

## 資 料

## 立方根の有理関数近似\*

二宮市三\*\* 山村正明\*\*\*

## Abstract

In this paper, the best rational approximations in Moursund's sense for  $\sqrt[3]{x}$  on the intervals  $[1/2, 1]$ ,  $[1/4, 1/2]$ ,  $[1/8, 1/4]$ ,  $[1/8, 1]$  and  $[1/10, 1]$  are obtained. Similar approximations by means of rational functions of  $\sqrt{x}$  are recapitulated from a previous paper.

The comparisons of these approximations reveal the following facts: Among those with the fixed sum  $(k+m)$ , where  $k$  and  $m$  are the degrees of the numerator and the denominator respectively, those of the type  $k=m$  or those of the type  $k=m+1$  are the most accurate. When  $k$  and  $m$  are fixed, those based on  $\sqrt{x}$  are more accurate

## 1. ま え が き

有理関数近似の一般論およびこれらを求めるアルゴリズムの一般論については多くの研究が発表され、ほとんどの問題が解明されたといつてよい。しかしながら具体的な特殊関数の有理関数近似については、研究の発展は質量共に未だしの感があり、今後の研究に待つところ大である。

この分野における一つの例外は平方根の問題である。最近発表された一連の論文 Moursund & Taylor [1], Philips [2], Ninomiya [3], [4], King [5] らにより、「相対誤差に関する従来の Chebyshev 近似は Newton 法の出発近似としては最良でない」こと、「Newton 法の出発近似として最良な近似——Moursund 近似——は対数誤差に関する Chebyshev 近似と一致する」こと、および「これらの最良近似の中の最も重要なもの一分母、分子が同次、または分子が一次だけ高い——は解析的に求められる」ことが解明された。また実際の近似式も多く発表されて、あらゆる問題が解決されつくしたと言つてよいであろう。

この平方根に最も類似した立方根については、平方根のような理論的な結果は得られていない。実際の近

似式についてはかなり発表されたものがあり、たとえば Kogbetliantz [6], 魚木・山内 [7], Hart [8], などの近似式があり、特に Hart の本には Chebyshev の意味での最良近似式が多く発表されている。

本報では立方根の Moursund の意味の最良有理関数近似を 2 進, 10 進の各場合について分母, 分子の次数を広汎に変化させて求め、それらを精度および計算量について比較検討し、近似式の選択の基準を与えた。また将来平方根が金物で計算できるような計算機が現われることを考慮して、平方根を用いた立方根の最良近似式を種々作成した。

これらの近似式を比較して観察される著しい事実の一つは変域と近似の形式を固定すると、立方根の最良近似の方が平方根のそれよりも精度が高く、平方根を用いた近似式は更に精度が高いということである。

以下節を追つて研究の内容を説明する。

## 2. Chebyshev の定理

Chebyshev の定理については周知であると思うが、本報で使用する記号の説明を兼ねて概説する。

有限閉区間  $[a, b]$  で連続な関数  $f(x)$  が与えられているとき、 $f(x)$  を有理関数

$$R_{km}(x) = \frac{P_k(x)}{Q_m(x)} = \frac{\sum_{i=0}^k a_i x^i}{\sum_{j=0}^m b_j x^j} \quad (1)$$

\* Rational Approximations for Cubic Root, by Ichizo Ninomiya (Faculty of Engineering, Nagoya University) and Masaaki Yamamura (Department of Mechanical Engineering, Chubu Institute of Technology)

\*\* 名古屋大学工学部

\*\*\* 中部工業大学機械・生産機械工学科

で近似することを考えよう。ただし、 $R_k(x)$  と  $Q_m(x)$  は互に素であるとする。 $w(x)$  を区間  $[a, b]$  で定義された正の連続関数として、

$$g_{km} = \max_{[a, b]} w(x) |R_{km}(x) - f(x)| \quad (2)$$

を最小にするような  $R_{km}^*(x)$  が存在するとき、これを重み  $w(x)$  に関する最良近似という。 $w(x)=1$  なら絶対誤差、 $w(x)=1/f(x)$  なら相対誤差についての最良近似を与える。このような最良近似が存在し、一義的に定まることを明らかにしたのが Chebyshev の定理である。この唯一の有理関数を次のように表わす。

$$R_{km}^*(x) = \frac{\sum_{i=0}^{k-\nu} a_{i+\nu} x^i}{\sum_{j=0}^{m-\mu} b_{j+\mu} x^j} = \frac{P_k^*(x)}{Q_m^*(x)} \quad (3)$$

ここに、

$$0 \leq \nu \leq k, \quad 0 \leq \mu \leq m, \quad a_k^*, \quad b_m^* \neq 0. \quad (4)$$

Chebyshev の定理は最良近似の特性づけについても明らかにしている。すなわち、 $[a, b]$  において連続な関数

$$\varepsilon(x) = w(x) [R_{km}^*(x) - f(x)] \quad (5)$$

が符号の交互に変わる  $\pm g_{km}^*$  なる極値を取り、その極値は  $(N+2-d)$  よりすくなくない。ここに、 $d = \min(\nu, \mu)$ 、 $N = k+m$  とする。これが  $R_{km}^*(x)$  が最良近似であるための必要十分条件である。

以下の存在、一義性および特性づけは  $x$  の代りに  $\sqrt{x}$  を用いてもまったく同様に成立する。

この定理を基にして、次節以下で実際の近似式の計算について述べる。

### 3. 立方根の最良近似の計算法

(1), (2) 式において、 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 、 $w(x) = 1/\sqrt[3]{x}$  とすれば、立方根の相対誤差に関する有理関数近似の問題になる。また (1) 式において、特に  $Q_m(x) = 1$  とおけば多項式の問題となるので、ここでは多項式近似についても同時に考えることにする。

(5) 式を立方根の問題に書き換えると、

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= [R_{km}^*(x) - \sqrt[3]{x}] / \sqrt[3]{x} \\ &= \frac{R_{km}^*(x)}{\sqrt[3]{x}} - 1 = G(x) - 1. \end{aligned} \quad (6)$$

この  $\varepsilon(x)$  なる誤差曲線が  $N+2 = k+m+2$  個の偏差点  $X(=x_0^*, x_1^*, \dots, x_{k+m+1}^*)$  を持っており、これらの点で  $|\varepsilon(x)|$  が最大値をとり、かつ  $\varepsilon(x)$  が交互に正・負となる。つまり、次のような関係式が成り立つ。

$$|\varepsilon(x)| = \max |\varepsilon(x)|, \quad (n=0, 1, \dots, N+1),$$

$$\varepsilon(x) = -(\varepsilon(x_{n+1})), \quad (n=0, 1, \dots, N). \quad (7)$$

または、

$$G(x_n) + G(x_{n+1}) = 2, \quad (n=0, 1, \dots, N). \quad (8)$$

さて、最良近似を実際に求めることを考えてみよう。未知数としては、有理関数の係数と、区間の両端以外の偏差点がある。係数は全部で  $(k+m+2 = N+2)$  個あるが、その中の一つはあらかじめ任意に決めてよいから本質的には  $(N+1)$  個である。従って未知数の総数は  $(2N+1)$  個である。これに対して条件式は (8) 式より  $(N+1)$  個、および偏差点  $X$  において  $\varepsilon(x)$  が極値をとるため (両端を除いて) の条件

$$\varepsilon'(x_n) = 0 \quad (n=1, 2, \dots, N) \quad (9)$$

が  $N$  個で、計  $(2N+1)$  個である。よって未知数と関係式の数が一致し、原理的に解くことができる。実際に計算する場合、 $N$  が小さいときは比較的容易であるが  $N$  が大きくなるに従って困難となる。

具体的な計算法はすべて共通に次のような反復法による。

(i) 有理関数の係数、偏差点の初期値を決定する。係数の初期値は同じ型の Padé 近似の係数とする。偏差点の初期値の取り方は後述する。

(ii) 前の段階で求められた偏差点の近似値を (8) 式に代入して、これを係数について解き、係数の新しい近似値を求める。

この計算は非線形の連立方程式になるため、解の初期値を必要とする。その初期値としては現在得られている係数の近似値を用いる。次に (iii) へ行く。

(iii) 前の段階で得られた係数の近似値を (9) 式に代入して、偏差点の新しい近似値を求める。

(9) 式は実際には  $N$  次代数方程式で、これを Newton 法を用いて解く。

ここで収束を判定し、収束しない時は (ii) にもどる。

偏差点の初期値を求めるためにまず、分母・分子が同次の場合を解く。変域を  $[a, 1/a]$  とすれば、変域に対称性があり、未知数が半減して解きやすい。これは Phillips [2], King & Phillips [9] らによる対数誤差に関する最良近似であるが、今回の標準域  $[a, b]$  に変換すればよい。次に  $N$  が偶数の場合には同じ  $N$  に対する上の場合の偏差点を初期値とする。 $N$  が奇数の場合には  $(N-1)$  と  $(N+1)$  の場合の偏差点の値から適当に推測する。

以上のようにして  $[1/10, 1]$  の範囲における  $k=0, 1, 2, 3, 4, m=0, 1, 2, 3, 4$  のそれぞれ  $k, m$  の組み

合せ25通りについて近似式を作成した。

そして、2進法計算機のために  $[1/2, 1]$ ,  $[1/4, 1/2]$   $[1/8, 1/4]$ ,  $[1/8, 1]$  の範囲についても、次節で述べる有利なものについて近似式を求めた。

4. 近似式の項数とその比較

前節で述べたごとく、 $[1/10, 1]$  について25種類の近似式を作成したが、それらの近似式と、以前に山村 [10], [11] が計算した、平方根を用いた多項式および有理関数近似と今回の初期値となった Padé 展開および Taylor 展開 (範囲の取り方が多少異なる) を一括して Fig. 1 に項数と誤差の関係を図示した。

Fig. 1 において、本来点と点の間はあり得ないので一本の線で結ぶべきものではないが、関連性がよく分るためあえて結んでみた。実線は  $m$  を一定にして  $k$  を変化させた場合、破線は  $N$  を一定にした場合、点が  $\square$  印の場合は特殊な場合を示す。また縦軸は  $\epsilon_i = \log_{10}(1/\epsilon_0)$  とした。この図から言えることは、

- (I) 普通の  $x$  の多項式、有理関数に比べ、平方根を用いた多項式、有理関数で近似したものが目立って精度が高い。
- (II)  $N$  を一定にして比較してみると、 $k=m$  あるいは  $k=m+1$  の場合が最も有利である。
- (III)  $k$  軸に対して  $m$  の変化は傾きが大きくなるが、項数を増す割に精度は上がらなくなる。

この経験より、 $[1/10, 1]$ ,  $[1/8, 1]$ ,  $[1/2, 1]$  の3つの範囲の近似式を上記 (II) の意味で有利なもののみについて  $N$  と  $\epsilon_i$  の比較をしたのが、Fig. 2 である。この図では本来、多項式の0次のタイプ、つまり  $k=m$  の場合と多項式の1次のタイプ、つまり  $k=m+1$  の場合の2つの性質のものを傾向がよく分るよう一本の線で結んでみた。そのため線の上・下に少しずつずれているが、本来0次と1次のそれぞれのタイプについて一本ずつ計2本の線で結ぶべきものである。この図より  $N$  と  $\epsilon_i$  の関係がだいたい直線的であることが分る。

前節の手順により求めた近似式の係数と最大相対誤差は (II) の意味で最も有利なもののみについて Table 1 に、平方根を用いた多項式、有理関数の近似式についてはそれぞれ Table 2, Table 3 に示した。この平方根を用いた多項式において、魚木 [7] は  $N=2$  に相当する近似式を発表しているけれども、それは最良近似になっていない。ここに示した近似式はすべて最良近似式である。比較のために Fig. 3 魚木の式と  $N=2$

の近似式の誤差曲線を示す。これによると魚木の式は係数の丸めによる誤差が含まれている程度である。

5. Newton 法の出発近似としての考察

ここで計算した近似式は単独でも、特に高次の式ではかなりの精度が得られるが、近似式によって得た値を出発値として Newton 法にかけるとさらに高精度

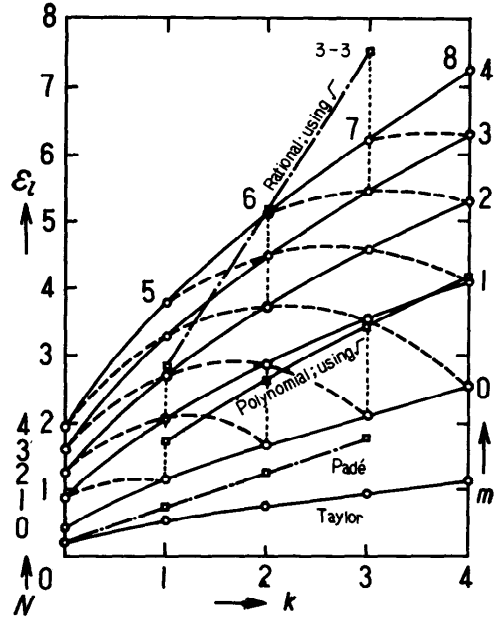


Fig. 1 Comparison between the error on  $[1/10, 1]$  and the degree ( $k$  and  $m$ ).

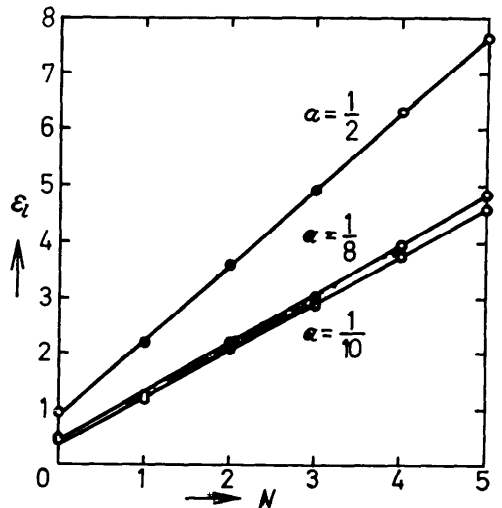


Fig. 2 Comparison of the error with the degree  $N$  and the intervals.

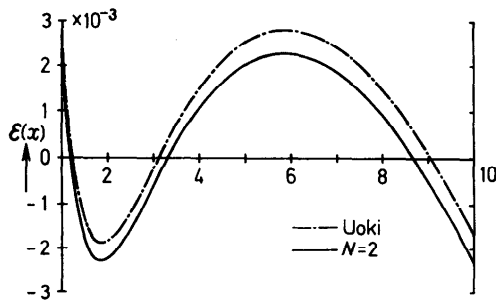


Fig. 3 Relative error curve for  $\sqrt[3]{x}$  of  $N=2$  in Table 2.

が得られる。

Newton 法としては立方根を  $f(x)=x^2-a/x=0$  の根として求めるための反復式

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= \frac{1}{2} \left[ x_i + \frac{3a}{2x_i^2 + a/x_i} \right] \\ &= \frac{x_i(x_i^3 + 2a)}{2x_i^3 + a} \end{aligned} \quad (11)$$

を用いるのがよい。それはこの反復式が比較的計算が簡単でありながら3次の収束性、

$$\varepsilon_{i+1} \approx \frac{2}{3} \varepsilon_i^3 \quad (12)$$

を持つからである。

しかし、2次の収束性を持った通常の反復式の場合によっては捨て難い式である。この Newton 法を行なう場合、Chebyshev の意味での  $R_{1,m}^*(x)$  は上方に偏している。これを Newton 法 (2次の収束性を持ったもの) のための最良近似に改良するには、

$$(1-\varepsilon_0^2)^{-2/3} \quad (13)$$

を単に  $R_{1,m}^*(x)$  に乗ずればよいことが Ninomiya [3] によって証明されている。精度のかなり高い場合はこの改良はほとんど影響しないが、精度の低い場合にはこれが影響する。ここに示した近似式はすべてこの変換を行い、Moursund の最良近似として与えた。Table 1 に示した  $\varepsilon_0$  は最良近似式自体の最大相対誤差を、 $\varepsilon_1$  は上記改良を行なって2次の収束性を持った Newton 法を1回行なった後の最大相対誤差を意味する。

3次の収束性をもった反復式 (11) を用いる時も同様の修正が可能であるけれども、その影響は実際上ほとんど無視できるので、出発近似としてここに示した近似式を用いてよい。

次に、ここで計算した範囲は計算機の種類あるいは計算の容易さの点から、 $a=1/2, 1/8, 1/10, b=1$  に

限ったが当然この範囲以外についても必要となる。その場合には次のような変換公式を用いれば容易に全領域にまで使用できる。

いま求められた  $[a, b]$  における近似式を、

$$[a, b] \quad R_0(x) = R_{1,m}^*(x) \quad (14)$$

とおき、 $p$  倍だけずらした範囲を  $[p \cdot a, p \cdot b]$  とすると、一般に変換式は

$$[pa, pb] \quad R_p(x) = R_0(x/p) \sqrt[3]{p} \quad (15)$$

となる。この式で範囲を変換しても  $\varepsilon(x)$  はまったく変化しないことは明らかであろう。

2進法の計算機のために立方根のサブルーチンを作る時の便宜を考えて、上記3つの範囲の他に、 $[1/2, 1]$  の近似式から上述の変換により、 $[1/4, 1/2]$ ,  $[1/8, 1/4]$  での近似式をも求めた。

もちろん使用範囲は  $[1/10, 1]$  であっても区間を細分して、部分区間で  $[1/2, 1]$  の近似式を使用すれば精度も上り、2進、10進の両方に使うことができるので場合によっては便利である。しかし、この場合は細分の仕方に注意しないとかえって時間的損失となる恐れがある。細分の一つの例として Kogbentiantz [6] は  $10^{-3} \leq f(x) \leq 1$  を5つの範囲に細分しているが、必ずしもこれが最良であるとは限らず、その計算機に即した方法を見いだすべきである。

## 6. あとがき

$[1/10, 1]$  について25種類の近似式を計算し、その誤差を項数と比較したが、それによると  $N$  を一定にした場合においては  $k=m$  と  $k=m+1$  の場合が有利である。また、平方根の計算が容易であれば平方根を用いた近似式がさらに有利である。

この  $k=m$  と  $k=m+1$  の場合の近似式を  $[1/2, 1]$ ,  $[1/8, 1]$ ,  $[1/10, 1]$  の各範囲について  $N$  と  $\varepsilon_0$  とを比較してみると、 $N$  が増すにつれて指数的に精度が高くなる。

これらの近似式はすべて Newton 法のための最良近似であり、立方根の使用頻度の多い場合には全域に適用できるよう近似式と Newton 法を適当に組み合わせ、計算機内に組み込んでおくことと便利である。

この計算はすべて中部工業大学計算センター FAC-OM 270-30 を使用した。

本報がまとまるに至ったのは問題を提起し、絶えざる御鞭撻を賜った前中部工業大学福原達三教授によるところ多大である。ここに改めて謝意を表わす。また計算を手伝ってくれた中部工業大学学生吉田典高君

にも謝意を表わす。

参 考 文 献

- 1) D. G. Moursund & G. D. Taylor, Optimal Starting Values for the Newton-Raphson Calculation of Inverses of Certain Functions, SIAM J., Numer. Anal., Vol. 5, No. 1, 1968, pp. 138-150.
- 2) D. L. Phillips, Generalized Logarithmic Error and Newton's Method for the  $m$ th Root, Math. Comp., Vol. 24, No. 110, 1970, pp. 383-389.
- 3) I. Ninomiya, Generalized Rational Chebychev Approximation, Math. Comp., Vol. 24, No. 109, 1970, pp. 159-169.
- 4) I. Ninomiya, Best Rational Starting Approximations and Improved Newton Iteration for the Square Root, Math. Comp., Vol. 24, No. 110, 1970, pp. 391-404.
- 5) R. F. King, Improved Newton Iteration for

Integral Roots, Math. Comp., Vol. 25, No. 114, 1971, pp. 299-304.

- 6) E. G. Kogbentliantz, Computation of  $\sin N$ ,  $\cos N$  and  $\sqrt[N]{N}$  Using an Electronic Computer, IBM J., Res. and Devel. 3, 1959, pp. 147-152.
- 7) 魚木五夫・山内二郎, 計算機のための函数近似公式集第1集(宇野利雄編), 数理科学総合研究第IV班第5分科会, 1962, pp. 3-5.
- 8) J. F. Hart (ed.), Computer Approximation, John Wiley and Sons, 1969, pp. 95-96, pp. 87-88.
- 9) R. F. King & D. L. Phillips, The Logarithmic Error and Newton's Method for the Square Root, Comm. ACM, Vol. 12, No. 2, 1969, pp. 87-88.
- 10) 山村正明, 平方根を用いた立方根の多項式近似, 中部工大紀要, 第5巻, 1969, pp. 9-13.
- 11) 山村正明, 平方根を用いて立方根を求めるための有理関数近似, 中部工大紀要, 第6巻, 1970, pp. 19-23.

Table 1 Optimal starting values for Newton iteration of the Cubic Root on  $[a, b]$

$N=0 \quad R(x)=A$					$N=1 \quad R(x)=A_0x+A$					
$a$	$b$	$A$	$\epsilon_0$	$\epsilon_1$	$a$	$b$	$A_0$	$A$	$\epsilon_0$	$\epsilon_1$
1/10	1	0.69782	0.366	0.06966	1/10	1	0.63892	0.43421	0.06966	0.0*242
1/8	1	0.72112	0.333	0.05738	1/8	1	0.60555	0.45416	0.05738	0.0*164
1/2	1	0.89288	0.115	0.00664	1/2	1	0.41535	0.59132	0.00664	0.0*220
1/4	1/2	0.70868	0.115	0.00664	1/4	1/2	0.65931	0.46933	0.00664	0.0*220
1/8	1/4	0.56248	0.115	0.00664	1/8	1/2	1.04659	0.37251	0.00664	0.0*220

$N=2 \quad R(x)=A+E/(x+S)$									
$a$	$b$	$A$	$E$	$S$	$\epsilon_0$	$\epsilon_1$			
1/10	1	1.43721 354	-0.74330 026	0.66708 699	0.0*876	0.0*379			
1/8	1	1.47747 451	-0.84145 598	0.73873 203	0.0*650	0.0*211			
1/2	1	1.79070 740	-1.91514 570	1.42128 538	0.0*255	0.0*325			
1/4	1/2	1.42128 540	-0.76002 608	0.71064 269	0.0*255	0.0*325			
1/8	1/4	1.12807 497	-0.30161 655	0.35532 134	0.0*255	0.0*325			

$N=3 \quad R(x)=A_0x+A+E/(x+S)$							
$a$	$b$	$A_0$	$A$	$E$	$S$	$\epsilon_0$	$\epsilon_1$
1/10	1	0.25751 578	0.86219 710	-0.14788 274	0.24947 237	0.0*136	0.0*919
1/8	1	0.24379 932	0.88989 382	-0.16989 857	0.27960 794	0.0*919	0.0*422
1/2	1	0.16628 465	1.09604 161	-0.41050 430	0.56493 468	0.0*123	0.0*075
1/4	1/2	0.26396 044	0.86992 880	-0.16290 874	0.28246 734	0.0*123	0.0*075
1/8	1/4	0.41901 107	0.69046 295	-0.06465 038	0.14123 367	0.0*123	0.0*075

$N=4 \quad R(x)=A+\frac{D}{x+R}+\frac{E}{x+S}$								
$a$	$b$	$A$	$D$	$E$	$R$	$S$	$\epsilon_0$	$\epsilon_1$
1/10	1	2.01230 49849	-3.28144 85071	-0.07428 23112	2.30500 95590	0.16036 73558	0.0*177	0.0*157
1/8	1	2.06860 41213	-3.68042 86643	-0.09205 15289	2.52170 42056	0.18151 71373	0.0*109	0.0*595
1/2	1	2.50699 24588	-8.07953 72996	-0.35450 02028	4.61797 93132	0.38144 43566	0.0*494	0.0*112
1/4	1/2	1.98980 12332	-3.20636 65022	-0.08862 50507	2.30898 96566	0.19072 21783	0.0*494	0.0*112
1/8	1/4	1.57930 62854	-1.27244 73896	-0.02215 62609	1.15449 48283	0.09536 10892	0.0*494	0.0*112

$$N=5 \quad R(x) = A_0x + A + \frac{D}{x+R} + \frac{E}{x+S}$$

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>A</i> <sub>0</sub>	<i>A</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>R</i>	<i>S</i>	$\epsilon_0$	$\epsilon_1$
1/10	1	0.15042 31853	1.17371 15590	-0.58335 95297	-0.02512 83020	0.82244 52525	0.11413 48997	0.0*265	0.0*352
1/8	1	0.14237 57003	1.20863 50332	-0.65937 95058	-0.03156 48366	0.90653 14719	0.12991 26162	0.0*148	0.0*109
1/2	1	0.09701 16804	1.47502 09144	-1.49326 48310	-0.12840 13837	1.71082 40198	0.27928 28139	0.0*228	0.0*1*
1/4	1/2	0.15399 64435	1.17072 48756	-0.59260 25409	-0.03210 03459	0.85541 20099	0.13964 14069	0.0*228	0.0*1*
1/8	1/4	0.24445 41164	0.92920 49495	-0.23517 44742	-0.00802 50837	0.42770 60049	0.06982 07035	0.0*228	0.0*1*

Table 2 Polynomial approximations by using square root on [1/10, 1]

$N=1 \quad R(x) = A_0\sqrt{x} + A$   
 $N=2 \quad R(x) = A_1x + A_0\sqrt{x} + A$   
 $N=3 \quad R(x) = A_2\sqrt{x^2} + A_1x + A_0\sqrt{x} + A$   
 $N=4 \quad R(x) = A_3x^2 + A_2\sqrt{x^3} + A_1x + A_0\sqrt{x} + A$

<i>N</i>	1	2	3	4
<i>A</i> <sub>3</sub>				-0.16109 77031
<i>A</i> <sub>2</sub>			0.16651 31	0.57514 76434
<i>A</i> <sub>1</sub>		-0.2245	-0.53779 56	-0.90770 59620
<i>A</i> <sub>0</sub>	0.798	1.0743	1.25625 75	1.39695 36309
<i>A</i>	0.220	0.1479	0.11560 63	0.09663 05231
$\epsilon_0$	0.018	0.0023	0.00038 13	0.00007 18675

Table 3 Rational approximations by using square root on [1/√10, √10]

$N=2 \quad R(x) = (B + \sqrt{x}) / (1 + B\sqrt{x})$   
 $N=4 \quad R(x) = (B + C\sqrt{x} + x) / (1 + C\sqrt{x} + Bx)$   
 $N=6 \quad R(x) = (B + C\sqrt{x} + Dx + \sqrt{x^3}) / (1 + D\sqrt{x} + Cx + B\sqrt{x^3})$

<i>N</i>	2	4	6
<i>D</i>			4.27772 63429
<i>C</i>		1.61105 339	2.11932 49034
<i>B</i>	0.19459	0.09729 863	0.06191 74796
$\epsilon_0$	0.00144	0.00000 689	0.00000 00349

(昭和47年 2月 7日 受付)

(昭和47年 4月 22日 再受付)