Vol.2012-AL-139 No.4
2012/3/14

変化するグラフ上でのメトロポリスウォークの到達時間と全訪問時間

木 場 孝 輔[†1]　山内 由紀子[†2]
来 嶋 秀 治[†2]　山 下 雅 史[†2]

グラフ上のランダムウォークとは，トークンがグラフの頂点をランダムに遷移していく確率モデルである．グラフ上のランダムウォークは，インターネットクローラーやネットワークの探索などに応用されている．従来の多くの研究においては静的なネットワークを対象としているが，インターネットなどの現実のネットワークは時不変ではなく，故障やエラーなどによって時間と共に変化する動的なネットワークであることが多い．そこで本研究では，変化するグラフ上でのランダムウォークについて，その動き方や速さを解析する．
本研究では，各時刻においてグラフの各辺が独立に確率 q で消えるとしたモデルを考え，そのモデル上でのランダムウォークを考える．まず，定常分布を任意に設定できるという特徴を持つメトロポリスウォークを元に，ランダムウォークの戦略を提案する．そして，そのランダムウォークの到達時間と全訪問時間が，グラフが変化しない場合のメトロポリスウォークの到達時間，全訪問時間を使って表現できることを示す．さらに，辺が消えるグラフ上で．定常分布を任意に設定できるランダムウォークの戦略を提案する．

The hitting time and the cover time of Metropolis Walks on dynamic graphs

Kosuke Koba,[†1] Yukiko Yamauchi,[†2] Shuji Kijima[†2] and Masafumi Yamashita[†2]

A random walk is a tour of a token moving on vertices through incident edges, at random. Random walks on graphs have practical applications such as internet crawlers or serching networks. There are many results on random walks on static networks. However, real networks, such as the Internet, are changing time by time. Therefore, it is a significant task to analyze random walks on dynamic graphs. This paper deals with graphs whose edges are deleted independently with a probability q. First, we consider a random walk on such dynamic graphs, that is based on a Metropolis walk. The hitting time and the cover time of the random walk on dynamic graphs are bounded by the hitting time and the cover time on static graphs. Next, this paper proposes a random walk on the dynamic graphs, that have a desired stationaly distribution.

1. はじめに

ランダムウォークとは，グラフの頂点をトークンがランダムに遷移していくモデルであり，インターネットクローラーやネットワークの探索などに応用されている．ネットワークのある地点からトークンをランダムに動かすことで，そのネットワークを探索し，情報を集めることができる．静的なネットワーク上でのランダムウォークに関しては，多くの従来研究が存在する．特に，トークンが隣接頂点に等確率で移動するという「標準ランダムウォーク」の到達時間と全訪問時間は，任意のグラフでそれぞれ $O(nm) = O(n^3)$ であることが示されている[1),2)]．ここで，n は頂点数，m は辺数である．また，トークンが訪れている頂点の分布に関する研究もよくなされている．定常分布を任意に設定できるという特徴を持つ，「メトロポリスウォーク」という手法が存在し，到達時間と全訪問時間がそれぞれ $O(n^2)$, $O(n^2 \log n)$ であることが知られている．しかし，実際の応用において，インターネットなどの現実のネットワークは，故障やエラーなどによって時間と共に変化するネットワークであることが多い．本研究ではこのような動的ネットワークを対象とする．動的グラフ上でのランダムウォークについても，これまでにもいくらか研究がなされている．Avin らは，辺集合が変化するグラフに対して，グラフが常に連結であれば全訪問時間が $O(d_{\max}^2 n^3 \ln^2 n)$ であるランダムウォークを提案している[3)]．ここで，$d_{\max}$ は頂点の最大次数である．

以上を踏まえ，本研究の目的は，変化するグラフ上でのランダムウォークの動きや速さを解明することである．特に本論文では，各時刻においてグラフの各辺が独立に確率 q で消えるとしたモデルを扱う．そして，そのモデル上でメトロポリスウォークを元にしたランダムウォークを提案，解析する．本論文では，この辺が消えるグラフ上でのメトロポリスウォークの到達時間と全訪問時間が，静的なグラフ上でのメトロポリスウォークの到達時間と全訪

†1 九州大学大学院システム情報科学府情報学専攻
Department of Informatics
Graduate School of Information Science and Electrical Engineering Kyushu University
†2 九州大学大学院システム情報科学研究院情報学部門
Department of Informatics
Faculty of Information Science and Electrical Engineering Kyushu University

問時間を用いて表せることを示す．さらに，辺が消えるグラフ上で，定常分布を任意に設定できるランダムウォークの戦略を提案する．

2. 準　　備

2.1 ランダムウォーク

グラフ $G=(V,E)$ について，ある頂点 $u \in V$ に隣接する頂点の集合を $N(u)$ で表し，u の次数を $\deg(u)$ と書く．グラフ G 上のランダムウォークとは，グラフ上の頂点をトークンが遷移確率行列 $P=(P_{u,v})\,(u,v \in V)$ に従って確率的に遷移していくモデルである．

2.1.1 標準ランダムウォーク

すべての隣接頂点に対して等確率で遷移するランダムウォークを標準ランダムウォークという．遷移確率行列 P は以下のように与えられる．

$$P_{u,v} = \begin{cases} \frac{1}{\deg(u)} & (v \in N(u)), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

2.1.2 メトロポリスウォーク

確率分布 $\mu=(\mu_u)\,(u \in V)$ が与えられたとき，メトロポリスウォークは以下のように定義される．グラフが単純グラフであれば，遷移確率行列 P は以下のように与えられる．

$$P_{u,v} = \begin{cases} \frac{1}{\deg(u)} \min\left\{1, \frac{\deg(u)\mu_v}{\deg(v)\mu_u}\right\} & (v \in N(u)), \\ 1 - \frac{1}{\deg(u)} \sum_{w \in N(u)} \min\left\{1, \frac{\deg(u)\mu_w}{\deg(w)\mu_u}\right\} & (v = u), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

~

2.2 定 常 分 布

すべての頂点 $u \in V$ に対して，$\pi_u = \sum_{v \in V} \pi_v P_{v,u}$ を満たす確率分布 $\pi=(\pi_u)\,(u \in V)$ を定常分布と呼ぶ．

定理 2.1 任意の 2 頂点 $u,v \in V$ に対して，

$$\pi_u P_{u,v} = \pi_v P_{v,u}$$

を満たすならば，$\pi=(\pi_u)$ は $P=(P_{u,v})$ の定常分布である．

2.2.1 標準ランダムウォークの定常分布

標準ランダムウォークにおける定常分布は，

$$\pi_u = \frac{\deg(u)}{2|E|}$$

である．

2.2.2 メトロポリスウォークの定常分布

定理 2.2 2.1.2 節で定義されたメトロポリスウォークの定常分布は，確率分布 μ に一致する．

証明 $\deg(u)\mu_v < \deg(v)\mu_u$ のとき，

$$\mu_u P_{u,v} = \mu_u \frac{1}{\deg(u)} \frac{\deg(u)\mu_v}{\deg(v)\mu_u} = \mu_v \frac{1}{\deg(v)} \cdot 1 = \mu_v P_{v,u}$$

となる．

$\deg(u)\mu_v \geq \deg(v)\mu_u$ のときも同様に $\mu_u P_{u,v} = \mu_v P_{v,u}$ となる．

よって，メトロポリスウォークの定常分布 π は

$$\pi = (\mu_u)\,(u \in V)$$

である．

2.3 到達時間と全訪問時間

到達時間 (Hitting Time)

グラフ $G=(V,E)$ 上の遷移確率行列 P に従うランダムウォークがあるとする．このとき頂点 $u \in V$ にあるトークンが，頂点 $v \in V$ に到達するまでの遷移数の期待値を u から v への到達時間と定義し $H^P_{u,v}$ で記述する．また，グラフ G の到達時間 H^P_G を以下のように定義する．

$$H^P_G = \max_{u,v} H^P_{u,v}$$

全訪問時間 (Cover Time)

グラフ $G=(V,E)$ 上の遷移確率行列 P に従うランダムウォークがあるとする．このとき頂点 $u \in V$ にあるトークンが，グラフ上のすべての頂点を訪れるまでの遷移数の期待値を

u からの全訪問時間と定義し C_u^P で記述する．また，グラフ G の全訪問時間 C_G^P を以下のように定義する．

$$C_G^P = \max_u C_u^P$$

3. 時間と共に変化するグラフ

本論文では，時間と共に変化するネットワークとして，以下のモデルを扱う．

モデル 3.1 与えられるグラフ $G=(V,E)$ は単純無向連結とする．時刻 t におけるグラフ $G_t=(V_t,E_t)$ は，$V_t=V$，E_t は E の各辺を独立に確率 $1-q$ で選んでできる辺の集合とし，以下を満たす．

$$\forall t, e \in E \qquad \Pr(E_t \ni e) = 1-q.$$

このモデルは，各時刻において，元となるグラフ G の各辺が独立に確率 q で消え，確率 $1-q$ で残っているというものである．

以降で用いる記号を定義する．$n=|V|$，$m=|E|$ とする．元となるグラフ G における u の隣接頂点の集合を $N(u)$ で表し，u に接続する辺の数を $\deg(u)$ とする．時刻 t のグラフ G_t における u の隣接頂点の集合を $N_t(u)$ とし，u に接続する辺の数を $\deg_t(u)$ とする．明らかに，$N_t(u) \subseteq N(u)$ が成り立つ．

4. 辺が消えるグラフ上でのメトロポリスウォーク

4.1 辺が消えるグラフ上でのメトロポリスウォーク

任意の確率分布 $\mu=(\mu_u)\ (u \in V)$ が与えられているとする．各時刻 t において，トークンが頂点 $u \in V$ にいるとき，以下のように動く．

(1) もし，G_t 上で隣接頂点が 1 つも無かったならば現在の頂点にとどまる．

(2) そうでなければ，G_t での隣接頂点 $N_t(u)$ から，等確率に v を選ぶ．

(3) 確率 $\min\left\{1, \frac{\deg(u)\mu_v}{\deg(v)\mu_u}\right\}$ で選んだ頂点へ移動する．

4.2 辺が消えるグラフ上でのメトロポリスウォークの遷移確率行列

命題 4.1 辺が消えるグラフ上でのメトロポリスウォークの遷移確率行列 P は，G 上でのメトロポリスウォークの遷移確率行列 R を用いて，以下のように表せる．

$$P_{u,v} = \begin{cases} \left(1-q^{\deg(u)}\right) R_{u,v} & (v \in N(u)), \\ q^{\deg(u)} + (1-q^{\deg(u)})R_{u,u} & (u = v), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

証明 $v \in N(u)$ のとき，辺 $\{u,v\}$ が存在し $\{u,v\}$ 以外の u の隣接辺が i 本存在する場合は，確率 $\frac{1}{i+1} \times \min\left\{1, \frac{\deg(u)\mu_v}{\deg(v)\mu_u}\right\}$ で v へ遷移する．ここで，辺 $\{u,v\}$ が存在し，{u,v} 以外の u の隣接辺が i 本存在する確率は，$(1-q) \times \begin{pmatrix} \deg(u)-1 \\ i \end{pmatrix} \times (1-q)^i q^{\deg(u)-1-i}$ である．よって，$P_{u,v}$ は

$$\begin{aligned} P_{u,v} &= (1-q) \sum_{i=0}^{\deg(u)-1} \begin{pmatrix} \deg(u)-1 \\ i \end{pmatrix} \times (1-q)^i q^{\deg(u)-1-i} \frac{1}{i+1} \\ &\qquad \times \min\left\{1, \frac{\deg(u)\mu_v}{\deg(v)\mu_u}\right\} \\ &= \sum_{i=0}^{\deg(u)-1} \frac{1}{\deg(u)} \frac{\deg(u)!}{(\deg(u)-(i+1))!(i+1)!} \times (1-q)^{(i+1)} q^{\deg(u)-(i+1)} \\ &\qquad \times \min\left\{1, \frac{\deg(u)\mu_v}{\deg(v)\mu_u}\right\} \\ &= \frac{1}{\deg(u)} \left(((1-q)+q)^{\deg(u)} - q^{\deg(u)}\right) \min\left\{1, \frac{\deg(u)\mu_v}{\deg(v)\mu_u}\right\} \\ &= \frac{1-q^{\deg(u)}}{\deg(u)} \min\left\{1, \frac{\deg(u)\mu_v}{\deg(v)\mu_u}\right\} \\ &= \left(1-q^{\deg(u)}\right) R_{u,v}. \end{aligned}$$

$u=v$ のときは，隣接頂点への辺が全て消えているとき，または選んだ頂点へ移動しないと

きなので，

$$P_{u,u} = q^{\deg(u)} + (1 - q^{\deg(u)})\left(1 - \frac{1}{\deg(u)}\sum_{w \in N(u)} \min\left\{1, \frac{\deg(u)\mu_w}{\deg(w)\mu_u}\right\}\right)$$
$$= q^{\deg(u)} + (1 - q^{\deg(u)})R_{u,u}.$$

それ以外のときは，元のグラフ G に u から v への辺が無いときなので $P_{u,v} = 0$. □

4.3 解析の準備

補題 4.2 ある遷移確率行列 $P = (P_{u,v})\ (u, v \in V)$ が与えられるとする.
このとき，グラフ上の各頂点 u に対し，$0 \leq q_u < 1$ である，任意の q_u が与えられ，遷移確率行列 P' が以下のように書けるとする.

$$P'_{u,v} = \begin{cases} (1-q_u)P_{u,v} & (v \in N(u), u \neq v), \\ q_u + (1-q_u)P_{u,u} & (u = v), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

このとき，到達時間と全訪問時間は

$$H^{P'}_{u,v} = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{w \in W^P_{u,v}, |w|=t+1} \left(\prod_{i=1}^{t} P_{w_i,w_{i+1}}\right) \sum_{j=1}^{t} \frac{1}{1-q_{w_j}},$$
$$C^{P'}_{u} = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{w \in W^P_{u}, |w|=t+1} \left(\prod_{i=1}^{t} P_{w_i,w_{i+1}}\right) \sum_{j=1}^{t} \frac{1}{1-q_{w_j}},$$

となる．ただし $W^P_{u,v}$ は，G 上で P に従うランダムウォークを行ったときにとりうる u から v への道全体の集合であり，W^P_u は，u から全訪問するのにとりうる道全体の集合である.

道 $w \in W^P_{u,v}$ に対し，$|w|$ で道の長さを表す．例えば w が，$u \to v_1 \to v_2 \to v_2 \to v$ という道を表すとき，$w = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) = (u, v_1, v_2, v_2, v)$ であり，$|w| = 5$ である．同様に $w' \in W^P_u$ についても $|w'|$ は道の長さを表す.

証明

$$\begin{aligned}
H^{P'}_{u,v} &= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{w \in W^P_{u,v}, |w|=t+1} \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_t=0}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{t}(q_{w_i})^{k_i}(1-q_{w_i})P_{w_i,w_{i+1}}\right) \\
&\qquad \cdot (t + k_1 + k_2 + \cdots + k_t) \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{w \in W^P_{u,v}, |w|=t+1} \left(\prod_{i=1}^{t} P_{w_i,w_{i+1}}\right) \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_t=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{t}(q_{w_i})^{k_i-1}(1-q_{w_i})\right) \\
&\qquad \cdot (k_1 + k_2 + \cdots + k_t) \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{w \in W^P_{u,v}, |w|=t+1} \left(\prod_{i=1}^{t} P_{w_i,w_{i+1}}\right) \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_{t-1}=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{t-1}(q_{w_i})^{k_i-1}(1-q_{w_i})\right) \\
&\qquad \sum_{k_t=1}^{\infty}\left((k_1 + k_2 + \cdots + k_{t-1})(q_{w_t})^{k_t-1}(1-q_{w_t}) + k_t (p_{w_t})^{k_t-1}(1-q_{w_t})\right) \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{w \in W^P_{u,v}, |w|=t+1} \left(\prod_{i=1}^{t} P_{w_i,w_{i+1}}\right) \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_{t-1}=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{t-1}(q_{w_i})^{k_i-1}(1-q_{w_i})\right) \\
&\qquad \cdot \left(k_1 + k_2 + \cdots + k_{t-1} + \frac{1}{1-q_{w_t}}\right) \\
&= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{w \in W^P_{u,v}, |w|=t+1} \left(\prod_{i=1}^{t} P_{w_i,w_{i+1}}\right) \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_{t-2}=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{t-2}(q_{w_i})^{k_i-1}(1-q_{w_i})\right) \\
&\qquad \cdot \left(k_1 + k_2 + \cdots + k_{t-2} + \frac{1}{1-q_{w_{t-1}}} + \frac{1}{1-q_{w_t}}\right) \\
&= \cdots = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{w \in W^P_{u,v}, |w|=t+1} \left(\prod_{i=1}^{t} P_{w_i,w_{i+1}}\right) \sum_{j=1}^{t} \frac{1}{1-q_{w_j}}.
\end{aligned}$$

全訪問時間についても同様に求められる. □

補題 4.2 から次の系が導かれる.

系 4.3 変化のない単純グラフ G 上でのメトロポリスウォークの到達時間 $H^R_{u,v}$ と全訪問時

間 C_u^R は以下のように表せる．

$$H_{u,v}^R = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{w \in W_{u,v}^R, |w|=t+1} \left(\prod_{i=1}^{t} \frac{1}{\deg(w_i)} \right) \cdot t,$$

$$C_u^R = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{w \in W_u^R, |w|=t+1} \left(\prod_{i=1}^{t} \frac{1}{\deg(w_i)} \right) \cdot t.$$

ここで，$W_{u,v}^R$ は，G 上でメトロポリスウォークを行ったときにとりうる u から v へ道の集合であり，W_u^R は，u から全訪問するのにとりうる道の集合である．

4.4 辺が消えるグラフ上でのメトロポリスウォークの到達時間と全訪問時間

定理 4.4 辺が消えるグラフ上でのメトロポリスウォークの到達時間 $H_{u,v}^P$ と全訪問時間 C_u^P は以下を満たす．

$$\frac{H_{u,v}^R}{1-q^\Delta} \le H_{u,v}^P \le \frac{H_{u,v}^R}{1-q^\delta}, \qquad \frac{C_u^R}{1-q^\Delta} \le C_u^P \le \frac{C_u^R}{1-q^\delta}.$$

ここで $H_{u,v}^R$ と C_u^R は元のグラフ G 上のメトロポリスウォークの到達時間と全訪問時間であり，δ と Δ は，それぞれグラフ G の最小次数と最大次数である．

証明 補題 4.2 より，辺が消えるグラフ上でのメトロポリスウォークの到達時間と全訪問時間は

$$H_{u,v}^P = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{w \in W_{u,v}^R, |w|=t+1} \left(\prod_{i=1}^{t} \frac{m_{w_i,w_{i+1}}}{\deg(w_i)} \right) \sum_{j=1}^{t} \frac{1}{1-q^{\deg(w_j)}},$$

$$C_u^P = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{w \in W_u^R, |w|=t+1} \left(\prod_{i=1}^{t} \frac{m_{w_i,w_{i+1}}}{\deg(w_i)} \right) \sum_{j=1}^{t} \frac{1}{1-q^{\deg(w_j)}}.$$

グラフ上の頂点の最小次数 δ と最大次数 Δ を用いると，

$$H_{u,v}^P \ge \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{w \in W_{u,v}^R, |w|=t+1} \left(\prod_{i=1}^{t} \frac{m_{w_i,w_{i+1}}}{\deg(w_i)} \right) \frac{t}{1-q^\Delta},$$

$$H_{u,v}^P \le \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{w \in W_{u,v}^R, |w|=t+1} \left(\prod_{i=1}^{t} \frac{m_{w_i,w_{i+1}}}{\deg(w_i)} \right) \frac{t}{1-q^\delta},$$

$$C_u^P \ge \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{w \in W_u^R, |w|=t+1} \left(\prod_{i=1}^{t} \frac{m_{w_i,w_{i+1}}}{\deg(w_i)} \right) \frac{t}{1-q^\Delta},$$

$$C_u^P \le \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{w \in W_u^R, |w|=t+1} \left(\prod_{i=1}^{t} \frac{m_{w_i,w_{i+1}}}{\deg(w_i)} \right) \frac{t}{1-q^\delta}.$$

これらの式と系 4.3 より，定理 4.4 が導かれる． □

4.5 辺が消えるグラフ上でのメトロポリスウォークの定常分布

定理 4.5 辺が消えるグラフ上でのメトロポリスウォークの定常分布 $\pi = (\pi_u)$ は以下のようになる．

$$\pi_u = \frac{\mu_u}{1-q^{\deg(u)}}.$$

証明 $\forall u \in V$, $\pi_u = \frac{\mu_u}{1-q^{\deg(u)}}$ とする．
任意の 2 頂点 $u, v \in V$ に対して，$\deg(u)\mu_v < \deg(v)\mu_u$ のとき，

$$\begin{aligned}
\pi_u P_{u,v} &= \frac{\mu_u}{1-q^{\deg(u)}} \times \frac{1-q^{\deg(u)}}{\deg(u)} \min\left\{1, \frac{\deg(u)\mu_v}{\deg(v)\mu_u}\right\} \\
&= \frac{\mu_v}{\deg(v)} \\
&= \frac{\mu_v}{1-q^{\deg(v)}} \times \frac{1-q^{\deg(v)}}{\deg(v)} \min\left\{1, \frac{\deg(v)\mu_u}{\deg(u)\mu_v}\right\} \\
&= \pi_v P_{v,u}.
\end{aligned}$$

$\deg(u)\mu_v \ge \deg(v)\mu_u$ のときも同様に，$\pi_u P_{u,v} = \pi_v P_{v,u}$ となる．よって任意の 2 頂点 $u, v \in V$ に対して，$\pi_u P_{u,v} = \pi_v P_{v,u}$ を満たす．したがって，$\pi = \left(\frac{\mu_u}{1-q^{\deg(u)}}\right)$ $(u \in V)$ は，辺が消えるグラフ上でのメトロポリスウォークの定常分布である． □

4.6 辺が消えるグラフ上で，所望の定常分布を持つメトロポリスウォーク

4.1 節の動き方では，与えた分布 μ に対して，定常分布が定理 4.5 のようになり，μ とは異なる．与えた分布 μ を定常分布として持つためには，以下のようなメトロポリスウォークを用いればよい．
各時刻 t において，トークンが頂点 $u \in V$ にいるとき，
(1) もし，G_t 上で隣接頂点が 1 つも無かったならば現在の頂点にとどまる．
(2) そうでなければ，G_t での隣接頂点 $N_t(u)$ から，等確率に 1 つ選ぶ．
(3) 確率 $\min\left\{1, \frac{\deg(u)\mu_v\left(1-q^{\deg(v)}\right)}{\deg(v)\mu_u\left(1-q^{\deg(u)}\right)}\right\}$ で選んだ頂点へ移動する．

Vol.2012-AL-139 No.4
2012/3/14

このとき，遷移確率行列 P は，命題 4.2 と同様に求めると，以下であることがわかる．

$$P_{u,v} = \begin{cases} \frac{1-q^{\deg(u)}}{\deg(u)} \min\left\{1, \frac{\deg(u)\mu_v\left(1-q^{\deg(v)}\right)}{\deg(v)\mu_u\left(1-q^{\deg(u)}\right)}\right\} & (v \in N(u)), \\ \\ q^{\deg(u)} + (1-q^{\deg(u)}) \\ \times \left(1 - \frac{1}{\deg(u)} \sum_{w \in N(u)} \min\left\{1, \frac{\deg(u)\mu_v\left(1-q^{\deg(v)}\right)}{\deg(v)\mu_u\left(1-q^{\deg(u)}\right)}\right\}\right) & (u = v), \\ \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

このメトロポリスウォークの定常分布は $\pi = (\mu_u)\ (u \in V)$ である．

5. おわりに

本論文では，グラフ G 上の各辺が各ステップ毎に独立に確率 p で消えるモデル上でのランダムウォークの戦略を提案，解析した．メトロポリスウォークを元にした戦略について，その到達時間と全訪問時間が，辺が消えない場合のメトロポリスウォークの到達時間と全訪問時間を用いて表されることを示した．定常分布を任意に設定できるランダムウォークを提案した．しかし，今回扱ったグラフモデルは制約が大きく，実際のネットワークに即していない部分も多い．そこで今後の課題として，より一般的なグラフモデル上でのランダムウォークについて解析する必要がある．

参考文献

1) D.J. Aldous, On the time taken by random walks on finite groups to visit every state, Probability Theory and Related Fields, 62 (1983), 361–393.
2) R. Aleliunas, R.M. Karp, R.J. Lipton, L. Lovasz, and C. Rackoff, Random walks, universal traversal sequences, and the complexity of maze problems, Proc. 20th IEEE Ann.Symposium on Foundations of Computer Science (1979), 218–223.
3) C. Avin, M. Koucky, Z. Lotker, How to explore a fast-changing world (Cover time of a simple random walk on evolving graphs), LNCS, 5125 (2008), 121–132.
4) K. Koba, S. Kijima, M. Yamashita, Random walks on dynamic graphs, Proc. WAAC 2011, 28–35.