

正六角盤面上のポリオミノ 5I に対する 置き石二つの必勝法

佐藤隆明[†] 松浦昭洋[†]

ポリオミノアチーブメントゲームとは、二人のプレーヤーが盤面上で交互にセルを取り、決められたセルの集まり（ポリオミノまたは生物）を早く完成させれば勝ちとなる二人ゲームである。正六角盤面上のポリオミノアチーブメントゲームに関しては、これまで5つのセルが直線状に並んだポリオミノ 5I を除き、セル数5以下のポリオミノの先手必勝か否かが特定されている。本稿では、先手が置き石を二つ置いた状態から始める 5I のポリオミノアチーブメントゲームが先手必勝であることを示す。

A Winning Strategy for the Achievement Game of 5I on Hexagonal Boards with Handicap Two

Takaaki SATO[†] and Akihiro MATSUURA[†]

In polyomino achievement games, two players alternately mark a cell in a tessellation and try to achieve a given polyomino (or an animal). On hexagonal boards, polyominoes with at most five cells except for 5I are shown to admit a winning strategy of the first player or to be a draw [9,10,11]. In this paper, we show a winning strategy for 5I in the case of handicap two, that is, in the case two cells are given to the first player in advance.

1. はじめに

ポリオミノアチーブメントゲームはフランク・ハラリーによって初めに考察された、三並べを一般化した完全情報二人ゲームである[1]。ポリオミノとは連結したセルの集まりであり、生物とも呼ばれる。セルの敷き詰められた盤面（Tessellation）上で、二人のプレーヤーが交互に手を打ち（セルを取り）、与えられたポリオミノを早く完成させた方が勝ちとなる。先手必勝法の存在するポリオミノを**勝ち型**と呼び、存在しないポリオミノを**負け型**と呼ぶ。

正三角形のセルから成る正三角盤面上のポリオミノアチーブメントゲームは全てのポリオミノに対して勝ち型か否かが特定されている[2]、正方盤面上のポリオミノアチーブメントゲームに関しては、スネーキー（Snaky）と呼ばれる6マスからなる生物を除き、勝ち型か否かが特定されている[1,3]。先手にあらかじめ置き石を置くことを許すハンディキャップアチーブメントゲームが[4]で提案され、スネーキーは置き石を二つ許すと先手必勝であることが示された。さらに、最近置き石を一つとしても先手必勝であることが三グループにより示された[5-8]。正六角盤面上のポリオミノアチーブメントゲームに関しては、[9]において、4セル以下のポリオミノと22種類ある5セルのポリオミノの内17種類について、勝ち型か否かが特定された。また、[10,11]において、残された5セルのポリオミノ5種類の内C, L, Y, Zと呼ばれる4種類が勝ち型であることが示され、5つのセルが直線状に並んだ図1の5Iのみが未解決のポリオミノとして残されていた。本稿では、先手に置き石を二つ許したとき、正六角盤面上の5Iが勝ち型であることを先手必勝法を構築することにより示す。

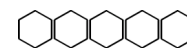


図1 ポリオミノ 5I

2. 置き石とハンディキャップ数

ハラリーらは、[4]においてハンディキャップアチーブメントゲームを導入した。本ゲームは、ゲーム開始前にあらかじめ先手の置き石をいくつか置いた状態からゲームを始め、勝敗を決めるポリオミノアチーブメントゲームである。置き石に関しては、次のハンディキャップ数が定義される。ポリオミノ P に対して、 P の**ハイディキャップ数**とは、その数の置き石をすると先手必勝となるような置き石数の最小値のことで

[†] 東京電機大学
Tokyo Denki University

ある。例えば、先手必勝であるポリオミノのハンディキャップ数は0であり、スネーキーのハンディキャップ数は1章の従来結果より、0または1である。本研究では、正六角盤面上のポリオミノ 5I のハンディキャップ数が2以下であることを、置き石2のハンディキャップアチーブメントゲームに対する先手必勝法を構築することにより示す。

3. ポリオミノ 5I に対する置き石二つの先手必勝法

3.1 先手の基本戦略

5I を作るための先手の基本戦略としては、通常の五目並べと同様、先手は図 2(1)のように、直線状の4セル（黒丸の4I）で、その一方の端を後手（白丸）が取った状態のものを作り、次の後手の着手を4I のもう一端（(1)の斜線を引いたセル）に誘導する戦略や、図 2(2), (3)のように、両端が空いている直線状の3I、または“飛び3”を作り、次の後手の着手を斜線を引いたセルに誘導する戦略を取る。なお、本ゲームでは、先手による“3-3”、すなわち、(2)または(3)の3セルの並びを先手が二筋同時に作ることは禁じ手ではないとする。

また、先手は最初の4セル（置き石2つ+最初の2手）で、図 2(4)に示す4つのセルを取る戦略を常に取る。これは、その4セルにより、先手は5手目において、3方向で上記(1)~(3)の戦略を取り、後手の手を誘導することが可能なためである。

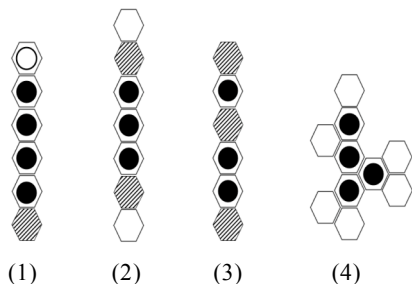


図 2 先手の基本戦略

3.2 後手1手目に関する場合分け

本稿では、先手の着手は黒地のセルに白字で、後手の着手は白地のセルに黒字で表すこととする。また、先手の置き石2つは、図3のように盤面中央に置き、着手番号を両方0とする（よって、先手後手共に、ゲーム開始後の着手番号は1から始まる）。

ゲーム開始後、先手は1手目で二つの置き石に隣接するセルを取る。このとき、先

手の取った3セルと盤面の対称性により、後手の1手目としては図3(1)の1*と書かれた14通りを考えれば十分である。これら14通りを図3(2)のようにさらに1a~1dの4通りに場合分けする。以下、1a~1dそれぞれの着手に対して先手必勝手順を構築する。

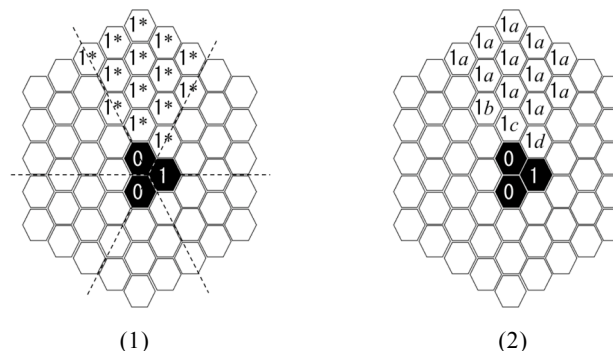


図 3 (1) 後手1手目の着手場所; (2) 後手1手目の場合分け

(1) 1a に対する先手必勝手順

後手が11個ある1aのいずれかを1手目としたとき、先手は2手目で置き石0の下（図4の白字の2）のセルに着手する。後手の2手目は図4の2a, 2bのいずれかとなる。2aに着手した場合、先手3手目から先手勝利が確定するまでの手順を図5(1)に示す。本図で、二つずつある3*や4*は、二つのセルのいずれのセルに置いてもよいことを意味する。先手6手目で、“飛び3”が二つ完成するため、先手は8手で勝利する。後手2手目で2bに着手した場合は、図5(2)に示す手順により先手は8手で勝利する（但し、盤面として5×5×5サイズにもう1マス右下部に必要となる）。

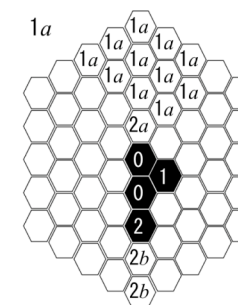


図 4 1a に対する先手、後手の2手目

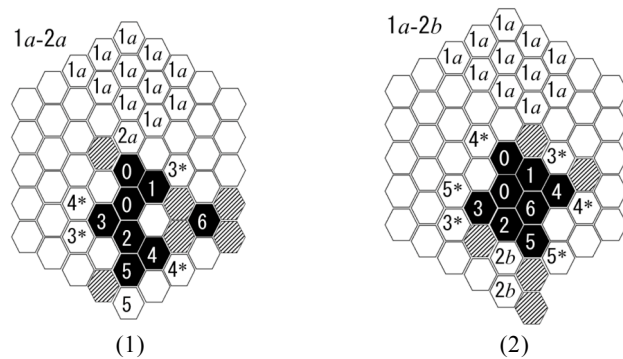


図 5 (1) 1a-2a に対する先手必勝手順; (2) 1a-2b に対する先手必勝手順

(2) 1b に対する先手必勝手順

後手が1手目で図3(2)の1bに着手したとき、先手は2手目で置き石0の上(図6の白字の2)のセルに着手する。後手の2手目は図6の2a, 2bのいずれかである。2aに着手した場合、先手3手目から先手勝利が確定するまでの手順を図7(1)に示す。図の先手7手目で、先手の3-3ができるため、先手は9手で勝利する。後手2手目で2bに着手した場合は、図7(2)に示す手順により先手は8手で勝利する。

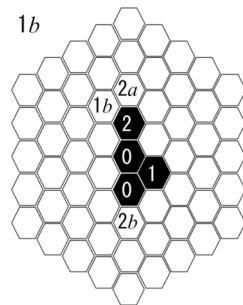


図 6 1b に対する先手、後手の2手目

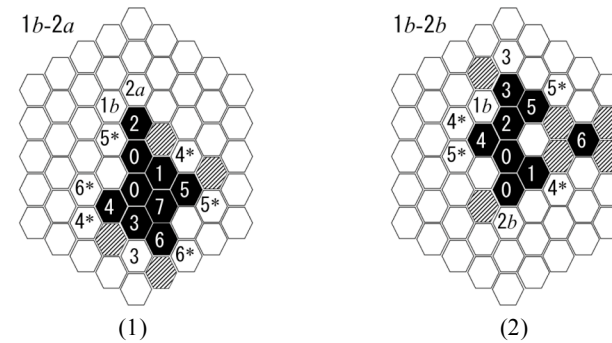


図 7 (1) 1b-2a に対する先手必勝手順; (2) 1b-2b に対する先手必勝手順

(3) 1c に対する先手必勝手順

後手が1手目で図3(2)の1cに着手したとき、先手は2手目で置き石0の左下(図8の白字の2)に着手する。後手2手目は図8の2a, 2bのいずれかである。2aに着手した場合、図9(1)のように、先手3手目の後、後手の3手目3aと3bで場合分けする。3aの場合の先手勝利までの手順を図9(2)に、3bの場合の先手勝利までの手順を図9(3)に示す。それぞれ先手は9手、8手で勝利する。後手が2手目で2bに着手した場合、後手3手目を図10(1)に示す3a, 3bで場合分けし、3aの場合図10(2)の手順で、3bの場合図10(3)の手順で、それぞれ先手が8手、9手で勝利する。

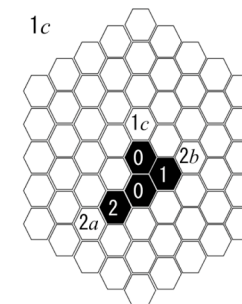


図 8 1c に対する先手、後手の2手目

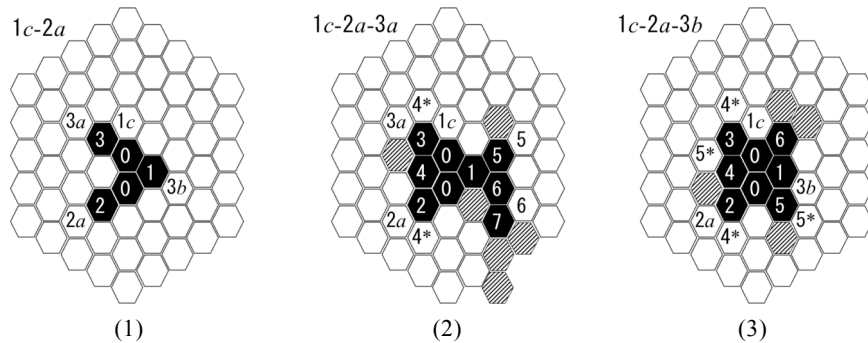


図 9 (1)1c-2a の場合分け; (2)3a に対する先手必勝手順; (3)3b に対する先手必勝手順

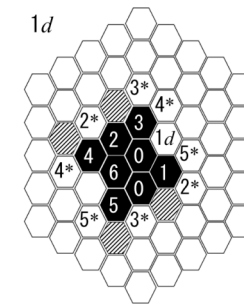


図 11 1d に対する先手必勝手順

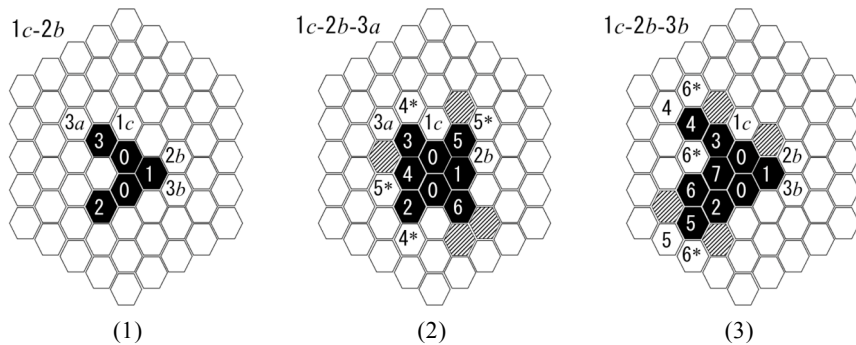


図 10 (1)1c-2b の場合分け; (2)3a に対する先手必勝手順; (3)3b に対する先手必勝手順

(4) 1d に対する先手必勝手順

後手が 1 手目で図 3(2)の 1d に着手したとき、先手は 2 手目で置き石 0 の左上 (図 11 の白字の 2) に着手し、その後図 11 の手順で先手は 8 手で勝利する。

4. まとめ

正六角盤面上のポリオミノ 5I の置き石二つの先手必勝法を示した。5I に関する今後の課題としては、置き石 1 のときに、先手必勝法が存在するかを特定することや、与えられたサイズの盤面で先手必勝法が存在しないことを示すことなどが挙げられる。

謝辞 本研究の一部は東京電機大学総合研究所研究助成(Q11J-04)を受けて行った。

参考文献

- 1) Harary, F.: Achieving the Skinny Animal, Eureka, Vol. 42, pp. 8–14 (1982). (A revised version: Errata in Edition Number 42, Vol. 43, pp. 5-6 (1983),
- 2) Harary, F. and Harborth, H.: Achievement and Avoidance Games with Triangular Animals, J. Recreat. Math., Vol. 18, pp. 110–115 (1985-1986).
- 3) 伊藤大雄: ハラリーの一般化三並べ, 電子情報通信学会論文誌 A, Vol. J89-A, No. 6, pp. 458-469 (2006).
- 4) Harary, F., Harborth, H. and Seemann, M.: Handicap Achievement for Polyominoes, Congr. Numer., Vol. 145, pp. 65–80 (2000).
- 5) 伊藤大雄, 宮川博光: スネーキーの置き石一つの必勝法, 電子情報通信学会技術研究報告, COMP2007-45, pp. 25-32 (2007).
- 6) Ito, H. and Miyagawa, H.: Snaky is a Winner with One Handicap, Proc. of 8th Hellenic Europ. Conf. on Comput. Math. Its Appl. (HERCMA 2007), pp. 25-26 (2007). The full paper is downloadable at <http://www.lab2.kuis.kyoto-u.ac.jp/~itohiro/SnakyHandicapOne.pdf>
- 7) Halupczok, I. and Schlage-Puchta, J.-C.: Achieving Snaky, Integers: Electronic J. of Combin. Number Theory, Vol. 7, #G02 (2007).
- 8) Sieben, N.: Proof Trees for Weak Achievement Games, Integers: Electronic J. of Combin. Number Theory, Vol. 8, #G07 (2008).
- 9) Bode, J.-P. and Harborth, H.: Hexagonal Polyomino Achievement, Discrete Math., Vol. 212, No. 1-2, pp. 5-18 (2000).
- 10) Inagaki, K. and Matsuura, A.: Winning Strategies for Hexagonal Polyomino Achievement, Proc. of WSEAS Intern. Conf. on Appl. Math., pp. 252-259 (2007).
- 11) 野原勇基, 松浦昭洋: 正六角盤面上のあるペンタヘックスに対するアチーブメントゲームの先手必勝法, アルゴリズム研究会, 情報処理学会研究報告, Vol. 2008, No.121, pp. 15-21, 2008.