4記号5状態の万能TURING機械*

渡 辺 茂**

Abstract

Since the first universal Turing machine (UTM) was made in 1937, its size has become smaller and smaller through many trials of obtaining a minimum UTM. The UTM for which the product of number of symbols and number of states is the smallest in the published papers is 4-symbol 7-state UTM made by Dr. M. Minsky. In this paper, the author has got 4-symbol 5-state UTM (18 quintuples) as shown in Table 7.

1. まえがき

万能TURING機械の記号数と状態数との積は，どこまで小さくなるものであろうか．これまで発表されたもののうち，この積が30以下の機械を挙げればTable 1のとおりである．

Table 1

記号	状態	命令	作 者	文 献	
5	6	28	渡辺 茂	情報処理,	1961年5月
4	7	27	M. Minsky	Computation,	1967年
3	9	26	後藤 英一	私 信,	1966年7月
3	7	21	渡辺 茂	MCB研究会資料,	1966年12月

ここでは，まず4記号6状態の機械（22命令）を作り，さらにこれを縮小して4記号5状態の機械（18命令）を作る．

2. 機械 T_1 を変換し T_4 を作ること

任意に与えられたTURING機械を T_1 とする．まずこれを2記号右無限テープのTURING機械に変換する．この結果できたTURING機械を T_2 とする．T_2 の命令はつぎの形式（1）であらわされるものとする***.

（1） $q_i s_j:\ s_k \rightleftarrows q_l$

すなわち状態 q_i で，テープのコマに記された記号 s_j をみるときは，その記号を s_k とし，右移動（→）または左移動（←）し，状態 q_l になることを（1）は意味している．ここで記号 s_j, s_k はいずれも0または1である．

さて記号 s_j と移動とに注目すれば，命令（1）はつぎのように分類される．

（2） 記号0をみたとき右移動（→）する．

$q_i0:\ s_k \to q_l$.

（3） 記号0をみたとき左移動（←）する．

$q_i0:\ s_k \leftarrow q_l$.

（4） 記号1をみたとき右移動（→）する．

$q_i1:\ s_k \to q_l$.

（5） 記号1をみたとき左移動（←）する．

$q_i1:\ s_k \leftarrow q_l$.

ところで，T_2 のテープに記された0を2記号で01と書きあらため，1を10と書きあらためると，かくしてできた新しいテープ上のどの記号の左右にも，多くとも3コマ目にはかならず0か1かが存在することになる．これはつぎの例示によっても明らかである．たとえば T_2 のテープ上の記号列が

00110

であるとすれば，これと上述の規則によって書きあらためると，

0101101001

となる．このテープで T_2 を書きあらためた機械を T_3 とする．

念のため T_3 のテープの性質のうち以下に必要なことを繰り返して述べると，つぎのようになる．

（T_3 のテープの性質） どの記号0も，その右方2コマ以内に1があり，どの記号1も，その左方2コマ以内に0がある．

このような性質があれば，命令（1）は，上記の（2）

---

* 4-Symbol 5-State Universal Turing Machine, by Shigeru Watanabe (Faculty of Engineering, University of Tokyo).

** 東京大学工学部

*** TURING 機械については参考文献（1）参照.

と（5）の形のみを限定して用いることにしても一般性を失なうことはない．すなわち記号0をみたときは，かならず右移動（→）し，記号1をみたときは，かならず左移動（←）するように，T_3 を作りかえ，これを T_4 とする．このような作りかえが可能であることを証明するには，つぎの2つのことを示せばよい．

a）（3）の場合すなわち記号0をみたとき左移動（←）する場合を，（2）と（5）の形のみであらわすこと．

b）（4）の場合すなわち記号1をみたとき右移動（→）する場合を．（2）と（5）の形のみであらわすこと．

これらは，つぎのようにして確認される．まず a）の場合は，記号0をみたとき，その0を1にかえ，ひとまず右移動（→）するために（2）を用いる．となりのコマが0ならば，ふたたびその0を1にかえて右移動（→）する．すると，T_3 のテープ（すなわち T_1 のテープ）の性質により，1コマ目か2コマ目かにはかならず1があるから，今度は（5）を用いて左移動（←）をしていけば，所期の目的が達せられるわけである．b）の場合もまったく同様である．

3. 4記号6状態の万能 TURING 機械

a）テープの作動域

この万能 TURING 機械のテープは，右半分の作動域と左半分の辞書とよりなり，右半分の作動域は，T_4 のテープをそのまま用いるものとする．

b）テープの辞書

左半分の辞書には T_4 の機能表を記すことにする．T_4 は，0をみたときはかならず右移動（→）し，1をみたときはかならず左移動（←）するから，辞書には，つぎの記号が0であるか1であるかだけを表示すればよい．そこで0ならば辞書に1と表示し，1ならば11と表示することにする．

つぎの状態を表示するためには，辞書に0を α 個ならべることにする．（α の値については後述．）

したがって，左半分の辞書に記すべきものは，命令（1）における q_is_j のそれぞれの $i=1, 2, \cdots, N$; $j=1, 2$ にたいして

$$0'0^{\alpha}1^{\beta} \quad (\beta=1, 2)$$

のような形となる．これを単語 (q_i, s_j) と定義することにする．ここで $0'$ は単語の区切りをあらわす目印である．

そこで左半分の辞書は，まずその右端に単語 $(q_1, 0)$ をおいて

$$(q_N, 1)(q_N, 0)\cdots(q_2, 1)(q_2, 0)(q_1, 1)(q_1, 0)$$

のように配列される．それのみならず，さらにこの配列を無限に左方にくりかえしてならべる．

なお単語中の0の数をあらわす α はつぎのようにして定める．すなわち命令（1）において q_i のつぎの状態は q_l であったから，辞書において，単語 (q_i, s_j) から，それより左方に位する最初の単語 $(q_l, 0)$ の右方までに存在する $0'$ の数を α とするのである．

c）スタートの仕方

T_4 の最初の状態を q_f とすれば，テープの辞書の一番右方にある単語 $(q_f, 0)$ より右方にある $0'$ をすべて0としておく．そして T_4 が最初にみるコマと同じコマを，この万能 TURING 機械は状態 A でみることにする．

d）作動域から単語 (q_i, s_j) まで

Table 2 に示すとおり，作動域の1コマを状態 A でみると，そのコマが0ならば B となり，1ならば C となって，左移動（←）をつづけ，B ならば単語 $(q_f, 0)$ の $0'$ に，C ならば状態 B をへて単語 $(q_f, 1)$ の $0'$ に到達する．

Table 2

	0	1	0′	1′
A	←B	←C		
B	0′←	1′←	→A	
C	0′←	1′←	←B	

e）(q_i, s_j) からつぎの $(q_l, 0)$ までの間の $0'$ を0としていく．これは Table 3 によって遂行される．

Table 3

	0	1	0′	1′
A			0←D	
D	0′←	1′←	0→E	
E	→A		0→	1→

f）(q_i, s_j) の中の1を数えて E か F かを択ぶ．これは Table 4 によって遂行される．

Table 4

	0	1	0′	1′
A				0→D
D			0→E	0→F

g）(q_i, s_j) から作動域へ帰る．これは Table 5 によって遂行される．

Table 5

	0	1	0′	1′
E	→A	0←A	0→	1→
F	1→A	←A	0→	1→

h）機能表

Table 2 から Table 5 までを1つの表にまとめると，4記号6状態（22命令）の万能 TURING 機械の機能表をうる．Table 6 のとおりである．

Table 6 Transition table of 4-symbol 6-state universal Turing machine

	0	1	0′	1′
A	$\leftarrow B$	$\leftarrow C$	$0\leftarrow D$	$0\rightarrow D$
B	$0'\leftarrow$	$1'\leftarrow$	$\rightarrow A$	
C	$0'\leftarrow$	$1'\leftarrow$	$\leftarrow B$	
D	$0'\leftarrow$	$1'\leftarrow$	$0\rightarrow E$	$0\rightarrow F$
E	$\rightarrow A$	$0\leftarrow A$	$0\rightarrow$	$0\rightarrow$
F	$1\rightarrow A$	$\leftarrow A$	$0\rightarrow$	$0\rightarrow$

4. 4記号5状態の万能 TURING 機械

4記号5状態の万能 TURING 機械のテープの構造は，4記号6状態のそれにくらべて非常に複雑になる．ゆえに，はじめに複雑なテープの構造を述べることにしても，何故そのような構造にしなければならないかを説明するのに多言を要し冗漫になるので，ここではまず機能表を述べ，つぎのその機能表を使用するためには，テープをどう書かなければならないかという順序で説明することにしたい．

a）機能表は Table 7 のとおりである．

Table 7 は，Table 6 の状態 D が省略されたほかは，記号 1′ にたいする命令等が若干変更されているのみである．この変化は，しかしながら，必然的にテープの構造を大幅に書きかえることを要請する．

Table 7 Transition table of 4-symbol 5-state universal Turing machine

	0	1	0′	1′
A	$\leftarrow B$	$\leftarrow C$	$0\leftarrow C$	$0'\rightarrow D$
B	$0'\leftarrow$	$1'\leftarrow$	$0\rightarrow A$	
C	$0'\leftarrow$	$1'\leftarrow$	$\leftarrow B$	
D	$\rightarrow A$	$0\leftarrow A$	$0\rightarrow$	$1\rightarrow E$
E	$1\rightarrow A$	$\leftarrow A$	$0\rightarrow$	$1\rightarrow D$

さて，この機能表の機能を述べるとつぎのとおりになる．

b）作動域から単語 (q_i, s_j) まで

これは4記号6状態の場合とまったく同じであり，作動域で0をみれば，最初の0′のある単語に行き，1をみれば二番目の0′のある単語に行く．

c）(q_i, s_j) から新しい単語へ

Table 7 では，Table 6 の D が省略されているので，(q_i, s_j) 中の 0′ を状態 A でみると，状態 C になって左移動（←）をはじめる．そして状態 B をへて A にもどるが，そこで右移動（→）を開始させるためには，単語はつぎの形でなければならない．

$0'10^{\alpha}1^{\beta}$

結局 A, C, B, A のサイクルによって，2つの 0′ を0とし，1つの 0′ を加え，差引き1つの 0′ を減じることになる．

新しい単語に到達したあと，もとの (q_i, s_j) に帰ってくるためには，状態 D, E を用いる．すなわち 1′ をみるたびに D と E とはたがいに入れかわるので，最後にもとの (q_i, s_j) の0のあるコマにもどってきたときには，その0を，0か1かにして右移動（→）し，状態 A になる．

d）(q_i, s_j) から作動域へ

(q_i, s_j) の 1′ を状態 A でみたとき，右移動（→）をはじめ，状態 D, E を交互に使いながら，作動域のもとのコマにもどる．そのコマの記号を0とするか1とするかは，(q_i, s_j) から，このコマの左のコマまで，の間にある 1′ の個数（これを γ とする）が，奇数か偶数かによる．この 1′ の個数 γ は，あらかじめ単語 (q_i, s_j) を設計するさいに，β を奇偶いずれにするかによって，調整されるが，この β をきめる手順の詳細についてはつぎに述べる．

e）β のきめ方

この機械のテープにおいて，右方の作動域と左方の辞書との間に1コマ設け，これを境界コマと呼ぶことにする．境界コマの記号は0と考えておく．

(q_i, s_j) 中の右方にある 1′ を状態 A でみたあと，状態 D になり，それ以降は D と E とを交互に用いて，作動域中の所定のコマに帰ることになるが，この帰るべきコマのことをターゲットと呼ぶことにする．

さて (q_i, s_j) から境界コマまでの間の 1′ の個数を γ_1 とし，境界コマからターゲットの左のコマまでの間の 1′ の個数を γ_2 とすれば，

$$\gamma=\gamma_1+\gamma_2$$

である．ここで，γ_2 は，この万能 TURING 機械の作動域中におけるターゲットの移動とともに絶えず変化するが，その変化の様子はつぎのとおりである．

（1） 0をみたあと右移動（→）する場合：

0を0に書きかえるとき γ_2 は変化せず，0を1に書きかえるとき γ_2 は +1 の増加となる．

（2） 1をみたあと左移動（←）する場合：

左コマの記号が0ならば γ_2 は変化せず，1ならば γ_2 は −1 の減少となる．

(1), (2) の内容はあらかじめ辞書を作るさいに考慮にいれ，万能 TURING 機械の動作に不都合を来さないように設計することが可能である．すなわち単語 (q_i, s_j) をすべての i, j にたいして2種類ずつ用意しておき，一つは γ_1 が奇数になるように β を定め，他は γ_1 が偶数になるように β を定めておけばよい．何となれば，(q_i, s_j) のつぎの状態を q_l とし，かつ (1), (2) の状況によって γ_2 が奇偶を変えるか変えないかを知って，状態 q_l にたいする2種類の単語のどちらかをきめ，それに到達できるように (q_i, s_j) 中の0の個数 α をきめればよいからである*.

なお (q_i, s_j) 中の0のいくつかは，(q_i, s_j) から $(q_l, 0)$ までの間の $0'$ を0にするさいに，1となるので，この1の個数も考慮して γ_1 を数えなければならないが，これもあらかじめ設計可能である．

f) ふたたび作動域から単語へ

まえに d) において，単語 (q_i, s_j) 中の $1'$ を状態 A でみたとき，そのコマを記号 $0'$ にしてから右移動 (→) を行なったので，作動域のターゲットに帰ったのち，ふたたび辞書に行くとき，その出発点になるコマの記号が0ならば，まえと同じ単語のコマ（上述の記号 $0'$ のコマ）に行くことになり，出発点になるコマの記号が1のときはじめて辞書中の新しい単語へ行くことが可能になる．ただしいうまでもなく，この新しい単語は，$0'10^\alpha1^\beta$ の形ではなく，すでに $0'0^\alpha1^\beta$ の形に変化したものであることは，c) の経過によって明らかである．

g) テープ作動域の形式

このように，出発点になるコマの記号が0のときはまえと同じ単語に行くという性質があるので，この万能 TURING 機械のそれ以降の動作に大きな制約が生じる．この制約の下で円滑な動作を行なわせるために，テープの作動域をつぎのように記すことにする．

前述の TURING 機械 T_2 のテープ 0, 1 を，T_4 では 01, 10 としたが，ここでは 1010, 1011 とする．たとえば

00110

にたいしては

10101010101110111010

となる．このようなテープにおいては，0とかかれたコマの左のコマはかならず1であり，1とかかれたコマの左方3コマ以内にはかならず0があるから，「0をみたときは右移動 (→) のみ，1をみたときは左移動 (←) のみ」という制限で TURING 機械を作ることができることは，T_4 と同様である．このようにして作った TURING 機械を T_5 とし，この万能 TURING 機械のテープの作動域は，T_5 のテープと同じものを用いることにする．そうすると，つぎのことが確認される．

h) 作動域における動作

作動域で1をみたあとは，辞書中の新しい単語に行くことができるから，その単語中の1の個数 β をあらかじめ定めておくことによって，ターゲットの1を0にすることも1のままにすることも可能である．

しかし作動域で0をみたあとは，辞書中でその直前にいた単語にふたたび行くことになるから，この場合は，つぎの2つの動作が可能であるかどうかを確認しておかなければならない．

(1) 作動域で0をみたとき，そこを0として右移動 (→) できるか．

作動域で0をみるまえには，テープの構造から明らかなように，かならずその右のコマの1をみる．そこでこの1を1のままとして左移動(←)したあとで0をみれば，もとの単語に行き，その後の γ は $\gamma-1$ となるから，ターゲットの0は0のままで右移動 (→) し，ふたたび1をみる．ターゲットの記号を，その上方にバーをつけて示せば，

$0\bar{1} : \bar{0}1 : 0\bar{1}$

のような経過をたどるから，これで (1) の疑問は肯定的に確認されたことになる．

(2) 作動域で0をみたとき，そこを1として右移動 (→) できるか．

作動域で0をみるまえに，その右コマの1をみるが，その1を0として左移動 (←) したあとで0をみれば，この場合も γ が $\gamma-1$ になるから，ターゲットの0は1となり右移動 (→) して0をみる．このあと，みたびもとの単語へ帰るが，そこに1をつづけて置いておけば，γ_1 は γ_1-1 となり，γ_2 は γ_2+1 となるから，この場合の γ には増減はない．したがってターゲットの0は1となる．ターゲットの記号を，その上方にバーをつけて示せば，$s=0$ または1として，

$0\bar{1} : \bar{0}0 : 1\bar{0} : 11\bar{s}$

のような経過をたどるから，これで (2) の疑問は肯定的に確認されたことになる．

i) 結論

以上において，Table 7 は，たしかに万能 TURING

* この考え方は，後藤英一氏が3記号9状態の万能 TURING 機械を作ったさいに，はじめて案出されたものである．

機械の機能表になることが証明されたので，4記号5状態の万能 TURING 機械（18 命令）が存在することが分った．

5. む す び

万能 TURING 機械のテープには，かならず左方に辞書をおき，右方に作動域をおくものと考えても多分一般性を失なわないであろう．そして辞書と作動域の間を往復しながら情報を伝えるものとすれば，つぎの4種類の命令が必要になる．

（1） 作動域の任意の1つのコマにある記号0か1かの情報を，辞書に伝える用意をするための命令は，少くとも2種類必要である．

（2） 作動域から辞書へ左移動（←）し，2つ以上の情報を伝えるための命令は，少くとも4種類必要である．何となれば，作動域の1つのコマから辞書の1つのコマまでの間にある多くのコマには最小2つの記号があるはずであり，そこを通過して2つの状態が左移動（←）するからである．

（3） 辞書から作動域へ右移動（→）し，2つ以上の情報を伝えるための命令は，少くとも4種類必要である．これは（2）と同様の理由による．

（4） 作動域の1つのコマにおいて，T_4 または T_5 のような模擬すべきものと同じ動作をするための命令は，少くとも2種類必要である．

以上の合計は 2+4+4+2=12 であり，これらは共用できない．ゆえに万能 TURING 機械の命令は，少くとも 12 種類を必要とする．

ここで得た万能 TURING 機械は，4記号5状態，18 命令であるが，これより小さくなるかどうかは不明である．

参 考 文 献

1) 高橋秀俊，計算機械Ⅱ，岩波（1958）．
2) M. Minsky,: Computation, finite and infinite machines, Prentice-Hall (1967).

（昭和 46 年 11 月 9 日 受付）