量子化器の最適設計*

津 川 定 之** 寺 尾 満**

Abstract

This paper discusses the problem of the minimum distortion of a signal in quantizers taking account of the entropy of the quantized signal and presents a new criterion for the design of the optimal quantizer. The measure of the distortion is defined by the expected value of some function of the error between the input and the output of the quantizer. Assuming that the amplitude of the input signal is normally distributed, three kinds of quantizers, an optimal quantizer, an optimal equilevel quantizer and an entropy maximizing optimal quantizer are designed numerically. The results indicate that the optimal quantizer designed by the new criterion in which the expected value of the relative error is employed instead of the mean squared error as the measure of the distortion has the compatibility for both minimum distortion and maximum entropy of the quantized data.

量子化による伝送信号の劣化については，画像信号の処理や波形伝送に関連して論じられており，最適量子化についても，いくつかの研究がある[1)2)3)]．すなわち，ランダム入力信号の振幅分布が与えられたとき，どのように量子化器を設計すれば，波形歪が最小となるかが問題となる．最適量子化器では，通常の量子化器にくらべて量子化器の段数をへらせるから，ディジタル信号の語長が短くなり，量子化したあとの情報処理量をへらすことができる．

Max は，入力信号の振幅が平均 0，分散 1 の正規分布に従うとき，波形歪を平均 2 乗誤差で定義して最適量子化器および最適一様量子化器を設計した[1)]. Roe は量子化器の入力レベルと量子化器の段数との関係を表わす近似式を与えた[2)]. Wood は平均 2 乗誤差で定義された波形歪および量子化された信号の持つ平均情報量と段数の関係を表わす近似式を与え，むしろ，通常の一様量子化器の方が，同じ程度の波形歪に対して量子化データの平均情報量が小さく，通信容量を節減できて有利だとしている[3)].

ここでは，より豊かな情報量をもつデータが場合によっては，より大きな波形歪を与えるというこれまでの研究にみられる一種の矛盾は，波形歪の評価方法からくることを指摘し，あらたに，一つの評価方法を提案する．それによれば，平均情報量を最大にするような最適量子化は，波形歪最小の最適量子化にほぼ一致することになる．

1. 最適量子化器の設計

いま，量子化による波形歪 D を次式で定義する．

$$D=\sum_{i=1}^{N}\int_{x_i}^{x_{i+1}} w(x)f(x-y_i)p(x)dx \qquad (1)$$

ここで，N: 量子化器の出力段数，x: 入力信号の振幅，x_i: 量子化器の入力レベル ($i=1,2,\cdots,N+1$), y_i: 量子化器の出力レベル ($i=1,2,\cdots,N$), $w(x)$: 重み関数，$f(x-y_i)$: 波形歪を表わす関数，$p(x)$: 入力信号の振幅の確率密度関数である．すなわち，入力信号の振幅 x が x_i と x_{i+1} との間にあるとき，量子化器の出力信号が y_i になる．また $x_1=-\infty$, $x_{N+1}=+\infty$ とする．

ここでは次の 3 種類の量子化器を考えよう．

i) 最適量子化器 (Optimal Quantizer)

これは，波形歪 D が最小となるように入出力レベル $x_i(i=2,\cdots,N)$, $y_i(i=1,\cdots,N)$ を設定した量子化器で，x_i, y_i は $\partial D/\partial x_i=0$ 及び $\partial D/\partial y_i=0$ より得られる次の 2 つの方程式の根で与えられる．$\partial D/\partial x_i=0$ より

$$f(x_i-y_{i-1})=f(x_i-y_i),\quad i=2,3,\cdots,N \qquad (2)$$

$\partial D/\partial y_i=0$ より

* On Optimal Quantizer, by Sadayuki Tsugawa and Mitsuru Terao (University of Tokyo, Faculty of Engineering)

** 東京大学工学部

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} w(x)f'(x-y_i)p(x)dx=0,\quad i=1,2,\cdots,N. \tag{3}$$

ii）最適一様量子化器 (Optimal Equilevel Quantizer)

これは，通常の一様量子化器で，量子化のステップ幅 d を波形歪 D が最小となるように設定した量子化器で，量子化器の対称性を考えて，たとえば出力段数 N が偶数のとき波形歪 D は，

$$D=2\Big[\sum_{i=1}^{M-1}\int_{(i-1)d}^{id} w(x)f\Big(x-\Big(M-\frac{1}{2}\Big)d\Big)p(x)dx + \int_{(M-1)d}^{\infty} w(x)f\Big(x-\Big(i-\frac{1}{2}\Big)d\Big)p(x)dx\Big] \tag{4}$$

で表わされる．ここで，$N=2M$ である．最適なステップ幅 d は，$\partial D/\partial d=0$ より得られる次の方程式の根で与えられる．

$$\sum_{i=1}^{M-1}\Big(i-\frac{1}{2}\Big)\int_{(i-1)d}^{id} w(x)f'\Big(x-\Big(i-\frac{1}{2}\Big)d\Big)p(x)dx + \Big(M-\frac{1}{2}\Big)\int_{(M-1)d}^{\infty} w(x)f'\Big(x-\Big(M-\frac{1}{2}\Big)d\Big) \times p(x)dx=0. \tag{5}$$

iii）平均情報量を最大にする最適量子化器 (Entropy Maximizing Optimal Quantizer)

量子化された信号の平均情報量は量子化器の入力レベルだけに依存し，波形歪は量子化器の入力レベルと出力レベルの両方に依存するから，量子化された信号の持つ平均情報量が最大になるように量子化器の入力レベルを設定し，そのうえで波形歪が最小となるように量子化器の出力レベルを設定した量子化器がこの量子化器である．まず，量子化器の入力レベルを

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)dx=\frac{1}{N},\qquad i=1,2,\cdots,N \tag{6}$$

に従って設定し，次に出力レベルを（3）式に従って設定する．

2. 相対誤差による波形歪の評価

いま，入力信号の振幅が，平均0，分散1の正規分布に従う場合について，重み関数 w，および波形歪を表わす関数 f をいくつか選んで量子化器を設計し，おのおのの量子化器について波形歪および量子化された信号のもつ平均情報量を求めよう．

まず，波形歪を平均2乗誤差で評価すると $w(x)=1$*，$f(x)=x^2$ となり，このときまえにあげた3種類の量子化器の波形歪および量子化された信号のもつ平均情報量を計算すると，平均情報量を最大にする最適量子化器の波形歪が著しく大きく，したがって「良さ」の評価を平均情報量におくか，または波形歪にするかで最適量子化器の設計がかなり大きく相違してくる．このような結果になるのは，波形歪の評価に際して，絶対誤差の2乗を用いたためであり，さきに指摘したより豊かな情報量を持つデータがより大きな波形歪を与えるという矛盾の原因はここにある．

そこでこの矛盾をなくしてより自然な結果を得るために，波形歪を相対誤差を用いて次のように定義しよう．ただし，この場合零点では相対誤差が一般に定義されないので，零点付近では絶対誤差を用いる**．

$$w(x)=\begin{cases}10\,c & |x|<0.1\\ c/|x| & |x|\geq 0.1\end{cases} \tag{7}$$

$$c=1.041,\qquad f(x)=|x| \tag{8}$$

このとき3種類の量子化器の波形歪，平均情報量を Fig. 1 に示す．また量子化器の出力段数を10段にしたときの量子化器の入出力レベルを Table 1 に示

Table 1 Input and output levels for optimal, entropy maximizing optimal and optimal equilevel quantizer calculated by the new design criterion when $N=10$.

	Optimal	Entropy maximizing optimal	Optimal equilevel
Input levels	0.0000 (0.0000)	0.0000 (0.0000)	0.0000 (0.0000)
	0.2440 (0.4047)	0.2533 (0.2533)	0.2497 (0.4908)
	0.5534 (0.8339)	0.5244 (0.5244)	0.4993 (0.9816)
	0.8930 (1.325)	0.8416 (0.8416)	0.7490 (1.472)
	1.359 (1.968)	1.282 (1.282)	0.9986 (1.963)
Output levels	0.09404 (0.1996)	0.09585 (0.1259)	0.1248 (0.2454)
	0.3940 (0.6099)	0.3611 (0.3864)	0.3745 (0.7362)
	0.7129 (1.058)	0.6561 (0.6773)	0.6241 (1.227)
	1.073 (1.591)	1.014 (1.045)	0.8738 (1.718)
	1.645 (2.345)	1.573 (1.755)	1.123 (2.209)

Data in parentheses show the levels through the conventional design criterion.

* $w(x)$ は出力段数が1のとき波形歪 D が1となるように選ぶ．すなわち $\int_{-\infty}^{\infty} w(x)f(x)p(x)dx=1$ となるように w の係数をきめる．

** 絶対誤差への切替点を0.1に選んだが，これ位に選べばそれ以上小さくしても結果はほぼ同じになる．

*** 量子化器は対称性をもつから，入出力レベルの正の部分だけを示す．

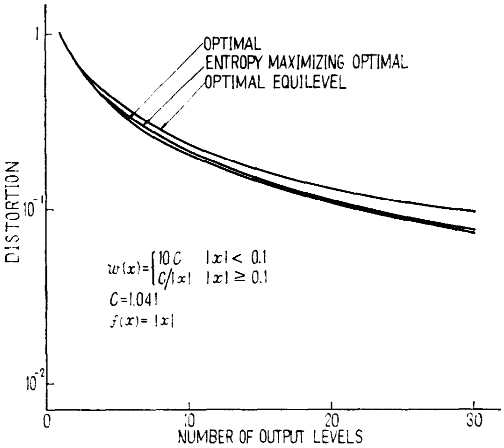

Fig. 1 (a) Distortion versus number of output levels for optimal, entropy maximizing optimal and optimal equilevel quantizer evaluated by the mean relative error.

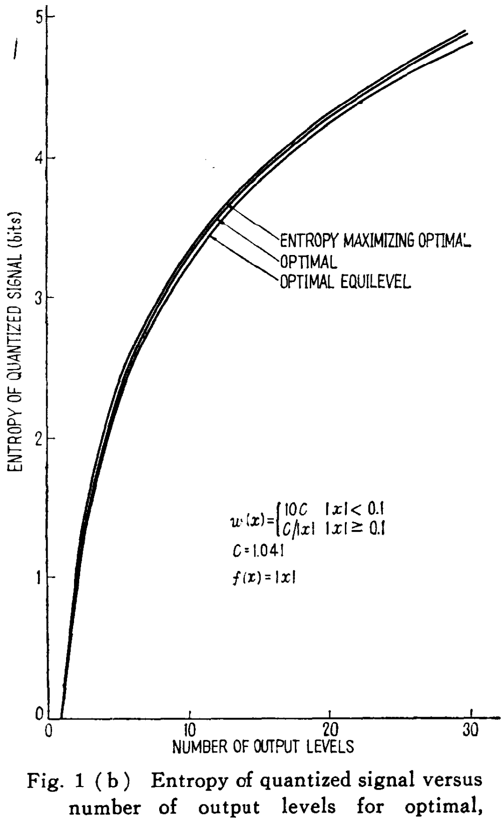

Fig. 1 (b) Entropy of quantized signal versus number of output levels for optimal, entropy maximizing optimal and optimal equilevel quantizer evaluated by the mean relative error.

す***.

Fig. 1 や Table 1 から明らかなように，波形歪を相対誤差で評価すると，さきに指摘した矛盾はなくなり，最適量子化器の平均情報量は平均情報量を最大にする最適量子化器のそれにほぼ一致することになり，量子化器の出力段数を固定したとき量子化データの平均情報量を大きくすれば波形歪も少ないという自然な結果になる．しかも，この二つの量子化器の入出力レベルはほぼ一致しており，Table 1 のなかに付記した従来の平均 2 乗誤差による設計法による結果よりも，零点に近いところでこまかく遠いところで粗く量子化している．

3. む す び

ここで強調したいのは，最適量子化器の設計のよりどころとなる波形歪の評価には，絶対誤差の 2 乗ではなく相対誤差をとるのが適当だということである．すなわち，単に大きい誤差をますます重視するという立場よりは，信号の大きさに応じて誤差を評価する方がデータ伝送などの実情に適合していることになる．

この結論は，量子化データがもつ平均情報量を最大にする最適量子化が，どのような評価方式による波形歪を最小化していることになるかという逆問題を解析的に解くことで得られたものではなく，むしろ，直感的に，波形歪の評価に相対誤差を導入して，数値計算によって量子化器を設計した結果が上の逆問題の解に近いことを確かめたものである．しかも，(7)，(8) 式に示した形の相対誤差は測定の誤差の評価にも常用されており，量子化データの平均情報量を増してデータを精密にすれば，精度のよい波形伝送ができるというごく自然な結果にもなる．

この研究での数値計算には，東京大学大型計算機センターを利用した．

参 考 文 献

1) J. Max, "Quantizing for Minimum Distortion," IRE Trans. Information Theory, vol. IT-6, pp. 7-12 (1960).
2) G. M. Roe, "Quantizing for Minimum Distortion," IEEE Trans. Information Theory, vol. IT-0, pp. 384-385 (1964).
3) R. C. Wood, "On Optimum Quantization," IEEE Trans. Information Theory, vol. IT-15, pp. 248-252 (1969).

(昭和 47 年 5 月 24 日受　付)
(昭和 47 年 8 月 4 日再受付)