが 1-connected とは，それが連結である場合に限られ，2-connected とは，それが1本弧以上のブロックである場合に限られることがわかろう．しかし，3-connected である必要十分条件は，容易には理解しえない．この問題は，Tutte より解決された．まず，ホイール W_n (wheel) とは，$n\geq 4$ に対して，K_1+C_{n-1} として定義される．C_{n-1} は $(n-1)$ 点からなるサーキットであり，演算記号"+"は，K_1（1点グラフ）と C_{n-1} 上のすべての頂点を結ぶことを表わしている．そうすると，W_n $(n\geq 4)$ は 3-connected であることがわかる．Tutte は，これより，グラフが3-connected であるための必要十分条件を示している．

≪Tutte の定理 (T 13)≫[7] グラフ G が 3-connected である必要十分条件は，G がホイールであるか，ホイールから次の2種の操作を適当に行なって得られることである．(1) 新たに弧を加える．(2) 少なくとも度数が4である頂点 P を，隣接な2頂点 P_1, P_2 に分割し，P に隣接であった頂点は，P_1 か P_2 の一方にのみ隣接であり，かつ $\deg P_1\geq 3$, $\deg P_2\geq 3$ とする．

ウエッブ文法によって，3-connected graph を表現するには，非正規であることが現在のところ必要である（他の方法でも 3-connected graph はできるかもしれないが），なぜならば，他の手法は未知である．

≪T_{5-1}≫ 図8の anmcswg G_W は，すべての 3-connected ウエッブのみを生成する．（適用条件は，文法表現の簡易化のため使用しているにすぎない．）

（証明） 規則 1), 2), 3) はホイールの生成に対応している．5) が頂点の分割に対応している．この時，5) によって導出されるウエッブは，書き換え前に A 点に隣接な頂点はすべて B 点，C 点に隣接となるが，6) または 7) によって適当に弧を消して (2) の操作に対応さすことができる．もちろん，6), 7) の規則を適用しても，B 点，C 点の両者に隣接な頂点の存在することはある．しかし，それは，4) の規則（(1) の操作に対応している.）が適用されたことに等価であり，6), 7) の適用条件が成立しなくなるまで，弧を消し続けた場合が，(2) の操作そのものに対応することになる．したがって，Tutte の定理に等価な導出を図の文法 G_W が行なえることがわかろう．（証明終.）

なお，適用条件は，$\{\deg P\geq 4\}$ の形であるから，P と，P に隣接な他の4点）図中の C 点，A 点以外の4点）の可能なパターンを α, β に書き加えて表現可能であるため，本質的なものではない．

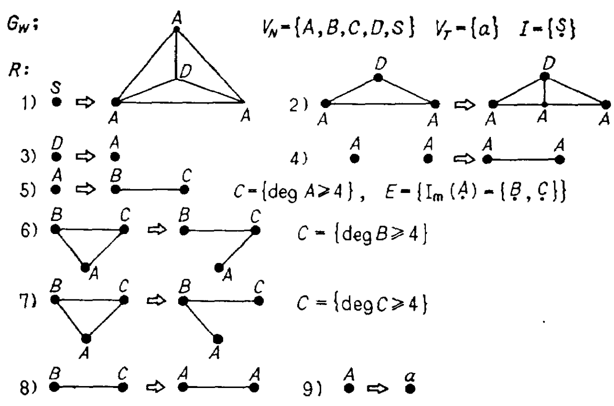

Fig. 8 This anmcswg generates a set of all 3-connected graphs. Note that the applicability condition of rule 5), 6), 7) can be described in their contex, and that rule 5) is non-normal rule.

6. むすび

ウエッブ文法によるグラフ表現について述べた．ウエッブ文法の目的の一つとして，ウエッブ文法の各タイプとグラフの構造との関係を求めることがある．これは必ずしもグラフ集合間の階層構造をグラフの特性によって分類するという意味にはならないが，グラフ間の階層を与える一方法であることは間違いない．現在までに知られたところでは，一般的には完全なブロックを有するグラフ正規系に属さず，分離可能性が同一性質のグラフを異なる類に決める場合があることなどがあげられる．グラフ理論は広い分野をカバーするため，どのような構造がどの類に対応するかは未解決な部分が少なくない．比較的簡単な構造を持つグラフに対するウエッブ文法を設定することにより，いくつかの種類の構造をもつグラフをそれに対するコンパクトな文法で特徴づけることが可能となる．ここで，こうした文法の対応づけを行なう際，従来のグラフ理論の結果だけでは不十分な場合が生じることが考えられる．従来の結果の中には，グラフを構成してゆくような方向でのグラフの必要十分条件が求められないものが少なくないし，すでに既知の命題に等価であり，それらよりも（生成などにとって）実用的命題の検討が行なわれていない点もある．グラフを文法によって

体系化する方向をとろうとすれば，そのグラフの構成的な必要十分条件に等価な，より簡潔な条件を発見することが必要とされる．たとえば，本論文にも示したが，3-connected graph の生成に anmcswg が本質的であるか，それ以下のクラスの文法での生成可能性は存在しないかという問題を考えてみよう．Tutte は確かにその構成的条件を示しているが，ホイール以外のグラフからの構成の可能性を検討しなければ，この問題に結論をくだすことはできない．(もし，ホイールから出発する以外に方法が無いなら anmcswg が本質的であることは容易に示し得る．) 3-connected graph の特徴をさらに検討せねばならない．同様なことが他のグラフに関してもいえよう．そしてこれは非常に楽観的な見方であるが，新しいグラフの特徴の発見につながる結果を導びくこともあろう．また，別の面の問題として，たとえば Montanari が四色問題の議論を二つの文法の等価性におきかえた（ただし，文法の問題に変換しただけで，本質的解決は行なわれていない）ように，グラフ理論のいくつかの問題を文法系の問題——等価性，閉包性など——に変換して，従来より研究されて来た句構造文法の結論を参照して，これらの問題を考察するといった点も注目に値するのではないだろうか．

最後に，グラフの認識に関する問題について言及すれば，与えられたグラフが指定されたいくつかの構造を持っているかという問題への解法の一つとして，ウエップ文法をパーサーとして利用することが考えられる．与グラフの部分グラフが，グラフ理論の言葉で記述された条件をみたすか否かをチェックすることは，あまり容易であるとはいえない．たとえば，あるグラフがライングラフか否かをチェックする場合，特別な九種のグラフをそのインデュートサブグラフとして含まないか，オッドライアングルに関する条件が成立するかなどを調べることは容易でないことも少なくない．

したがって，グラフを新しく見なおして考察する必要性，ウエッブ文法の決定問題，ウエッブ認識機械構成などの必要性が認識されねばならない．

終りにあたり，日頃より御協力いただく田中研究室の諸氏，特に江沢義典君に感謝いたします．

参考文献

1) J. L. Pfaltz, A. Rosenfeld; Web Grammars. Proc. Inter. J. C. on Artificial Intelligence, Washington, D. C., pp. 609-619 (May, 7-9, 1969).
2) U. G. Montanari; Sparable Graphs, Planar Graphs and Web Grammars, Inform. Control, Vol. 16, pp. 243-267 (1970).
3) A. C. Shaw; A Formal Picture Description Shceme as a Basis for Picture Processing Systems, Inform. Control, Vol. 14, pp. 9-52 (1969).
4) 安部，水本，豊田，田中；ウエップ文法と二，三のグラフ，信学論（C），Vel. 54-C, No. 12, pp. 1149-1154.
5) 安部，水本，豊田，田中；ウエップ文法とその言語クラスについて，昭和46年，関西支部，G 226.
6) 江沢，安部，水本，豊田，田中；ウエップ文法とウエップオートマトン，同支部，G 227.
7) F. Harary; Graph Theory, Addison-Wesley Publishing Company, (1969).

(昭和46年9月22日　受付)
(昭和47年4月6日　再受付)