ショート・ノート

極大縮小言語について*

伊　藤　正　美**

Abstract

In this paper, we define first the maximal restriction of a language. If there is at least one restriction of a language, we can assure the existence of its corresponding maximal restriction. In this case, we can investigate the structure of this maximal restriction from the point of view of the linguistic theory of the analytical models. We apply these results to a finite-state language.

1. はじめに

この小論において，われわれはまず極大縮小言語の定義を与え，次にそれに関する若干の性質，特に分析モデル言語理論[1]との関連についてのべる．なお，必要な言葉，記号については筆者の論文[2]を参照されたい．

2. 極大縮小言語

定義．下記の条件(1)，(2)がみたされるとき，言語 $\boldsymbol{M}=(B, M)$ は言語 $\boldsymbol{L}=(A, L)$ の直径 n*** の極大縮小言語であるという．

(1)　$\boldsymbol{M}$ は $\boldsymbol{L}$ の直径 n の縮小言語である．

(2)　$d(\boldsymbol{N})=n$ なる任意の $\boldsymbol{L}$ の縮小言語 $\boldsymbol{N}=(C, N)$ に対して，M が N の真部分集合となることはない．

3. 極大縮小言語の存在性

定理1．言語 $\boldsymbol{M}=(B, M)$ を言語 $\boldsymbol{L}=(A, L)$ の縮小言語とする．このとき，$\boldsymbol{L}$ の極大縮小言語 $\boldsymbol{N}=(C, N)$ で，$d(\boldsymbol{N})=d(\boldsymbol{M})$ かつ $M\subseteq N$ なる性質をもつ言語 $\boldsymbol{N}$ が存在する．

証明．$\boldsymbol{L}$ の縮小言語のうち，その直径が $d(\boldsymbol{M})$ に等しく，かつ，その文の集合が $\boldsymbol{M}$ の文の集合を含むようなものの全体を $\{\boldsymbol{H}_\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ であらわす．(すなわち，$\boldsymbol{H}_\lambda=(D_\lambda, H_\lambda)$, $d(\boldsymbol{H}_\lambda)=d(\boldsymbol{M})$, $M\subseteq H_\lambda$, $B\subseteq D_\lambda\subseteq A$, $\lambda\in\Lambda$.) このとき，この集合 $\{\boldsymbol{H}_\lambda ; \lambda\in\Lambda\}$ に対して，次のような半順序関係≦をいれる．

① $H_\lambda\subset H_\mu$ なら $\boldsymbol{H}_\lambda\leqq\boldsymbol{H}_\mu$.

② $H_\lambda=H_\mu$, $D_\lambda\subseteq D_\mu$ なら $\boldsymbol{H}_\lambda\leqq\boldsymbol{H}_\mu$.

今，この半順序関係による任意の部分順序列 $\boldsymbol{\Omega}=\{\boldsymbol{H}_\mu ; \mu\in\Sigma, \Sigma\subseteq\Lambda\}$ が与えられているとする．このとき，$\boldsymbol{\Omega}$ が半順序関係≦に関して上界をもつことがいえれば，Zorn の補題より，$\{\boldsymbol{H}_\lambda ; \lambda\in\Lambda\}$ は半順序関係≦に関して極大要素をもつことになり，この極大要素を $\boldsymbol{N}$ とおくことにより，定理の成立をみることが出来る．

$D=\bigcup_{\mu\in\Sigma} D_\mu$, $H=\bigcup_{\mu\in\Sigma} H_\mu$ とおき，言語 $\boldsymbol{H}=(D, H)$ をつくる．今，$\boldsymbol{H}$ が $\boldsymbol{L}$ の直径 $d(\boldsymbol{M})$ なる縮小言語であることがいえれば，$\boldsymbol{H}$ のつくりかたから，$\boldsymbol{H}$ が $\boldsymbol{\Omega}$ の上界であることがわかる．したがってこのことを証明する．

$x, y (x\neq y)$ を H の任意の2元とする．まず $\mathrm{dis}(x, y)_{\boldsymbol{H}}=\mathrm{dis}(x, y)_{\boldsymbol{L}}$ を証明する．$H=\bigcup_{\mu\in\Sigma} H_\mu$，また $\boldsymbol{\Omega}$ は順序集合より，ある Σ の元 ξ が存在して $x, y\in H_\xi$ となる．ところで，$\mathrm{dis}(x, y)_{\boldsymbol{H}_\xi}=\mathrm{dis}(x, y)_{\boldsymbol{L}}$．一方，$H_\xi\subseteq H\subseteq L$ より，$\mathrm{dis}(x, y)_{\boldsymbol{L}}\leqq\mathrm{dis}(x, y)_{\boldsymbol{H}}\leqq\mathrm{dis}(x, y)_{\boldsymbol{H}_\xi}$ となるから，$\mathrm{dis}(x, y)_{\boldsymbol{H}}=\mathrm{dis}(x, y)_{\boldsymbol{L}}$ がなりたつ．

次に，$d(\boldsymbol{H})=d(\boldsymbol{M})$ なることをみる．まず，μ を Σ の任意の要素とする．$d(\boldsymbol{H}_\mu)=d(\boldsymbol{M})$ より，H_μ の2元 w, z が存在して $\mathrm{dis}(w, z)_{\boldsymbol{H}_\mu}=\mathrm{dis}(w, z)_{\boldsymbol{L}}=d(\boldsymbol{M})$ となる．$H_\mu\subseteq H$ より，$w, z\in H$ かつ $\mathrm{dis}(w, z)_{\boldsymbol{H}}=\mathrm{dis}(w,$

---

* On the Maximal Restriction of a Language, by Masami ITO (Kyoto Sangyo University)

** 京都産業大学理学部

*** 直径 n の極大縮小言語が存在する場合もそれはかならずしも一意的にはきまらない．なお，ある特定の言語に対する極大縮小言語の個数に関しては，次の機会に論ぜられよう．

$z)_{\boldsymbol{L}}=d(\boldsymbol{M})$ となる．したがって $d(\boldsymbol{H})\geq d(\boldsymbol{M})$ がなりたつ．次に H の任意の2元 x,y に対して，先にみたように，ある Σ の要素 ξ が存在して $x,y\in H_\xi$ となるから $\mathrm{dis}(x,y)_{\boldsymbol{H}}=\mathrm{dis}(x,y)_{\boldsymbol{L}}=\mathrm{dis}(x,y)_{\boldsymbol{H}_\xi}\leq d(\boldsymbol{M})$ となる．したがって，$d(\boldsymbol{H})=d(\boldsymbol{M})$ がいえ定理は証明された．

4. E-同値類との関係

極大縮小言語の構造を分析モデル言語理論との関連においてしらべよう．まず，準備として一つの定義を与える．

定義[1]．$\boldsymbol{L}=(A,L)$ を一つの言語とする．A^+ の2元 x,y に対して下記の条件 (※) がなりたつとき，x と y は E-同値であるといい，x を含む E-同値類を $S(x)$ であらわす．

(※)　任意の文脈 $(\alpha,\beta)(\alpha,\beta\in A^*)$ に対して，$\alpha x\beta$ と $\alpha y\beta$ は，同時に L に属するか，同時に L に属さないかのいずれかである．

われわれの得た結果は，E-同値類の集合と極大縮小言語との間の一つの関係である．

定理2．言語 $\boldsymbol{M}=(B,M)$ が言語 $\boldsymbol{L}=(A,L)$ の一つの極大縮小言語であるとする．この時 $M=\bigcup_{x\in M}S(x)$ とあらわされる．

証明．$N=\bigcup_{x\in M}S(x)$ とおく．このとき，$M\subseteq N\subseteq L$ はあきらかである．次に，$\boldsymbol{N}=(A,N)$ とおく．今，言語 $\boldsymbol{N}$ が，言語 $\boldsymbol{L}$ の直径 $d(\boldsymbol{M})$ なる縮小言語であることがいえるなら，言語 $\boldsymbol{M}$ の極大性より $M=N$ となり定理は証明される．したがって，$\boldsymbol{N}$ が $\boldsymbol{L}$ の直径 $d(\boldsymbol{M})$ なる縮小言語であることを示そう．

x,y を N の任意の元とする．このとき，$\mathrm{dis}(x,y)_{\boldsymbol{N}}=\mathrm{dis}(x,y)_{\boldsymbol{L}}$ を証明しよう．$x,y\in N$ より，M の2元 x',y' が存在して，$x\in S(x')$，$y\in S(y')$ がなりたつ．今，$x'=x_0',x_1',x_2',\cdots,x_{q-1}',x_q'=y'$ ……(1) を $\boldsymbol{M}$ に於ける，x' と y' を結ぶ鎖とする．このとき，x',y' を x,y でおきかえた A^+ の元の列 $x=x_0,x_1=x_1',x_2=x_2',\cdots,x_{q-1}=x_{q-1}',x_q=y$ ……(2) が $\boldsymbol{N}$ に於ける鎖となることをみよう．(1) が $\boldsymbol{M}$ に於ける鎖であることから，文脈の列 $\{(\alpha_i,\beta_i)\}(i=0,1,2,\cdots,q-1.\ \alpha_i\beta_i\neq\varepsilon)$ が存在し，$\alpha_ix_i'\beta_i\in M,\alpha_ix_{i+1}'\beta_i\in M$ $(i=0,1,2,\cdots,q-1)$ となる．今，$\alpha_0x\beta_0\in N$ $\alpha_{q-1}y\beta_{q-1}\in N$ なることさえ言えば，$M\subseteq N$ より，$\alpha_ix_i\beta_i\in N,\alpha_ix_{i+1}\beta_i\in N$ $(i=0,1,2,\cdots,q-1)$ となり，(2) が $\boldsymbol{N}$ の鎖となることがわかる．ところで，一般に $x\in S(x')$，$\alpha,\beta\in A^*$ に対して $\alpha x\beta\in S(\alpha x'\beta)$ なることがわかるから $\alpha_0x\beta_0\in S(\alpha_0x'\beta_0)$ となる．$\alpha_0x'\beta_0\in M$ より，$\alpha_0x\beta_0\in N$ となる．$\alpha_{q-1}y\beta_{q-1}$ についても同様の推論が出来る．したがって，(2) が $\boldsymbol{N}$ の鎖となるから，$\mathrm{dis}(x,y)_{\boldsymbol{N}}\leq\mathrm{dis}(x',y')_{\boldsymbol{M}}$ が成立する．一方，$N\subseteq L$ より，$\mathrm{dis}(x,y)_{\boldsymbol{L}}\leq\mathrm{dis}(x,y)_{\boldsymbol{N}}$ となる．すなわち，$\mathrm{dis}(x,y)_{\boldsymbol{L}}\leq\mathrm{dis}(x,y)_{\boldsymbol{N}}\leq\mathrm{dis}(x,y)_{\boldsymbol{M}}$ がなりたつ．

次に，$x=x_0,x_1,x_2,\cdots,x_p=y$ を x と y を結ぶ $\boldsymbol{L}$ における鎖であるとする．x,y を x',y' でおきかえた A^+ の列 $x',x_1,x_2,\cdots,x_{p-1},y'$ が $\boldsymbol{L}$ における鎖であることを証明しよう．この場合も上でおこなったと同様の推論により，$\alpha x\beta\in L$ なるとき，$\alpha x'\beta\in L$ なることと，$\gamma y\delta\in L$ なるとき，$\gamma y'\delta\in L$ なることをいえばよいが，このことは，$x\in S(x')$，$y\in S(y')$ よりあきらかである．したがって $\mathrm{dis}(x',y')_{\boldsymbol{L}}\leq\mathrm{dis}(x,y)_{\boldsymbol{L}}$ となる．ところが，$\boldsymbol{M}$ は $\boldsymbol{L}$ の縮小言語であるから，$\mathrm{dis}(x',y')_{\boldsymbol{L}}=\mathrm{dis}(x',y')_{\boldsymbol{M}}$ となる．したがって，$\mathrm{dis}(x',y')_{\boldsymbol{M}}\leq\mathrm{dis}(x,y)_{\boldsymbol{L}}$ がなりたつ．さきに得られた不等式とこの不等式より，$\mathrm{dis}(x,y)_{\boldsymbol{N}}=\mathrm{dis}(x,y)_{\boldsymbol{L}}=\mathrm{dis}(x',y')_{\boldsymbol{M}}$ となり，$\boldsymbol{N}$ が $\boldsymbol{L}$ の縮小言語となることがわかる．一方，$M\subseteq N$ より，x,y を M の任意の2元とすれば，$x'=x,y'=y$ とできるから，上の等式を用いて $d(\boldsymbol{N})=d(\boldsymbol{M})$ がわかる．

5. 有限状態句構造言語への応用

定理2の特定言語への適用を考えよう．われわれの関心は，ある型の言語とその極大縮小言語の型との間の関係をもとめることにある．言語 $\boldsymbol{M}=(B,M)$ を言語 $\boldsymbol{L}=(A,L)$ の極大縮小言語としたとき言語 $\boldsymbol{N}=(A,M)$ も $\boldsymbol{L}$ の極大縮小言語となることに注意しよう．このとき，$\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{N}$ の間には本質的なちがいはないと考えられるから，以後，極大縮小言語としては全て $(A,\cdot)$ というかたちをしているものに限定しよう．

とりあつかう言語 $\boldsymbol{L}$ としては，有限状態句構造言語 (finite-state language) を考える．次の結果は，よく知られている．

定理[1) p.10]．言語 $\boldsymbol{L}=(A,L)$ が有限状態句構造言語であるということと，言語 $\boldsymbol{L}$ における E-同値類の集合 $\{S(x);\ x\in A^+\}$ の元の個数が有限であるということとは同値である．

この事実をもとに，われわれは一つの結果を得ることができる．この結果についてのべる前に，一つの補助定理を与えておく．

補助定理. 言語 $\boldsymbol{M}=(A, M)$ を言語 $\boldsymbol{L}=(A, L)$ の極大縮小言語であるとする．いま，$\{S(x);\ x\in A^+\}$, $\{T(x);\ x\in A^+\}$ をそれぞれ言語 $\boldsymbol{L}$ および言語 $\boldsymbol{M}$ における E-同値類の集合とする．このとき，A^+ の任意の元 x に対して，$S(x)\subseteq T(x)$ がなりたつ．

証明. $y\in S(x)$ とする．このとき $y\in T(x)$ をいう．このためには，$\alpha x\beta\in M$ と $\alpha y\beta\in M$ が同値になることをいえばよい．まず，$\alpha x\beta\in M$ を仮定する．$y\in S(x)$ より，$\alpha y\beta\in S(\alpha x\beta)$ となる．$\alpha x\beta\in M$ なることと定理2より $\alpha y\beta\in M$ となる．次に $\alpha y\beta\in M$ を仮定する．$y\in S(x)$ より $x\in S(y)$ となり，上と同じ推論ができるから $\alpha x\beta\in M$ もいえる．

定理3．$\boldsymbol{L}=(A, L)$ を一つの有限状態句構造言語とする．また，$\boldsymbol{M}=(A, M)$ を言語 $\boldsymbol{L}$ の任意の極大縮小言語であるとする．このとき，$\boldsymbol{M}$ もまた有限状態句構造言語となる．

証明. 補助定理より，言語 $\boldsymbol{M}$ の E-同値類の集合における同値類の個数は，言語 $\boldsymbol{L}$ の E-同値類の集合における同値類の個数をこえない．ところで，言語 $\boldsymbol{L}$ は有限状態句構造言語であるから，E-同値類の集合における同値類の個数は有限である．したがって，言語 $\boldsymbol{M}$ の E-同値類の集合における同値類の個数も有限となる．このことは，言語 $\boldsymbol{M}$ が有限状態句構造言語となることを主張している．

7. むすび

さきの論文[2]においてわれわれは，拡大言語の存在性の問題に比較して縮小言語の存在を論ずることの困難さを指摘したが，この小論はこの問題に対する一つの解答である．言語 $\boldsymbol{L}=(A, L)$ が縮小言語をもつとき，定理1より，それに対応する極大縮小言語が存在し，定理2より，この言語の文は $\boldsymbol{L}$ の適当な E-同値類の和集合としてあらわされることが明らかにされた．したがって，言語 $\boldsymbol{L}$ の縮小言語の存在をみることとは，$\boldsymbol{L}$ の E-同値類相互間の関係をしらべる問題に帰着させることが出来た．特に，有限状態句構造言語の場合には，E-同値類の集合における同値類の個数の有限性ゆえにその取扱いが比較的容易であった．一般の言語に関しては，この制限がないため，問題は複雑になると思われるが，生成文法により規定される言語については，E-同値類の集合とそれぞれの言語の型との間に何らかの対応関係が存在する（または，各型の言語の極大縮小言語に関する知識がこの対応関係を記述する）と思われるので，極大縮小言語の概念が生成文法言語理論と分析モデル言語理論の間の橋渡しの役割をになうことが期待される．

参考文献

1) S. Marcus: Algebraic Linguistics; Analytical Models, Academic Press, 1967.
2) 伊藤正美：文脈空間に関連した拡大言語および縮小言語について，情報処理，13巻，1号，pp. 8～12, 1972.

（昭和46年12月7日受付）
（昭和47年5月23日再受付）