Vol.2012-CVIM-181 No.21
2012/3/16

超精度くりこみ法：複数拘束

金 谷 健 一[†1] アリ・アルシャラドカー[†2]
ニコライ・チェルノフ[†3] 菅 谷 保 之[†4]

前報では幾何学的拘束を利用して誤差のある観測データから対象の 2 次元および 3 次元形状を計算する幾何学的推定のための「超精度くりこみ法」を提案したが，本報ではこれを拘束が複数あって，しかもそれらの方程式が必ずしも互いに独立でない場合に拡張する．このような状況は 2 画像間の対応から射影変換を計算をする問題などいろいろな場面に現れる．まず 最小二乗法の重みを反復更新する重み反復法，および Taubin 法の重みを反復更新するくりこみ法を複数拘束に対してまとめ，超精度最小二乗法の重みを反復更新する超精度くりこみ法の手順を複数拘束に対して導出する．

Hyper-Renormalization: Multiple Constraints

Kenichi Kanatani,[†1] Ali Al-Sharadqah,[†2]
Nikolai Chernov[†3] and Yasuyuki Sugaya [†4]

In our previous paper, we presented "hyper-renormalization" for geometric estimation for computing 2-D and 3-D object shapes observed in the presence of noise, using geometric constraints. In this paper, we extend the result to the case of multiple constraints, whose equations are assumed to be not necessarily mutually independent. Such situations arise in many problems including homography computation from point correspondences between two images. We first formulate iterative reweight starting from least squares and renormalization starting from the Taubin method in the multiple constraint case. Then, we derive the scheme of hyper-renormalization starting from HyperLS in the multiple constraint case.

†1 岡山大学大学院自然科学研究科 Department of Computer Science, Okayama University, Japan
†2 米国ミシシッピー大学数学科 Department of Mathematics, University of Mississippi, U.S.A.
†3 米国アラバマ大学数学科 Department of Mathematics, University of Alabama, U.S.A.
†4 豊橋技術科学大学情報工学系 Department of Information and Computer Sciences, Toyohashi University of Technology

1. まえがき

前報[8]では幾何学的拘束を利用して誤差のある観測データから対象の 2 次元および 3 次元形状を正確に計算する幾何学的推定のための「超精度くりこみ法」を提案したが，本報ではこれを複数拘束に拡張する．問題は次のように定式化される．誤差を含む N 個の観測データベクトル $\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_N$ が得られているとする．これらの誤差がない真値 $\bar{\boldsymbol{x}}_1, ..., \bar{\boldsymbol{x}}_N$ はどれもある L 個の拘束条件

$$F^{(k)}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) = 0, \qquad k = 1, ..., L \tag{1}$$

を満たすとする．ただし，$\boldsymbol{\theta}$ は未知パラメータベクトルであり，これを精密に推定したい．式 (1) 中の $F^{(k)}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})$ は一般に $\boldsymbol{x}$ の複雑な非線形関数であるが，実用的な多くの問題では未知パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ に関しては線形であったり，パラメータをつけ直して線形に表せたりすることが多い．そのような場合は式 (1) が次の形に表せる．

$$(\boldsymbol{\xi}^{(k)}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\theta}) = 0, \qquad k = 1, ..., L \tag{2}$$

ここに $\boldsymbol{\xi}^{(k)}(\cdot)$ は $\mathcal{R}^m$ から $\mathcal{R}^n$ への非線形写像である（m, n はそれぞれデータ $\boldsymbol{x}_\alpha$ とパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の次元）．以下ベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ の内積を $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ と書く．ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ には定数倍の不定性があるので $\|\boldsymbol{\theta}\| = 1$ と正規化する．前報[8]では $L = 1$ の場合を論じた．これは点列への楕円の当てはめや 2 画像間の対応から基礎行列を計算するなど，多くの問題を含んでいるが，問題によっては拘束条件が複数ある場合がある．代表的なものは 2 画像間の対応からの射影変換の計算である．射影変換はベクトル式であるため，その 3 成分が 3 個の拘束条件を与えるが，それらは代数的に従属であり，2 個のみが独立である[10]．これを一般化して，式 (2) 中の L 個の関数 $\boldsymbol{\xi}^{(k)}(\boldsymbol{x})$ のうち r 個のみが代数的に独立であるとする．そして r を式 (2) の拘束条件の「ランク」と呼ぶ．

2. 誤差解析

各データ $\boldsymbol{x}_\alpha$ はその真の値 $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$ に期待値 $\boldsymbol{0}$，共分散行列 $\sigma^2 V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]$ の独立な正規分布に従う誤差 $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ が加わると仮定する．ただし $V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]$ は誤差の方向依存性を表す既知の行列であり，「正規化共分散」と呼ぶ．一方 σ は誤差の絶対的な大きさを表す未知の定数であり，「ノイズレベル」と呼ぶ．以下 $\boldsymbol{x}_\alpha$ を変換した $\boldsymbol{\xi}^{(k)}(\boldsymbol{x}_\alpha)$ を $\boldsymbol{\xi}^{(k)}_\alpha$ と書く．その真の値 $\boldsymbol{\xi}^{(k)}(\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha)$ を $\bar{\boldsymbol{\xi}}^{(k)}_\alpha$ と書くと $\boldsymbol{\xi}^{(k)}_\alpha$ は次のように展開できる．

$$\boldsymbol{\xi}^{(k)}_\alpha = \bar{\boldsymbol{\xi}}^{(k)}_\alpha + \Delta_1\boldsymbol{\xi}^{(k)}_\alpha + \Delta_2\boldsymbol{\xi}^{(k)}_\alpha + \cdots \tag{3}$$

以下，バーは誤差のない項を表し，Δ_k は誤差の k 次の項 $O(\sigma^k)$ を意味する．関数 $\boldsymbol{\xi}^{(k)}(\boldsymbol{x})$ のヤコビ行列を用いると 1 次の誤差項 $\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}$ は次のように書ける．

$$\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)} = \left.\frac{\partial\boldsymbol{\xi}^{(k)}(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha}\Delta\boldsymbol{x}_\alpha \tag{4}$$

そこで $\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}$ の共分散行列を次のように定義する（$E[\cdot]$ は期待値）．

$$\begin{aligned} V^{(kl)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha] &= E[\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)\top}] = \left.\frac{\partial\boldsymbol{\xi}^{(k)}(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha} E[\Delta\boldsymbol{x}_\alpha\Delta\boldsymbol{x}_\alpha^\top] \left.\frac{\partial\boldsymbol{\xi}^{(l)}(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha}^\top \\ &= \sigma^2 V_0^{(kl)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha] \end{aligned} \tag{5}$$

ただし次のように置いた．

$$V_0^{(kl)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha] \equiv \left.\frac{\partial\boldsymbol{\xi}^{(k)}(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha} V_0[\boldsymbol{x}_\alpha] \left.\frac{\partial\boldsymbol{\xi}^{(l)}(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha}^\top \tag{6}$$

式 (6) は真の値 $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$ を含んでいるので実際の計算では観測値 $\boldsymbol{x}_\alpha$ で近似する．多くの実験でこの近似は最終結果に影響を及ぼさないことが確認されている．また $V_0^{(kl)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ はヤコビ行列による 1 次近似に基づいているが，2 次以上の項を考慮しても最終結果に影響がないことが確認されている．

3. 重み反復法

古くから用いられた方法に次の「重み反復法」がある．

（1） $W_\alpha^{(kl)} = \delta_{kl}$（クロネッカデルタ），$\alpha = 1, ..., N$ と置き，$\boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{0}$ とする．

（2） 次の行列 $\boldsymbol{M}$ を計算する．

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^N\sum_{k,l=1}^L W_\alpha^{(kl)}\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)\top} \tag{7}$$

（3） 固有値問題 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{\theta} = \lambda\boldsymbol{\theta}$ を解いて，最小の固有値に対する単位固有ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ を計算する．

（4） 符号を除いて $\boldsymbol{\theta} \approx \boldsymbol{\theta}_0$ なら $\boldsymbol{\theta}$ を返して終了する．そうでなければ次のように更新してステップ (2) に戻る．

$$W_\alpha^{(kl)} \leftarrow \Big((\boldsymbol{\theta}, V_0^{(kl)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{\theta})\Big)_r^-, \qquad \boldsymbol{\theta}_0 \leftarrow \boldsymbol{\theta} \tag{8}$$

ここに $\Big((\boldsymbol{\theta}, V_0^{(kl)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{\theta})\Big)_r^-$ は $(\boldsymbol{\theta}, V_0^{(kl)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{\theta})$ を (kl) 要素とする行列のランク r の一般逆行列の (kl) 要素を表す．ただしランク r の一般逆行列とはスペクトル分解して大きい r 個以外の固有値を 0 に置き換えた行列の一般逆行列のことである．

背景．この方法の動機は次式を最小にする「重み付き最小二乗法」である．

$$\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^N\sum_{k,l=1}^L W_\alpha^{(kl)}(\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}, \boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^N\sum_{k,l=1}^L W_\alpha^{(kl)}\boldsymbol{\theta}^\top\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)\top}\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{M}\boldsymbol{\theta}) \tag{9}$$

よく知られているように，上式を最小にする $\boldsymbol{\theta}$ は行列 $\boldsymbol{M}$ の最小固有値に対する単位固有ベクトルである．統計学によれば重み $W_\alpha^{(kl)}$ は項の共分散の逆行列に比例するようにとるのが最適であることが知られている．$(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}, \boldsymbol{\theta}) = 0$ であるから $(\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}, \boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)}, \boldsymbol{\theta}) = (\Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}, \boldsymbol{\theta})(\Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)}, \boldsymbol{\theta}) + \cdots$ であり，共分散の主要項は

$$\begin{aligned} &E[(\Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}, \boldsymbol{\theta})(\Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)}, \boldsymbol{\theta})] = E[\boldsymbol{\theta}^\top\Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}\Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)\top}\boldsymbol{\theta}] = (\boldsymbol{\theta}, E[\Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}\Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)\top}]\boldsymbol{\theta}) \\ &= \sigma^2(\boldsymbol{\theta}, V_0^{(kl)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{\theta}) \end{aligned} \tag{10}$$

である．ゆえにこれを (kl) 要素とする行列の逆行列の (kl) 要素を $W_\alpha^{(kl)}$ とするべきであるが，拘束が独立でないとき逆行列が存在しない．その場合は L 個の拘束から独立な r 個を選ぶ．これはランク r の一般逆行列を用いることに相当する．しかし，$\boldsymbol{\theta}$ は未知である．そこで反復を行い，前回の反復で求めた $\boldsymbol{\theta}$ から重み $W_\alpha^{(kl)}$ を定め，これを反復する．

注意． $W_\alpha^{(kl)} = \delta_{kl}$ として最初に計算される解（便宜上「初期解」と呼ぶ）は $\sum_{\alpha=1}^N\sum_{k=1}^L(\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}, \boldsymbol{\theta})^2$ を最小にするものであり，古くから知られている「最小二乗法」（「代数距離最小化」とも呼ばれる[2]）である．これから出発して式 (8) のように重みを更新すると，次式が最小化されるように思える．

$$J = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^N\sum_{k,l=1}^L W_\alpha^{(kl)}(\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}, \boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)}, \boldsymbol{\theta}), \qquad W_\alpha^{(kl)} = \Big((\boldsymbol{\theta}, V_0^{(kl)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{\theta})\Big)_r^- \tag{11}$$

これは「サンプソン誤差」と呼ばれる．しかし，重み反復法はこれを最小にするものではない．なぜなら，反復の各ステップで $W_\alpha^{(kl)}$ を定数とみなして J を最小にする $\boldsymbol{\theta}$ を計算しているからである．事情は前報[8] の単一拘束の場合と同じである．

問題点．文献 7) の方法論によって解析すると，解 $\boldsymbol{\theta}$ の共分散行列 $V[\boldsymbol{\theta}]$ は $O(\sigma^4)$ を除いて「KCR 下界[1),5)–7)]」と呼ばれる精度の理論限界に一致することが示される（詳細省略）．したがって解の分散をこれ以上改善することはできない．しかし，実験によると[6)]，この方法は非常に大きな偏差があるために精度が非常に低い．筆者らのくりこみ法[3),4)] はこの偏差

を除去する工夫である．

4. くりこみ法

筆者らが提案したくりこみ法[6] は次のように記述できる．

(1) $W_\alpha^{(kl)} = \delta_{kl}$, $\alpha = 1, ..., N$ と置き，$\boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{0}$ とする．

(2) 次の行列 $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ を計算する．

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L} W_\alpha^{(kl)}\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)\top}, \qquad \boldsymbol{N} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L} W_\alpha^{(kl)} V_0^{(kl)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha] \tag{12}$$

(3) 一般固有値問題 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{\theta} = \lambda\boldsymbol{N}\boldsymbol{\theta}$ を解いて，絶対値最小の一般固有値に対する単位一般固有ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ を計算する．

(4) 符号を除いて $\boldsymbol{\theta} \approx \boldsymbol{\theta}_0$ なら $\boldsymbol{\theta}$ を返して終了する．そうでなければ次のように更新してステップ (2) に戻る．

$$W_\alpha^{(kl)} \leftarrow \Big((\boldsymbol{\theta}, V_0^{(kl)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{\theta})\Big)_r^-, \qquad \boldsymbol{\theta}_0 \leftarrow \boldsymbol{\theta} \tag{13}$$

文献 6) ではステップ (3) を固有値問題に置き換えて解く方法されて示しているが，解は同一である．

背景．式 (12) の行列 $\boldsymbol{M}$ を真値 $\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}$ によって定義したものを $\bar{\boldsymbol{M}}$ とすると，$(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}, \boldsymbol{\theta}) = 0$ であるから $\bar{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{0}$ である．そこで $\bar{\boldsymbol{M}}$ を推定する．$E[\Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}] = 0$ であるから $\boldsymbol{M}$ の期待値は次のようになる．

$$\begin{aligned} E[\boldsymbol{M}] &= E[\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L} W_\alpha^{(kl)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)} + \Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)})(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(l)} + \Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha)^{(l)\top}] \\ &= \bar{\boldsymbol{M}} + \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L} W_\alpha^{(kl)} E[\Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}\Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)\top}] \\ &= \bar{\boldsymbol{M}} + \frac{\sigma^2}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L} W_\alpha^{(kl)} V_0^{(kl)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha] = \bar{\boldsymbol{M}} + \sigma^2\boldsymbol{N}. \end{aligned} \tag{14}$$

ゆえに $\bar{\boldsymbol{M}} = E[\boldsymbol{M}] - \sigma^2\boldsymbol{N} \approx \boldsymbol{M} - \sigma^2\boldsymbol{N}$ であるから $\bar{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{0}$ の代わりに $(\boldsymbol{M} - \sigma^2\boldsymbol{N})\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{0}$ すなわち $\boldsymbol{M}\boldsymbol{\theta} = \sigma^2\boldsymbol{N}\boldsymbol{\theta}$ を解く．σ^2 は小さいと仮定して，絶対値最小の一般固有値とみなす．そして，重み反復法と同様に W_α を $\Big((\boldsymbol{\theta}, V_0^{(kl)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{\theta})\Big)_r^-$ に近付くように反復更新する．

注意．$W_\alpha^{(kl)} = \delta_{kl}$ とする初期解は $\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k=1}^{L}(\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}, \boldsymbol{\theta})^2$ を $(\boldsymbol{\theta}, \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k=1}^{L} V_0^{(kk)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{\theta}) = 1$ のもとに最小化することに相当する．そのような方法はこれまで提案されていないが，単一拘束の場合の「Taubin 法[12]」の多拘束への拡張とみなせるので，これも Taubin 法と呼ぶことにする．

課題．文献 7) の方法論による解析を行うと解 $\boldsymbol{\theta}$ の共分散行列 $V[\boldsymbol{\theta}]$ が $O(\sigma^4)$ を除いて「KCR 下界[1),5)–7)]」に一致することが示される．したがって解の分散をこれ以上改良できない．一方，偏差は非常に小さいが 0 ではない．その偏差の評価式には行列 $\boldsymbol{N}$ が含まれる．したがって，**偏差が最小になるように $\boldsymbol{N}$ を選べば**さらに精度が改善される可能性がある．以下，文献 7) の方法論を用いてこれを行う．

5. 摂動解析

式 (3) を式 (12) の行列 $\boldsymbol{M}$ に代入すると次のように展開される．

$$\boldsymbol{M} = \bar{\boldsymbol{M}} + \Delta_1\boldsymbol{M} + \Delta_2\boldsymbol{M} + \cdots \tag{15}$$

$\Delta_1\boldsymbol{M}$, $\Delta_2\boldsymbol{M}$ はそれぞれ次のようになる．

$$\begin{aligned} \Delta_1\boldsymbol{M} &= \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L} \bar{W}_\alpha^{(kl)}\Big(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(l)\top} + \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)\top}\Big) \\ &\quad + \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L} \Delta_1\bar{W}_\alpha^{(kl)}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(l)\top} \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2\boldsymbol{M} &= \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L} \bar{W}_\alpha^{(kl)}\Big(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)\top} + \Delta_2\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(l)\top} + \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}\Delta_2\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)\top}\Big) \\ &\quad + \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L} \Delta_1 W_\alpha^{(kl)}(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(l)\top} + \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)\top}) + \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L} \Delta_2 W_\alpha^{(kl)}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(l)\top} \end{aligned} \tag{17}$$

求まる $\boldsymbol{\theta}$ を $\boldsymbol{\theta} = \bar{\boldsymbol{\theta}} + \Delta_1\boldsymbol{\theta} + \Delta_2\boldsymbol{\theta} + \cdots$ と展開する．反復が収束した時点では $W_\alpha^{(kl)} = \Big((\boldsymbol{\theta}, V_0^{(kl)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{\theta})\Big)_r^-$ となっているから，$\boldsymbol{\theta}$ の展開を代入して $W_\alpha^{(kl)} = \bar{W}_\alpha^{(kl)} + \Delta_1 W_\alpha^{(kl)} + \Delta_2 W_\alpha^{(kl)} + \cdots$ と展開すると，$\Delta_1 W_\alpha^{(kl)}$, $\Delta_2 W_\alpha^{(kl)}$ はそれぞれ次のようになる（詳細省略）．

$$\Delta_1 W_\alpha^{(kl)} = -2\sum_{m,n=1}^{L} \bar{W}_\alpha^{(km)}\bar{W}_\alpha^{(ln)}(\Delta_1\boldsymbol{\theta}, V_0^{(mn)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}}) \tag{18}$$

$$\Delta_2 W_\alpha^{(kl)} = \sum_{m,n=1}^{L} \Delta_1 W_\alpha^{(km)}\Delta_1 W_\alpha^{(ln)}(\bar{\boldsymbol{\theta}}, V_0^{(mn)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})$$
$$-\sum_{m,n=1}^{L} \bar{W}_\alpha^{(km)}\bar{W}_\alpha^{(ln)}\Big((\Delta_1\boldsymbol{\theta}, V_0^{(mn)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\Delta_1\boldsymbol{\theta}) + 2(\Delta_2\boldsymbol{\theta}, V_0^{(mn)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})\Big) \tag{19}$$

未知の λ, $\boldsymbol{N}$ も同様に展開すると一般固有値問題 $\boldsymbol{M\theta} = \lambda\boldsymbol{N\theta}$ は次のように書ける．

$$(\bar{\boldsymbol{M}} + \Delta_1\boldsymbol{M} + \Delta_2\boldsymbol{M} + \cdots)(\bar{\boldsymbol{\theta}} + \Delta_1\boldsymbol{\theta} + \Delta_2\boldsymbol{\theta} + \cdots)$$
$$= (\bar{\lambda} + \Delta_1\lambda + \Delta_2\lambda + \cdots)(\bar{\boldsymbol{N}} + \Delta_1\boldsymbol{N} + \Delta_2\boldsymbol{N} + \cdots)(\bar{\boldsymbol{\theta}} + \Delta_1\boldsymbol{\theta} + \Delta_2\boldsymbol{\theta} + \cdots) \tag{20}$$

これは拘束の個数によらないので，前報[8] のように両辺から同じ次数の誤差項を取り出して等値すると最終的に次の結果を得る．

$$\Delta_1\boldsymbol{\theta} = -\bar{\boldsymbol{M}}^-\Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}} \tag{21}$$

$$\Delta_2^\perp\boldsymbol{\theta} = \bar{\boldsymbol{M}}^-\Big(\frac{(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{\theta}})}{(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \bar{\boldsymbol{N}}\bar{\boldsymbol{\theta}})}\bar{\boldsymbol{N}}\bar{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{\theta}}\Big), \qquad \boldsymbol{T} \equiv \Delta_2\boldsymbol{M} - \Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{M}}^-\Delta_1\boldsymbol{M} \tag{22}$$

ここに $\Delta_2^\perp\boldsymbol{\theta}$ は 2 次の誤差項 $\Delta_2\boldsymbol{\theta}$ の $\boldsymbol{\theta}$ に直交する成分である．$\boldsymbol{\theta}$ は単位ベクトルであり伸縮しないのでこれが評価できれば十分である．

6. 超精度くりこみ法

式 (21) より $E[\Delta_1\boldsymbol{\theta}] = \boldsymbol{0}$ である．ゆえに偏差は $E[\Delta_2^\perp\boldsymbol{\theta}]$ で評価できる．これは式 (22) より次のように書ける．

$$E[\Delta_2^\perp\boldsymbol{\theta}] = \bar{\boldsymbol{M}}^-\Big(\frac{(\bar{\boldsymbol{\theta}}, E[\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{\theta}}])}{(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \bar{\boldsymbol{N}}\bar{\boldsymbol{\theta}})}\bar{\boldsymbol{N}}\bar{\boldsymbol{\theta}} - E[\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{\theta}}]\Big) \tag{23}$$

ゆえに，ある定数 c に対して $E[\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{\theta}}] = c\bar{\boldsymbol{N}}\bar{\boldsymbol{\theta}}$ となるような $\boldsymbol{N}$ を選べば

$$E[\Delta_2^\perp\boldsymbol{\theta}] = \bar{\boldsymbol{M}}^-\Big(\frac{(\bar{\boldsymbol{\theta}}, c\bar{\boldsymbol{N}}\bar{\boldsymbol{\theta}})}{(\bar{\boldsymbol{\theta}}, \bar{\boldsymbol{N}}\bar{\boldsymbol{\theta}})}\bar{\boldsymbol{N}}\bar{\boldsymbol{\theta}} - c\bar{\boldsymbol{N}}\bar{\boldsymbol{\theta}}\Big) = \boldsymbol{0} \tag{24}$$

となる．その結果，偏差は $O(\sigma^4)$ となる（誤差の奇数次の項の期待値は 0 であることに注意）．$\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{\theta}}$ の期待値は次の $\bar{\boldsymbol{N}}$ を用いれば $E[\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{\theta}}] = \sigma^2\bar{\boldsymbol{N}}\bar{\boldsymbol{\theta}}$ と表せる（導出は付録）．

$$\bar{\boldsymbol{N}} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\Big(V_0^{(kl)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha] + 2\mathcal{S}[\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}\boldsymbol{e}_\alpha^{(l)\top}]\Big)$$
$$-\frac{1}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l,m,n=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\bar{W}_\alpha^{(mn)}\Big((\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}, \bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(m)})V_0^{(ln)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$$
$$+2\mathcal{S}[V_0^{(km)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(l)}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(n)\top}]\Big) \tag{25}$$

ただし $\mathcal{S}[\,\cdot\,]$ は対称化作用素であり ($\mathcal{S}[\boldsymbol{A}] = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^\top)/2$)，ベクトル $\boldsymbol{e}_\alpha^{(k)}$ を次の関係式によって定義する．

$$E[\Delta_2\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}] = \sigma^2\boldsymbol{e}_\alpha^{(k)} \tag{26}$$

式 (33) は真値を含んでいるので，計算値で代用する．それによって $O(\sigma)$ の誤差が生じるが，ノイズの奇数次の項の期待値は 0 になるので $E[\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{\theta}}] = \sigma^2\boldsymbol{N}\bar{\boldsymbol{\theta}} + O(\sigma^4)$ であり，式 (24) は $O(\sigma^4)$ である．以上より次の「超精度くりこみ法」が得られる．

(1) $W_\alpha^{(kl)} = \delta_{kl}$ $\alpha = 1, ..., N$ と置き，$\boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{0}$ とする．

(2) 次の行列 $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ を計算する．

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L}W_\alpha^{(kl)}\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)\top} \tag{27}$$

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L}W_\alpha^{(kl)}\Big(V_0^{(kl)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha] + 2\mathcal{S}[\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}\boldsymbol{e}_\alpha^{(l)\top}]\Big)$$
$$-\frac{1}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l,m,n=1}^{L}W_\alpha^{(kl)}W_\alpha^{(mn)}\Big((\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}, \boldsymbol{M}_{n-1}^-\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(m)})V_0^{(ln)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$$
$$+2\mathcal{S}[V_0^{(km)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{M}_{n-1}^-\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)}\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(n)\top}]\Big) \tag{28}$$

ただし，$\boldsymbol{M}_{n-1}^-$ は行列 $\boldsymbol{M}$ のランク $n-1$ の一般逆行列，すなわち $\boldsymbol{M}$ の最小固有値を 0 に置き換えた一般逆行列である．

(3) 一般固有値問題 $\boldsymbol{M\theta} = \lambda\boldsymbol{N\theta}$ を解いて，絶対値最小の一般固有値に対する単位一般固有ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ を計算する．

(4) 符号を除いて $\boldsymbol{\theta} \approx \boldsymbol{\theta}_0$ なら $\boldsymbol{\theta}$ を返して終了する．そうでなければ次のように更新してステップ (2) に戻る．

$$W_\alpha^{(kl)} \leftarrow \Big((\boldsymbol{\theta}, V_0^{(kl)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{\theta})\Big)_r^-, \qquad \boldsymbol{\theta}_0 \leftarrow \boldsymbol{\theta} \tag{29}$$

これから分かるのは，$W_\alpha^{(kl)} = \delta_{kl}$ とする初期解は筆者らの「超精度最小二乗法[9]」に一致

していることである（式 (28) の $W_\alpha^{(kl)}$ を δ_{kl} としたものは文献 9) の式より項数が少ないが，解は同じである）．したがって，超精度くりこみ法は超精度最小二乗法から出発して重み $W_\alpha^{(kl)}$ を更新する反復とみなせる．そして，反復の途中で得られる $\boldsymbol{\theta}$ はすべて $O(\sigma^4)$ を除いて偏差が存在しないことが示される（詳細省略）．

一般固有値問題 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{\theta} = \lambda\boldsymbol{N}\boldsymbol{\theta}$ を解く通常のライブラリツールでは $\boldsymbol{N}$ が正値対称行列と仮定されているが，式 (28) のように定義した $\boldsymbol{N}$ は正値対称行列ではないので，前報[8] に示したように次のように書き変えて計算を行う．

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{\theta} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\theta} \tag{30}$$

7. まとめ

前報[8] では幾何学的拘束条件を利用して誤差のある観測データから対象の 2 次元および 3 次元形状を正確に計算する幾何学的推定のための「超精度くりこみ法」を提案したが，本報では拘束が複数あって，しかもそれらの方程式が必ずしも互いに独立でない場合に拡張した．このような状況は 2 画像間の対応から射影変換を計算をする問題などいろいろな場面に現れる．まず 最小二乗法の重みを反復更新する重み反復法，および Taubin 法の重みを反復更新するくりこみ法を複数拘束に対してまとめた．そして超精度最小二乗法の重みを反復更新する超精度くりこみ法の手順を複数拘束に対して導出した．実験例については別報[11] を参照．

謝辞: 本研究の一部は文部科学省科学研究費基盤研究 (C 21500172) の助成によった．

参 考 文 献

1) N. Chernov and C. Lesort, Statistical efficiency of curve fitting algorithms, *Comp. Stat. Data Anal.*, **47**-4 (2004-11), 713–728.
2) R. Hartley and A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, 2nd ed. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2004.
3) K. Kanatani, Renormalization for unbiased estimation, *Pro. 4th Int. Conf. Comput. Vis. (ICCV'93)*, May 1993, Berlin, Germany, pp. 599–606.
4) 金谷健一, コンピュータビジョンのためのくりこみ法, 情報処理学会論文誌, **35**-2 (1994-2), 201–209.
5) 金谷健一, 当てはめ問題の最適推定と精度の理論限界, 情報処理学会論文誌, **36**-88 (1995-8), 1865–1873.
6) K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice* Elsevier, Amsterdam, the Netherlands, 1996; reprinted, Dover, York, NY, U.S.A., 2005.
7) K. Kanatani, Statistical optimization for geometric fitting: Theoretical accuracy analysis and high order error analysis, *Int. J. Comput. Vis.*, **80**-2 (2008-11), 167–188.
8) 金谷健一, アリ・アルシャラドカー, ニコライ・チェルノフ, 菅谷保之, 超精度くりこみ法, 情報処理学会研究報告, 2012-CVIM-180-25 (2012-1), 1–8.
9) K. Kanatani, P. Rangarajan, Y. Sugaya and H. Niitsuma, HyperLS and its applications, *IPSJ Trans. Comput. Vis. Appl.*, **3** (2011-10), 80–94.
10) 新妻弘崇，金谷健一，最適な射影変換の新しい計算アルゴリズム, 情報処理学会研究報告, 2009-CVIM-169-37 (2009-11), 1–8.
11) 菅谷保之, 金谷健一, 基礎行列と射影変換の計算精度の比較最小二乗法から超精度くりこみ法まで, 情報処理学会研究報告, 2012-CVIM-181-22 (2012-3), 1–8.
12) G. Taubin, Estimation of planar curves, surfaces, and non-planar space curves defined by implicit equations with applications to edge and range image segmentation, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **13**-11 (1991-11), 1115–1138.

付 録

$\boldsymbol{T}\bar{\boldsymbol{\theta}} = \Delta_2\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}} - \Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{M}}^-\Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}}$ の期待値を評価する．

A.1 $E[\Delta_2\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}}]$ の評価

$\Delta_2\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}}$ の期待値を考える．$(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{\theta}}) = 0$ に注意すると式 (16) から次の関係が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\Delta_2\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}} &= \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\Big(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)\top} + \Delta_2\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(l)\top} + \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}\Delta_2\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)\top}\Big)\bar{\boldsymbol{\theta}} \\
&\quad + \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L}\Delta_1 W_\alpha^{(kl)}(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(l)\top} + \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)\top})\bar{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L}\Delta_2 W_\alpha^{(kl)}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(l)\top}\bar{\boldsymbol{\theta}} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}((\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)}, \bar{\boldsymbol{\theta}})\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)} + (\Delta_2\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)}, \bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}) + \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L}\Delta_1 W_\alpha^{(kl)}(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)}, \bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}
\end{aligned} \tag{31}$$

ゆえに $E[\Delta_2\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}}]$ は次のようになる．

$$\begin{aligned}
&E[\Delta_2\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}}] \\
&= \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\Big(E[\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)\top}]\bar{\boldsymbol{\theta}} + (E[\Delta_2\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)}], \bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}\Big) \\
&\quad + \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L}(E[\Delta_1 W_\alpha^{(kl)}\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)}], \bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)} \\
&= \frac{\sigma^2}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\Big(V_0^{(kl)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}} + (\boldsymbol{e}_\alpha^{(l)}, \bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}\Big) + \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L}(E[\Delta_1 W_\alpha^{(kl)}\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)}], \bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}
\end{aligned} \tag{32}$$

次に $\Delta_1 W_\alpha \Delta_1 \boldsymbol{\xi}_\alpha$ の期待値を考える．式 (16), (18), (21) より次の関係が成り立つ．

$$\Delta_1 W_\alpha^{(kl)} = -2\sum_{m,n=1}^{L} \bar{W}_\alpha^{(km)}\bar{W}_\alpha^{(ln)}(\Delta_1\boldsymbol{\theta}, V_0^{(mn)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})$$
$$= 2\sum_{m,n=1}^{L} \bar{W}_\alpha^{(km)}\bar{W}_\alpha^{(ln)}(\bar{\boldsymbol{M}}^{-}\Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}}, V_0^{(mn)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})$$
$$= 2\sum_{m,n=1}^{L} \bar{W}_\alpha^{(km)}\bar{W}_\alpha^{(ln)}\Big(\bar{\boldsymbol{M}}^{-}\Big(\frac{1}{N}\sum_{\beta=1}^{N}\sum_{p,q=1}^{L}\bar{W}_\beta^{(pq)}\Big(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta^{(p)}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(q)\top} + \bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(p)}\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta^{(q)\top}\Big)$$
$$+\frac{1}{N}\sum_{\beta=1}^{N}\sum_{p,q=1}^{L}\Delta_1\bar{W}_\beta^{(pq)}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(p)}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(q)\top}\Big)\bar{\boldsymbol{\theta}}, V_0^{(mn)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}}\Big)$$
$$= 2\sum_{m,n=1}^{L} \bar{W}_\alpha^{(km)}\bar{W}_\alpha^{(ln)}\Big(\bar{\boldsymbol{M}}^{-}\Big(\frac{1}{N}\sum_{\beta=1}^{N}\sum_{p,q=1}^{L}\bar{W}_\beta^{(pq)}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(p)}(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta^{(q)}, \bar{\boldsymbol{\theta}})\Big), V_0^{(mn)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}}\Big)$$
$$= \frac{2}{N}\sum_{\beta=1}^{N}\sum_{m,n,p,q=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(km)}\bar{W}_\alpha^{(ln)}\bar{W}_\beta^{(pq)}(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta^{(q)}, \bar{\boldsymbol{\theta}})(\bar{\boldsymbol{M}}^{-}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(p)}, V_0^{(mn)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})$$
$$= \frac{2}{N}\sum_{\beta=1}^{N}\sum_{m,n,p,q=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(km)}\bar{W}_\alpha^{(ln)}\bar{W}_\beta^{(pq)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(p)}, \bar{\boldsymbol{M}}^{-}V_0^{(mn)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta^{(q)}, \bar{\boldsymbol{\theta}}) \tag{33}$$

$$E[\Delta_1 W_\alpha^{(kl)}\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)}]$$
$$= E[\frac{2}{N}\sum_{\beta=1}^{N}\sum_{m,n,p,q=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(km)}\bar{W}_\alpha^{(ln)}\bar{W}_\beta^{(pq)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(p)}, \bar{\boldsymbol{M}}^{-}V_0^{(mn)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta^{(q)}, \bar{\boldsymbol{\theta}})\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)}]$$
$$= \frac{2}{N}\sum_{\beta=1}^{N}\sum_{m,n,p,q=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(km)}\bar{W}_\alpha^{(ln)}\bar{W}_\beta^{(pq)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(p)}, \bar{\boldsymbol{M}}^{-}V_0^{(mn)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})E[\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)}\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta^{(q)\top}]\bar{\boldsymbol{\theta}}$$
$$= \frac{2}{N}\sum_{\beta=1}^{N}\sum_{m,n,p,q=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(km)}\bar{W}_\alpha^{(ln)}\bar{W}_\beta^{(pq)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(p)}, \bar{\boldsymbol{M}}^{-}V_0^{(mn)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})\sigma^2\delta_{\alpha\beta}V_0^{(lq)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}}$$
$$= \frac{2\sigma^2}{N}\sum_{m,n,p,q=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(km)}\bar{W}_\alpha^{(ln)}\bar{W}_\alpha^{(pq)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(p)}, \bar{\boldsymbol{M}}^{-}V_0^{(mn)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})V_0^{(lq)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}} \tag{34}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L}(E[\Delta_1 W_\alpha^{(kl)}\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)}], \bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L}\Big(\Big(\frac{2\sigma^2}{N}\sum_{m,n,p,q=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(km)}\bar{W}_\alpha^{(ln)}\bar{W}_\alpha^{(pq)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(p)}, \bar{\boldsymbol{M}}^{-}V_0^{(mn)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})V_0^{(lq)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}}\Big), \bar{\boldsymbol{\theta}}\Big)\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}$$
$$= \frac{2\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l,m,n,p,q=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(km)}\bar{W}_\alpha^{(ln)}\bar{W}_\alpha^{(pq)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(p)}, \bar{\boldsymbol{M}}^{-}V_0^{(mn)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})(\bar{\boldsymbol{\theta}}, V_0^{(lq)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}$$
$$= \frac{2\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,m,n,p=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(km)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(p)}, \bar{\boldsymbol{M}}^{-}V_0^{(mn)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})\Big(\sum_{l,q=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(nl)}(\bar{\boldsymbol{\theta}}, V_0^{(lq)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{W}_\alpha^{(qp)}\Big)\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}$$
$$= \frac{2\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,m,n,p=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(km)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(p)}, \bar{\boldsymbol{M}}^{-}V_0^{(mn)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{W}_\alpha^{(np)}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}$$
$$= \frac{2\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,m,n,p=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(km)}\bar{W}_\alpha^{(np)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(p)}, \bar{\boldsymbol{M}}^{-}V_0^{(mn)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)} \tag{35}$$

ただし，$\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}$ の誤差が各 α ごとに独立であり，$E[\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta^{(l)\top}] = \delta_{\alpha\beta}V_0^{(kl)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$（$\delta_{\alpha\beta}$ はクロネッカのデルタ）となることを用いた．以上より $E[\Delta_2\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}}]$ が次のようになる．

$$E[\Delta_2\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}}] = \frac{\sigma^2}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\Big(V_0^{(kl)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}} + (\boldsymbol{e}_\alpha^{(l)}, \bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}\Big)$$
$$+\frac{2\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,m,n,p=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(km)}\bar{W}_\alpha^{(np)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(p)}, \bar{\boldsymbol{M}}^{-}V_0^{(mn)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)} \tag{36}$$

A.2 $E[\Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{M}}^{-}\Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}}]$ の評価

次に $\Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{M}}^{-}\Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}}$ の期待値を考える．式 (16) より次のように書ける．

$$\Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\Big(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(k)}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(l)\top} + \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)\top}\Big)\bar{\boldsymbol{\theta}}$$
$$+\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L}\Delta_1\bar{W}_\alpha^{(kl)}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(l)\top}\bar{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)}, \bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)} \tag{37}$$

$$\Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{M}}^{-}\Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{\theta}} = \Delta_1\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{M}}^{-}\Big(\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)}, \bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}\Big)$$
$$= \Big(\frac{1}{N}\sum_{\beta=1}^{N}\sum_{p,q=1}^{L}\bar{W}_\beta^{(pq)}\Big(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta^{(p)}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(q)\top} + \bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(p)}\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta^{(q)\top}\Big)$$
$$+\frac{1}{N}\sum_{\beta=1}^{N}\sum_{p,q=1}^{L}\Delta_1\bar{W}_\beta^{(pq)}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(p)}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(q)\top}\Big)\bar{\boldsymbol{M}}^{-}\Big(\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)}, \bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{N}\sum_{\beta=1}^{N}\sum_{p,q=1}^{L}\bar{W}_\beta^{(pq)}\Big(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta^{(p)}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(q)\top}+\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(p)}\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta^{(q)\top}\Big)\bar{\boldsymbol{M}}^-\Big(\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)},\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}\Big)\\
&\quad+\frac{1}{N}\sum_{\beta=1}^{N}\sum_{p,q=1}^{L}\Delta_1\bar{W}_\beta^{(pq)}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(p)}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(q)\top}\bar{\boldsymbol{M}}^-\Big(\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)},\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}\Big)\\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\sum_{k,l,p,q=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\bar{W}_\beta^{(pq)}(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)},\bar{\boldsymbol{\theta}})\Big(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta^{(p)}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(q)\top}+\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(p)}\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta^{(q)\top}\Big)\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}\\
&\quad+\frac{1}{N^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\sum_{k,l,p,q=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\Delta_1\bar{W}_\beta^{(pq)}(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)},\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(p)}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(q)\top}\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}\\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\sum_{k,l,p,q=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\bar{W}_\beta^{(pq)}(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)},\bar{\boldsymbol{\theta}})(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(q)},\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)})\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta^{(p)} \quad (\equiv \boldsymbol{t}_1 \text{ と置く})\\
&\quad+\frac{1}{N^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\sum_{k,l,p,q=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\bar{W}_\beta^{(pq)}(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)},\bar{\boldsymbol{\theta}})(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta^{(q)},\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(p)} \quad (\equiv \boldsymbol{t}_2 \text{ と置く})\\
&\quad+\frac{1}{N^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\sum_{k,l,p,q=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\Delta_1\bar{W}_\beta^{(pq)}(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)},\bar{\boldsymbol{\theta}})(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(q)},\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(p)} \quad (\equiv \boldsymbol{t}_3 \text{ と置く}) \qquad (38)
\end{aligned}
$$

各項の期待値を考える．第 1 項 $\boldsymbol{t}_1$ の期待値は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
E[\boldsymbol{t}_1] &= \frac{1}{N^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\sum_{k,l,p,q=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\bar{W}_\beta^{(pq)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(q)},\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)})E[\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta^{(p)}\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)\top}]\bar{\boldsymbol{\theta}}\\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\sum_{k,l,p,q=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\bar{W}_\beta^{(pq)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(q)},\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)})\sigma^2\delta_{\alpha\beta}V_0^{(pl)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}}\\
&= \frac{\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l,p,q=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\bar{W}_\alpha^{(pq)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(q)},\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)})V_0^{(pl)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}} \qquad (39)
\end{aligned}
$$

第 2 項 $\boldsymbol{t}_2$ の期待値は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
E[\boldsymbol{t}_2] &= \frac{1}{N^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\sum_{k,l,p,q=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\bar{W}_\beta^{(pq)}(\bar{\boldsymbol{\theta}},E[\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)}\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\beta^{(q)\top}]\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(p)}\\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\sum_{k,l,p,q=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\bar{W}_\beta^{(pq)}(\bar{\boldsymbol{\theta}},\sigma^2\delta_{\alpha\beta}V_0^{(lq)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(p)}\\
&= \frac{\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l,p,q=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\bar{W}_\alpha^{(pq)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)},\bar{\boldsymbol{M}}^-V_0^{(lq)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(p)} \qquad (40)
\end{aligned}
$$

最後に第 3 項 $\boldsymbol{t}_3$ の期待値を考える．まず式 (33), (34) から次の関係が得られる．

$$
\Delta_1W_\beta^{(pq)} = \frac{2}{N}\sum_{\gamma=1}^{N}\sum_{m,n,r,s=1}^{L}\bar{W}_\beta^{(pm)}\bar{W}_\beta^{(qn)}\bar{W}_\gamma^{(rs)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\gamma^{(r)},\bar{\boldsymbol{M}}^-V_0^{(mn)}[\boldsymbol{\xi}_\beta]\bar{\boldsymbol{\theta}})(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\gamma^{(s)},\bar{\boldsymbol{\theta}}) \qquad (41)
$$

$$
\begin{aligned}
&E[\Delta_1W_\beta^{(pq)}\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)}]\\
&= E[\frac{2}{N}\sum_{\gamma=1}^{N}\sum_{m,n,r,s=1}^{L}\bar{W}_\beta^{(pm)}\bar{W}_\beta^{(qn)}\bar{W}_\gamma^{(rs)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\gamma^{(r)},\bar{\boldsymbol{M}}^-V_0^{(mn)}[\boldsymbol{\xi}_\beta]\bar{\boldsymbol{\theta}})(\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\gamma^{(s)},\bar{\boldsymbol{\theta}})\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)}]\\
&= \frac{2}{N}\sum_{\gamma=1}^{N}\sum_{m,n,r,s=1}^{L}\bar{W}_\beta^{(pm)}\bar{W}_\beta^{(qn)}\bar{W}_\gamma^{(rs)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\gamma^{(r)},\bar{\boldsymbol{M}}^-V_0^{(mn)}[\boldsymbol{\xi}_\beta]\bar{\boldsymbol{\theta}})E[\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)}\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\gamma^{(s)\top}]\bar{\boldsymbol{\theta}}\\
&= \frac{2}{N}\sum_{\gamma=1}^{N}\sum_{m,n,r,s=1}^{L}\bar{W}_\beta^{(pm)}\bar{W}_\beta^{(qn)}\bar{W}_\gamma^{(rs)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\gamma^{(r)},\bar{\boldsymbol{M}}^-V_0^{(mn)}[\boldsymbol{\xi}_\beta]\bar{\boldsymbol{\theta}})\sigma^2\delta_{\alpha\gamma}V_0^{(ls)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}}\\
&= \frac{2\sigma^2}{N}\sum_{m,n,r,s=1}^{L}\bar{W}_\beta^{(pm)}\bar{W}_\beta^{(qn)}\bar{W}_\alpha^{(rs)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(r)},\bar{\boldsymbol{M}}^-V_0^{(mn)}[\boldsymbol{\xi}_\beta]\bar{\boldsymbol{\theta}})V_0^{(ls)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}} \qquad (42)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(E[\Delta_1\bar{W}_\beta^{(pq)}\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)}],\bar{\boldsymbol{\theta}})(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(q)},\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)})\\
&= (\frac{2\sigma^2}{N}\sum_{m,n,r,s=1}^{L}\bar{W}_\beta^{(pm)}\bar{W}_\beta^{(qn)}\bar{W}_\alpha^{(rs)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(r)},\bar{\boldsymbol{M}}^-V_0^{(mn)}[\boldsymbol{\xi}_\beta]\bar{\boldsymbol{\theta}})V_0^{(ls)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}},\bar{\boldsymbol{\theta}})(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(q)},\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)})\\
&= \frac{2\sigma^2}{N}\sum_{m,n,r,s=1}^{L}\bar{W}_\beta^{(pm)}\bar{W}_\beta^{(qn)}\bar{W}_\alpha^{(rs)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(r)},\bar{\boldsymbol{M}}^-V_0^{(mn)}[\boldsymbol{\xi}_\beta]\bar{\boldsymbol{\theta}})(\bar{\boldsymbol{\theta}},V_0^{(ls)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(q)},\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)}) \qquad (43)
\end{aligned}
$$

したがって $\boldsymbol{t}_3$ の期待値が次のようになる．

$$
\begin{aligned}
E[\boldsymbol{t}_3] &= \frac{1}{N^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\sum_{k,l,p,q=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}(E[\Delta_1\bar{W}_\beta^{(pq)}\Delta_1\boldsymbol{\xi}_\alpha^{(l)}],\bar{\boldsymbol{\theta}})(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(q)},\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(p)}\\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\sum_{k,l,p,q=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\Big(\frac{2\sigma^2}{N}\sum_{m,n,r,s=1}^{L}\bar{W}_\beta^{(pm)}\bar{W}_\beta^{(qn)}\bar{W}_\alpha^{(rs)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(r)},\bar{\boldsymbol{M}}^-V_0^{(mn)}[\boldsymbol{\xi}_\beta]\bar{\boldsymbol{\theta}})\\
&\quad(\bar{\boldsymbol{\theta}},V_0^{(ls)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(q)},\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)})\Big)\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(p)}\\
&= \frac{2\sigma^2}{N^3}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\sum_{k,l,m,n,p,q,r,s=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\bar{W}_\beta^{(pm)}\bar{W}_\beta^{(qn)}\bar{W}_\alpha^{(rs)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(r)},\bar{\boldsymbol{M}}^-V_0^{(mn)}[\boldsymbol{\xi}_\beta]\bar{\boldsymbol{\theta}})\\
&\quad(\bar{\boldsymbol{\theta}},V_0^{(ls)}[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\bar{\boldsymbol{\theta}})(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(q)},\bar{\boldsymbol{M}}^-\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(k)})\bar{\boldsymbol{\xi}}_\beta^{(p)}\\
&= \frac{2\sigma^2}{N^3}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\sum_{k,m,n,p,q,r=1}^{L}\bar{W}_\beta^{(pm)}\bar{W}_\beta^{(qn)}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha^{(r)},\bar{\boldsymbol{M}}^-V_0^{(mn)}[\boldsymbol{\xi}_\beta]\bar{\boldsymbol{\theta}})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Big(\sum_{l,s=1}^{L} \bar{W}_\alpha^{(kl)}(\bar{\boldsymbol\theta}, V_0^{(ls)}[\boldsymbol\xi_\alpha]\bar{\boldsymbol\theta})\bar{W}_\alpha^{(sr)}\Big)(\bar{\boldsymbol\xi}_\beta^{(q)}, \bar{\boldsymbol M}^-\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(k)})\bar{\boldsymbol\xi}_\beta^{(p)} \\
&= \frac{2\sigma^2}{N^3}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\sum_{k,m,n,p,q,r=1}^{L} \bar{W}_\beta^{(pm)}\bar{W}_\beta^{(qn)}(\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(r)}, \bar{\boldsymbol M}^- V_0^{(mn)}[\boldsymbol\xi_\beta]\bar{\boldsymbol\theta})\bar{W}_\alpha^{(kr)}(\bar{\boldsymbol\xi}_\beta^{(q)}, \bar{\boldsymbol M}^-\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(k)})\bar{\boldsymbol\xi}_\beta^{(p)} \\
&= \frac{2\sigma^2}{N^2}\sum_{\beta=1}^{N}\sum_{m,n,p,q=1}^{L} \bar{W}_\beta^{(pm)}\bar{W}_\beta^{(qn)}(\bar{\boldsymbol\xi}_\beta^{(q)}, \bar{\boldsymbol M}^-\Big(\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,r=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kr)}\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(k)}\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(r)\top}\Big) \\
&\quad \bar{\boldsymbol M}^- V_0^{(mn)}[\boldsymbol\xi_\beta]\bar{\boldsymbol\theta})\bar{\boldsymbol\xi}_\beta^{(p)} \\
&= \frac{2\sigma^2}{N^2}\sum_{\beta=1}^{N}\sum_{m,n,p,q=1}^{L} \bar{W}_\beta^{(pm)}\bar{W}_\beta^{(qn)}(\bar{\boldsymbol\xi}_\beta^{(q)}, \bar{\boldsymbol M}^-\bar{\boldsymbol M}\bar{\boldsymbol M}^- V_0^{(mn)}[\boldsymbol\xi_\beta]\bar{\boldsymbol\theta})\bar{\boldsymbol\xi}_\beta^{(p)} \\
&= \frac{2\sigma^2}{N^2}\sum_{\beta=1}^{N}\sum_{m,n,p,q=1}^{L} \bar{W}_\beta^{(pm)}\bar{W}_\beta^{(qn)}(\bar{\boldsymbol\xi}_\beta^{(q)}, \bar{\boldsymbol M}^- V_0^{(mn)}[\boldsymbol\xi_\beta]\bar{\boldsymbol\theta})\bar{\boldsymbol\xi}_\beta^{(p)} \qquad (44)
\end{aligned}
$$

以上より $\Delta_1\boldsymbol M\bar{\boldsymbol M}^-\Delta_1\boldsymbol M\bar{\boldsymbol\theta}$ の期待値は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
E[\Delta_1\boldsymbol M\bar{\boldsymbol M}^-\Delta_1\boldsymbol M\bar{\boldsymbol\theta}] &= \frac{\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l,m,n=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\bar{W}_\alpha^{(mn)}(\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(m)}, \bar{\boldsymbol M}^-\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(k)})V_0^{(ln)}[\boldsymbol\xi_\alpha]\bar{\boldsymbol\theta} \\
&+\frac{3\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l,m,n=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\bar{W}_\alpha^{(mn)}(\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(k)}, \bar{\boldsymbol M}^- V_0^{(lm)}[\boldsymbol\xi_\alpha]\bar{\boldsymbol\theta})\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(n)} \qquad (45)
\end{aligned}
$$

A.3 $E[\boldsymbol T\bar{\boldsymbol\theta}]$ の評価

以上より $\boldsymbol T\bar{\boldsymbol\theta}$ の期待値は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
E[\boldsymbol T\bar{\boldsymbol\theta}] &= E[\Delta_2\boldsymbol M\bar{\boldsymbol\theta}] - E[\Delta_1\boldsymbol M\bar{\boldsymbol M}^-\Delta_1\boldsymbol M\bar{\boldsymbol\theta}] \\
&= \frac{\sigma^2}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\Big(V_0^{(kl)}[\boldsymbol\xi_\alpha]\bar{\boldsymbol\theta} + (\boldsymbol e_\alpha^{(l)}, \bar{\boldsymbol\theta})\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(k)}\Big) \\
&\quad +\frac{2\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,m,n,p=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(km)}\bar{W}_\alpha^{(np)}(\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(p)}, \bar{\boldsymbol M}^- V_0^{(mn)}[\boldsymbol\xi_\alpha]\bar{\boldsymbol\theta})\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(k)} \\
&\quad -\frac{\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l,m,n=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\bar{W}_\alpha^{(mn)}(\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(m)}, \bar{\boldsymbol M}^-\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(k)})V_0^{(ln)}[\boldsymbol\xi_\alpha]\bar{\boldsymbol\theta} \\
&\quad -\frac{3\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l,m,n=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\bar{W}_\alpha^{(mn)}(\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(k)}, \bar{\boldsymbol M}^- V_0^{(lm)}[\boldsymbol\xi_\alpha]\bar{\boldsymbol\theta})\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(n)} \\
&= \frac{\sigma^2}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\Big(V_0^{(kl)}[\boldsymbol\xi_\alpha]\bar{\boldsymbol\theta} + (\boldsymbol e_\alpha^{(l)}, \bar{\boldsymbol\theta})\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(k)}\Big) \\
&\quad -\frac{\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l,m,n=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\bar{W}_\alpha^{(mn)}(\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(m)}, \bar{\boldsymbol M}^-\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(k)})V_0^{(ln)}[\boldsymbol\xi_\alpha]\bar{\boldsymbol\theta} \\
&\quad -\frac{\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l,m,n=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\bar{W}_\alpha^{(mn)}(\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(k)}, \bar{\boldsymbol M}^- V_0^{(lm)}[\boldsymbol\xi_\alpha]\bar{\boldsymbol\theta})\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(n)} \\
&= \frac{\sigma^2}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\Big(V_0^{(kl)}[\boldsymbol\xi_\alpha]\bar{\boldsymbol\theta} + \bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(k)}\boldsymbol e_\alpha^{(l)\top}\bar{\boldsymbol\theta}\Big) \\
&\quad -\frac{\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l,m,n=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\bar{W}_\alpha^{(mn)}(\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(m)}, \bar{\boldsymbol M}^-\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(k)})V_0^{(ln)}[\boldsymbol\xi_\alpha]\bar{\boldsymbol\theta} \\
&\quad -\frac{\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l,m,n=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\bar{W}_\alpha^{(mn)}\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(n)}\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(k)\top}\bar{\boldsymbol M}^- V_0^{(lm)}[\boldsymbol\xi_\alpha]\bar{\boldsymbol\theta} \\
&= \frac{\sigma^2}{N}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\Big(V_0^{(kl)}[\boldsymbol\xi_\alpha]\bar{\boldsymbol\theta} + (\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(k)}\boldsymbol e_\alpha^{(l)\top} + \boldsymbol e_\alpha^{(l)}\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(k)\top})\bar{\boldsymbol\theta}\Big) \\
&\quad -\frac{\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l,m,n=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\bar{W}_\alpha^{(mn)}(\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(m)}, \bar{\boldsymbol M}^-\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(k)})V_0^{(ln)}[\boldsymbol\xi_\alpha]\bar{\boldsymbol\theta} \\
&\quad -\frac{\sigma^2}{N^2}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l,m,n=1}^{L}\bar{W}_\alpha^{(kl)}\bar{W}_\alpha^{(mn)}(\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(n)}\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(k)\top}\bar{\boldsymbol M}^- V_0^{(lm)}[\boldsymbol\xi_\alpha] \\
&\quad +V_0^{(lm)}[\boldsymbol\xi_\alpha]\bar{\boldsymbol M}^-\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(k)}\bar{\boldsymbol\xi}_\alpha^{(n)\top})\bar{\boldsymbol\theta} = \sigma^2\bar{\boldsymbol N}\bar{\boldsymbol\theta} \qquad (46)
\end{aligned}
$$