

組合せ剛性理論に基づく冗長性を有する剛堅な2次元フレームワークの生成手法

吉 仲 祐 史^{†1} 加 藤 直 樹^{†1} 神 山 直 之^{†2}

組合せ剛性理論とは、与えられたフレームワークをグラフとして扱うことで、そのフレームワークの剛性を組合せ的に特徴付けるものである。この組合せ剛性理論に基づいて、本研究では極小な rigid グラフである Laman グラフを 2-edge-rigid グラフへと冗長化させる問題、および辺数最小の 3-edge-rigid グラフを効率的に生成する手法について述べる。

Constructing 2-dimensional redundantly rigid frameworks based on combinatorial rigidity theory

YUJI YOSHINAKA,^{†1} NAOKI KATOH^{†1}
and NAOYUKI KAMIYAMA^{†2}

We consider the problem of generating redundantly rigid bar-and-joint frameworks in 2D based on combinatorial rigidity theory. In particular, we deal with the problem of augmenting the rigidity of a Laman graph to construct a 2-edge-rigid graph, and present construction method of 3-edge-rigid graphs with a minimum number of edges for any number of vertices which is at least 5.

1. はじめに

自由な回転を許す joint および伸び縮みのしない堅い bar で構成される bar and joint framework は、joint を頂点集合 V , bar を辺集合 E とするグラフ $G = (V, E)$ として扱うことで、組合せ剛性理論の分野ではその剛性について組合せ的特徴付けが為されてきた⁶⁾。

^{†1} 京都大学院工学研究科

Graduate School of Engineering, Kyoto University

^{†2} 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University

一般に 2 次元上における剛堅 (以下では rigid) なグラフとは、2 次元空間内における連続的な変形が、平行移動および回転のみに限られるような bar-and-joint framework に対応するグラフを指す。特に Laman は 2 次元上での極小な rigid グラフ (Laman グラフ) $G = (V, E)$ が満たすべき必要十分条件が以下の条件であることを示した⁴⁾。

$$|E| = 2|V| - 3 \tag{1}$$

$$|E(X)| \leq 2|X| - 3 \quad \text{for every } X \subseteq V \text{ with } 2 \leq |X| \leq |V| \tag{2}$$

頂点数 2 の辺に対して図 1 のような Henneberg I, Henneberg II と呼ばれる 2 つの操作を繰り返し行うことで全ての Laman グラフが生成されることが知られている⁵⁾。一般に rigid グラフは全頂点を使った Laman グラフを部分グラフとして持つグラフと言える。

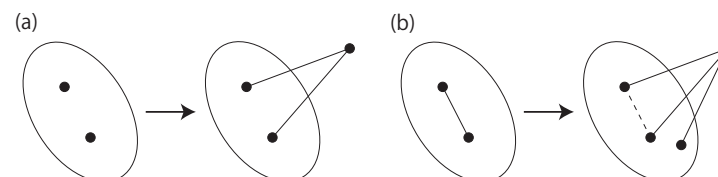


図 1 (a)Henneberg I, (b)Henneberg II

一方で k -edge-rigid グラフとは、rigid でなくならせるには少なくとも k 本以上の辺を削除する必要があるような、冗長性を有する rigid グラフであると定義する。Laman グラフは極小な rigid グラフであることから、辺数最小の 1-edge-rigid グラフであると言える。一方で辺数最小の 2-edge-rigid グラフは circuit グラフとして知られている²⁾ が、 $k \geq 3$ に関してはその構造について知られていない。

本研究では Laman グラフを 2-edge-rigid グラフへと冗長化させる問題および辺数最小の 3-edge-rigid グラフの生成手法について述べる。

2. Laman グラフの冗長化

2.1 Garcia らのアルゴリズム

Garcia らは Laman グラフ $L = (V, E)$ に最小本数の辺 e_1, e_2, \dots, e_k を加えて 2-edge-rigid にするアルゴリズムを提案している¹⁾。これは、 $L(e_i)$ を辺 e_i を加えることで 2-edge-rigid

になる部分 Laman グラフとし, $L = L(e_1) \cup L(e_2) \cup \dots \cup L(e_k)$ となるように辺を加えていくアルゴリズムである. この際に各 $L(e_i)$ の辺集合が極大であるように辺を選ぶことで加える辺数を最小に抑えられることができる. この極大な $L(e_i)$ の辺集合を導く辺 e_i の端点をそれぞれ **extreme vertex** と定義し, $L(i, j) = L(i', j) = L(i'', j) = \dots$ かつ全てが極大となるような, いわば互いに等価な頂点集合 i, i', i'', \dots を **extreme vertex set** と呼ぶこととする.

以下ではこの extreme vertex set が成すグラフ構造を新しく tight vertex set という概念を導入することで説明する.

2.2 tight vertex set の導入

Laman グラフ $L = (V, E)$ に対して, 頂点の部分集合 $X \subset V$ が

$$|E(X)| + |\delta(X)| - 2|X| = 0 \quad (3)$$

を満たしているとき, この X はグラフ L における **tight vertex set** と呼ぶこととする. $E(X)$ は頂点集合 X によって誘導される辺集合で, $\delta(X)$ は X と $V - X$ の間の辺の集合を表している (図 2). ここでまず以下の補題が成り立つ.

補題 1 式 (1) を満たす **tight vertex set** X に対して $|V - X| > 1$ が成り立つ.

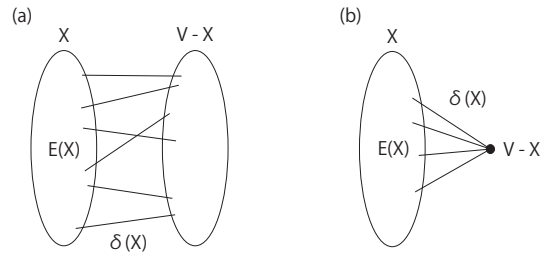


図 2 (a)tight vertex set, (b)non tight vertex set

ここで, $V - X = X'$ とすると, X' で誘導される部分グラフは Laman グラフである. つまりこの補題 1 から, 明らかに 4 点以上からなる任意の Laman グラフに対して, tight vertex set は必ず存在し, すべての頂点はいずれかの tight vertex set に属する. さらに tight vertex set のうちで極小な頂点集合を考える.

ここで極小な tight vertex set は複数存在するはずで, それぞれを X_1, X_2, \dots とする. ここで以下の 2 つの補題が示される.

補題 2 X_1, X_2, \dots が全て disjoint のとき, $(i, j) \notin E$ であるように $i \in X_k, j \in X_l$ を選ぶことで, $L(i, j)$ は極大となる.

補題 3 互いに共有点を持つ極小な tight vertex set が存在するとき, $L = L(i, j)$ であるような $i, j \in V$ が存在する.

この 2 つの補題から次の定理が導かれる.

定理 1 互いに共有点を持たない極小な tight vertex set が 3 つ以上存在するとき, Garcia らの定義する extreme vertex set は tight vertex set に一致する (図 3).

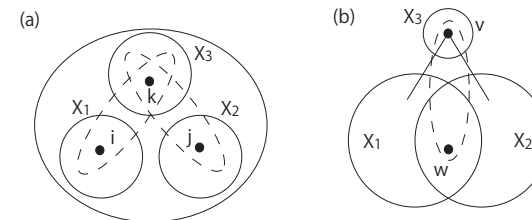


図 3 極小な tight vertex set が 3 つ存在する場合

3. 3-edge-rigid グラフの生成

3.1 X-replacement

$G = (V, E)$ に対して以下の操作を考える.

1. 新しく頂点 v を加える.
2. $(w, x), (y, z) \in E$ であるような 4 点 $w, x, y, z \in V$ に対して v から辺を引く.
3. 2 辺 $(w, x), (y, z) \in E$ を取り除く.

この操作は **X-replacement** と呼ばれ (図 4), Laman グラフに対してこの X-replacement を行うことで出来るグラフは再び Laman グラフとなることが知られている⁵⁾.

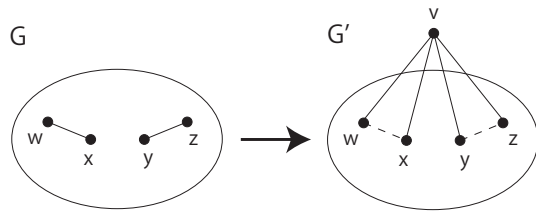


図 4 X-replacement

ここで次の補題を示す.

補題 4 3-edge-rigid グラフ $G = (V, E)$ に対して X-replacement を行うことで得られるグラフ $G' = (V', E')$ は再び 3-edge-rigid グラフである.

証明 生成された G' から任意に 2 本の辺を除いても残されたグラフがまだ rigid であることを示す. 除く 2 辺について以下のように場合分けをして考える.

(i) 新しく加えた辺から 2 本を除く場合.

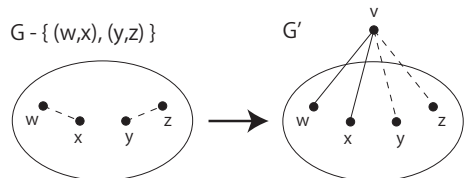


図 5 新しい 2 辺を除く場合

元のグラフ G は 3-edge-rigid グラフなので, ここから 2 辺 $(w, x), (y, z)$ を除いてもまだ rigid である. Henneberg I に従ってこのグラフに, 頂点 v を加え, さらに w, x, y, z のうち 3 点と v とを結ぶように辺を加えることでできるグラフは明らかに rigid である (図 5).

(ii) 新しく加えた辺から 1 本と元の E に含まれていた辺から 1 本を除く場合.

ここで除かれる E 由来の辺を (a, b) とする. G は 3-edge-rigid であるので $(w, x), (a, b)$ の 2 本を除いてもまだ rigid である. Henneberg II に従ってこのグラフに, 頂点 v および 3 辺 $(v, x), (v, y), (v, z)$ を加え, さらに辺 (y, z) を除いたグラフは rigid である (図 6).

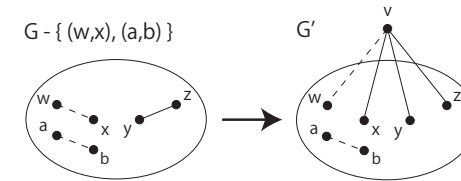


図 6 1 本ずつ除く場合

(iii) 元の E に含まれていた辺から 2 本を除く場合.

ここで除かれる辺を $(a, b), (c, d)$ とする. G からこの 2 辺 $(a, b), (c, d)$ を除いたグラフは rigid である. このグラフに対して X-replacement の操作を行って出来るグラフは, 再び rigid グラフであることがわかる (図 7).

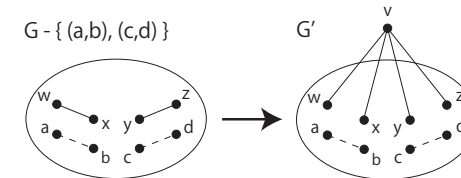


図 7 元の辺から 2 本を除く場合

以上より, グラフ G' から任意に 2 辺を除いてもまだ rigid であることが示された. \square

ここで, 3-edge-rigid グラフの各頂点の次数は 4 以上である. つまり, 4-regular かつ 3-edge-rigid なグラフが存在すれば, これは辺数最小の 3-edge-rigid グラフであると言える. 一方で, 頂点数が 5 の完全グラフ K_5 は 4-regular グラフであり, かつ 3-edge-rigid グラフであることが確認できる.

4-regular グラフに対して X-replacement を行うことで得られるグラフは再び 4-regular グラフであることから, この K_5 に対して X-replacement の操作を繰り返し適用することで生成されるグラフは 4-regular かつ 3-edge-rigid なグラフ, つまり辺数最小の 3-edge-rigid グラフであることがわかる. 次に以下の補題を示す.

補題 5 4-regular かつ 3-edge-rigid なグラフ $G = (V, E)$ において, ある 1 点 $v \in V$ に隣接する頂点が $\{w, x, y, z\}$ であるとする. ここで (w, x) および (y, z) に辺が存在しないとき,

以下の操作を行って出来るグラフ $G' = (V', E')$ は再び 4-regular かつ 3-edge-rigid グラフである。

1. 頂点 v および v に接続する 4 辺 $(v, w), (v, x), (v, y), (v, z)$ を取り除く。
2. 新しく $(w, x), (y, z)$ に辺を加える。

この証明については、各頂点の次数は 4 のまま保たれることは明らかなので、 $G' = (V', E')$ から任意の 2 辺を除いても残されたグラフがまだ rigid であることを示せばよく、先の補題 4 の証明と同様に示すことが出来る。また、この補題 5 の操作はまさに X-replacement の逆操作にあたる事がわかる。

定理 2 K_5 に対して X-replacement の操作を繰り返し行うことで辺数最小の 3-edge-rigid グラフがすべて生成できる。

証明 はじめに、頂点数が 6 以上である任意の辺数最小の 3-edge-rigid グラフに対して、補題 5 の操作が行えることを示す。

まず、ある頂点数が 6 の辺数最小な 3-edge-rigid グラフを $G = (V, E)$ として以下のグラフを考える (図 8)。

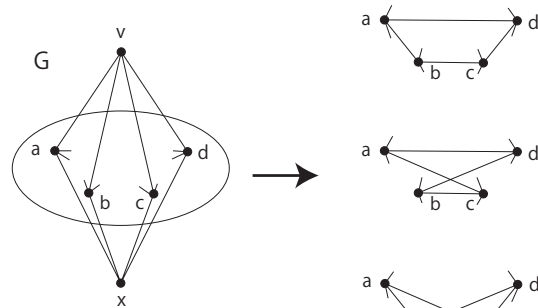


図 8 6 点の場合

$V = \{a, b, c, d, v, x\}$ とすると、 G が 4-regular グラフであることから v に接続する 4 点が a, b, c, d であれば x に接続する 4 点も a, b, c, d であり、 a, b, c, d 間には 4 本存在するはずである。各頂点は x, y にそれぞれ隣接しているため、残される次数はそれぞれ 2 ずつであ

る。つまり、 a, b, c, d 間には Hamilton 閉路が存在するはずであり、互いに disjoint な 2 辺を追加することが可能である。よって補題 5 の操作を実行できる。

次に頂点数が 7 以上の辺数最小な 3-edge-rigid グラフ $G = (V, E)$ として図 9 のようなグラフを考える。ここで v に接続する 4 点を a, b, c, d とする。 $X = V - \{a, b, c, d, v\}$ とおくと、 $|\delta(X)| \geq 5$ であることがわかる。というのは、 $|\delta(X)| < 5$ であれば、この $\delta(X)$ から 2 辺を除くことで $|\delta(X)| < 3$ となり、rigid グラフの必要条件に反するためである。

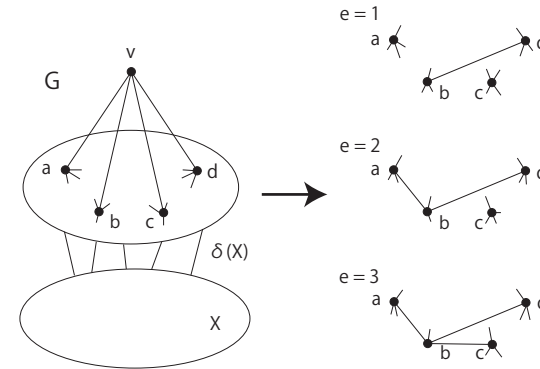


図 9 7 点以上の場合

いま a, b, c, d 間の辺数をいま e とすると、各頂点の次数が 4 であることから

$$2e + 4 + |\delta(X)| = 16 \tag{4}$$

が成り立ち、 $e \leq 3$ が言える。

$e \leq 2$ の場合は明らかに、互いに disjoint な 2 辺を追加することが可能であるため、補題 5 の操作は実行可能である。

$e = 3$ の場合、例えば次ページの図 10 のような場合は a, b, c, d 間に互いに disjoint な 2 辺を追加することは不可能である。

(i) の場合は a および a に接続する 4 点 $\{a', a'', b, v\}$ に注目すると、 (a', v) および (a'', b) 間に辺は存在することはなく、補題 5 の操作が実行できることがわかる。また (ii) の場合は点線が示している通り 4-edge-connected であり、そもそも 3-edge-rigid グラフではない。

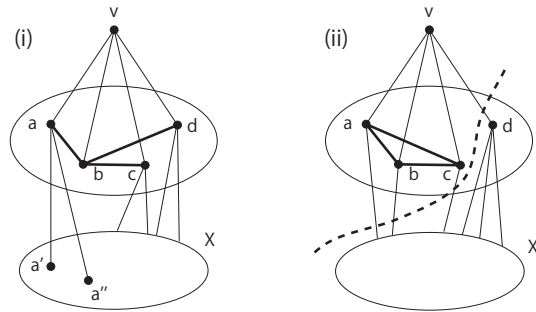


図 10 $e = 3$ 場合

よって以上から頂点数が 6 以上である任意の辺数最小な 3-edge-rigid グラフに対して、補題 5 の操作が行えることが示された。

このことから、頂点数が 6 以上である任意の辺数最小な 3-edge-rigid グラフは、補題 5 の操作を繰り返すことによってやがて K_5 が生成されるはずである。つまり補題 5 の逆操作である X-replacement を K_5 に対して繰り返し行うことで元のグラフが得られるはずである。つまり、 K_5 に対して X-replacement の 1 種類だけの操作を繰り返すことによってすべての辺数最小な 3-edge-rigid グラフを生成することが可能であることが示された。□

X-replacement は、Laman グラフから Laman グラフを生成する操作として知られていることは先にも述べたが、一般に X-replacement の逆操作では Laman グラフは維持されない場合がある⁵⁾。

その一方で、このような X-replacement という操作も、3-edge-rigid グラフに対してはそのいずれの向きにも剛性および冗長性が常に保たれる、という非常に興味深い結果が本節では得られたと言える。

3.2 グラフの連結性と剛性

グラフ $G = (V, E)$ において、 $2 \leq |X| \leq |V| - 2$ であるような任意の edge cut $\delta(X)$ (X と $V - X$ を結ぶ辺集合) のサイズが常に k 以上であることを essentially k -edge-connected と定義する。ここで以下のことが C.Kiraly らによって示されている³⁾。

定理 3 (C.Kiraly et al.) グラフ $G = (V, E)$ が 4-regular かつ essentially 6-edge-connected であることの必要十分条件は、 K_5 に以下の 2 種類の操作を繰り返すことで G が

得られることである (図 11)。

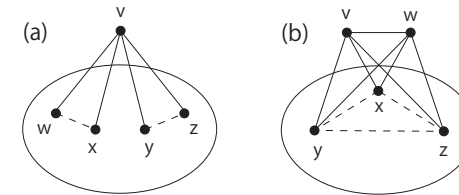


図 11 4-regular かつ essentially 6-edge-connected

この (a) の操作は明らかに X-replacement の操作である。また、(b) の操作は元のグラフに対して X-replacement を 2 回実行したと同義であることが、先の定理 2 の証明からわかる。つまり以下の補題が導かれる。

補題 6 グラフ $G = (V, E)$ が 4-regular かつ essentially 6-edge-connected であることの必要十分条件は、 K_5 に X-replacement の操作を繰り返すことで G が得られることである。

ここで定理 2 および補題 6 から、辺数最小の 3-edge-rigid グラフと 4-regular かつ essentially 6-edge-connected なグラフは、全く同じ操作によって生成されることが分かる。つまり以下の定理が導かれる。

定理 4 $G = (V, E)$ が辺数最小な 3-edge-rigid グラフであることの必要十分条件は、 G が 4-regular かつ essentially 6-edge-connected であることである。

以上より、間接的ではあるがグラフの連結性と剛性には密接な関係が存在することがわかった。

4. 5-edge-rigid グラフ

6 点以上からなるグラフ $G = (V, E)$ に対して、以下の操作以下の操作を考える。

1. 新しく頂点 v_0 を加える。
2. $(v_1, v_2), (v_3, v_4), (v_5, v_6) \in E$ であるような 6 点 $v_0, \dots, v_6 \in V$ に対して v_0 から辺を引く。
3. 3 辺 $(v_1, v_2), (v_3, v_4), (v_5, v_6) \in E$ を取り除く。

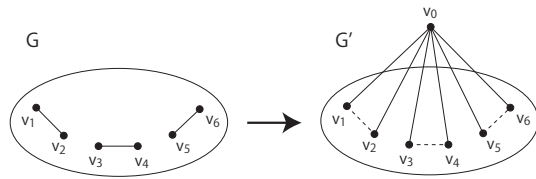


図 12 *-replacement

この操作は X-replacement の拡張として *-replacement と呼ぶこととする (図 12). この *-replacement の操作について以下の補題を示す.

補題 7 6 点以上からなる Laman グラフ $G = (V, E)$ に対して, *-replacement の操作を行うことで rigid なグラフ $G' = (V', E')$ が生成されるような, 対象となる disjoint な 3 辺 $(v_1, v_2), (v_3, v_4), (v_5, v_6) \in E$ の組合せが必ず存在する.

証明 3 辺 $(v_1, v_2), (v_3, v_4), (v_5, v_6) \in E$ のうちのいずれか 2 辺に対して X-replacement を行ってできるグラフは Laman グラフである. 今 $(v_3, v_4), (v_5, v_6) \in E$ の 2 本に対して X-replacement を行ってできる Laman グラフを G^X とする (図 13).

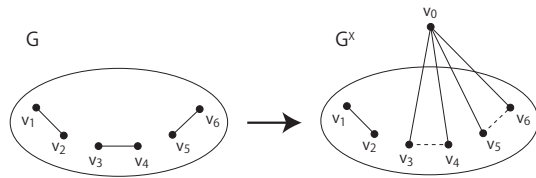


図 13 G に X-replacement

この G^X は Laman グラフであることから, 新しく辺を挿入することでグラフの一部が circuit になる. いま G^X に (v_0, v_1) を加えることで circuit になる部分 Laman グラフを $L^X(v_0, v_1)$ とする. 同様に G^X に (v_0, v_2) を加えることで circuit になる部分 Laman グラフを $L^X(v_0, v_2)$ とする. ここでもしも $(v_1, v_2) \in L^X(v_0, v_1) \cup L^X(v_0, v_2)$ であれば, 補題の操作によって rigid なグラフが得られることがわかる.

以下では $(v_1, v_2) \notin L^X(v_0, v_1) \cup L^X(v_0, v_2)$ の場合を考える. このとき $L^X(v_0, v_1)$ と $L^X(v_0, v_2)$ は v_0 の 1 点しか共有点を持たないはずである. というのは, $L^X(v_0, v_1)$ と

$L^X(v_0, v_2)$ が複数の頂点を共有するのであれば $L^X(v_0, v_1) \cup L^X(v_0, v_2)$ は Laman 部分グラフとなり, 辺 (v_1, v_2) が redundant な辺になってしまう (図 14).

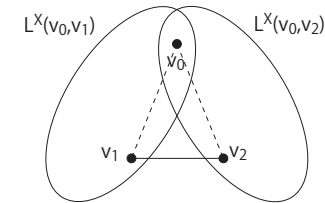


図 14 $L^X(v_0, v_1)$ と $L^X(v_0, v_2)$

つまり G^X が Laman グラフであることに矛盾するため, $L^X(v_0, v_1)$ と $L^X(v_0, v_2)$ は v_0 の 1 点しか共有点を持たない. また, $L^X(v_0, v_1)$ と $L^X(v_0, v_2)$ を渡すような辺は (v_1, v_2) の 1 本以外には存在しない. もしも (v_1, v_2) 以外の辺が存在するならば, これらの辺は redundant になり, 再び G^X が Laman グラフであることに矛盾するためである.

以上の事から, $L^X(v_0, v_1)$ と $L^X(v_0, v_2)$ は, 4 辺 $(v_0, v_3), (v_0, v_4), (v_0, v_5), (v_0, v_6)$ のうち 2 本ずつをかぶりなく分け合っているはずである. いま $(v_0, v_3), (v_0, v_4) \in L^X(v_0, v_1)$ および $(v_0, v_5), (v_0, v_6) \in L^X(v_0, v_2)$ を仮定する. このとき, $L^X(v_0, v_1)$ において, v_0 に Henneberg I の逆操作を行ってできるグラフはもちろん Laman グラフである. つまり, このグラフに (v_3, v_4) を加えたグラフは redundant な辺を有するグラフである. しかしこのグラフは元の Laman グラフ G^X に部分グラフとして含まれているため矛盾が生じる. つまり仮定が間違っていることがわかり, $L^X(v_0, v_1)$ と $L^X(v_0, v_2)$ は, $(v_0, v_3), (v_0, v_4)$ のうちから 1 本ずつ, $(v_0, v_5), (v_0, v_6)$ のうちから 1 本ずつをかぶりなく含んでいるはずである. ここで $(v_0, v_3), (v_0, v_5) \in L^X(v_0, v_1)$ および $(v_0, v_4), (v_0, v_6) \in L^X(v_0, v_2)$ としても一般性は失わない.

いま, $L^X(v_0, v_1)$ と $L^X(v_0, v_2)$ のそれぞれにおいて, v_0 に Henneberg I の逆操作を行ったグラフをそれぞれ L_1, L_2 とする. この両者は Laman グラフであり, はじめのグラフ G の部分グラフである (図 15).

$L_1 \cup L_2 \cup \{(v_1, v_2), (v_3, v_4), (v_5, v_6)\}$ は Laman 部分グラフであり, L_1, L_2 の間には $(v_1, v_2), (v_3, v_4), (v_5, v_6)$ の 3 辺しか存在しない. 他の辺が存在すれば G が Laman グラフであることに反するためである. 以下では 3 つの場合に分けて考える.

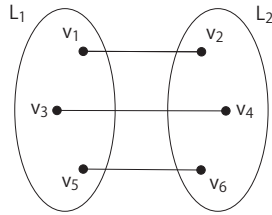


図 15 $L_1 \cup L_2 \cup \{(v_1, v_2), (v_3, v_4), (v_5, v_6)\}$

(i) $(v_1, v_3), (v_2, v_4) \in E$ の場合.

3 辺 $(v_1, v_3), (v_2, v_4), (v_5, v_6)$ について補題の操作を行うことを考える. つまり本証明冒頭の議論と同様に, まず $(v_1, v_3), (v_2, v_4)$ に対して X-replacement を行い, このグラフに (v_0, v_5) および (v_0, v_6) を加えてできる redundant な部分グラフに (v_5, v_6) が含まれていれば補題の操作によって rigid なグラフが生成される. もしも含まれていなければ, 先の L_1, L_2 と同様な 2 つの Laman 部分グラフ L'_1, L'_2 が存在する (図 16).

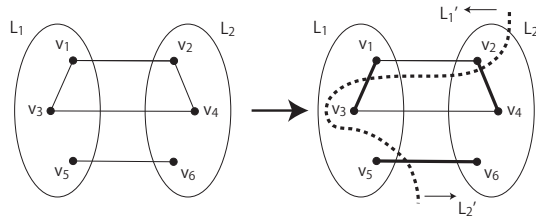


図 16 $(v_1, v_3), (v_2, v_4) \in E$

ここで, $v_1, v_2, v_5 \in L'_1$ および v_3, v_4, v_6 としても一般性は失わない. $|V(L_1) \cap V(L'_1)| \geq 2$ かつ $|V(L_2) \cap V(L'_2)| \geq 2$ であることから, $L_1 \cup L'_1$ および $L_2 \cup L'_2$ は Laman 部分グラフである. また, $|(L_1 \cup L'_1) \cap (L_2 \cup L'_2)| \geq 2$ であるので, $(L_1 \cup L'_1) \cup (L_2 \cup L'_2)$ も Laman 部分グラフである.

しかし, $L_1 \cup L'_1$ と $L_2 \cup L'_2$ の間には辺 (v_5, v_6) が存在し, これは G が Laman グラフであることに矛盾が生じた (図 17). つまり, 補題の操作によって rigid なグラフが生成されることがわかる.

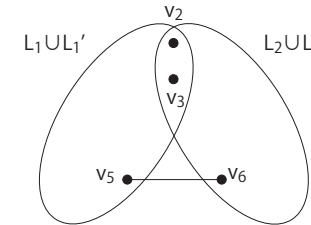


図 17 $(L_1 \cup L'_1) \cup (L_2 \cup L'_2)$

(ii) $(v_1, v_3) \in E$ かつ $(v_2, v_4) \notin E$ もしくは, $(v_1, v_3) \notin E$ かつ $(v_2, v_4) \in E$ の場合.

まず $(v_1, v_3) \in E$ かつ $(v_2, v_4) \notin E$ のとき, v_2 は L_2 内で v_4 以外の 2 点以上と接続しているはずである. その v_4 と接続している頂点のうち, v_6 以外のある 1 点を u_2 とする. ここで, 3 辺 $(v_1, v_3), (v_2, u_2), (v_5, v_6)$ の 3 辺について補題の操作を行うことを考えると, (i) の場合と同様の議論となり, rigid なグラフが生成されることがわかる. $(v_1, v_3) \notin E$ かつ $(v_2, v_4) \in E$ の場合についても同様である.

(iii) $(v_1, v_3), (v_2, v_4) \notin E$ の場合

v_1 が L_1 内で接続している v_3, v_5 以外の頂点を u_1 , v_2 が L_2 内で接続している v_4, v_6 以外の頂点を u_2 とする. ここで, 3 辺 $(v_1, u_1), (v_2, u_2), (v_3, v_4)$ に対して補題の操作を行うことを考えると, (i), (ii) の場合と同様の議論となり, rigid なグラフが生成される (図 18).

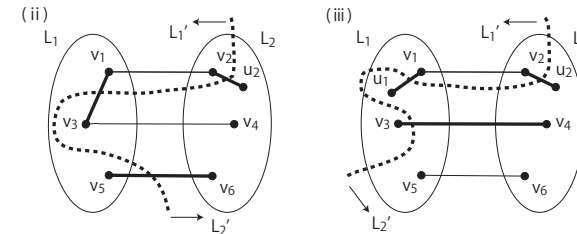


図 18 (ii) $(v_1, v_3) \in E$ かつ $(v_2, v_4) \notin E$ (iii) $(v_1, v_3), (v_2, v_4) \notin E$

以上より, Laman グラフ G に対して補題の操作を行うことで rigid グラフが生成できるような, disjoint な 3 辺の組み合わせが必ず存在することが示された. □

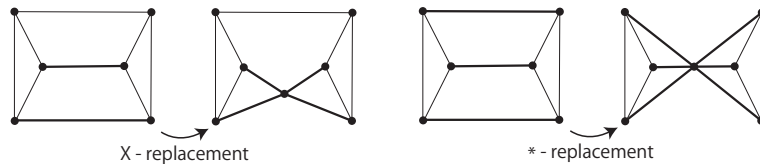


図 19 X-replacement と *-replacement

図 19 は *-replacement で Laman グラフが維持されない例である。ここで以下の定理が導かれる。

定理 5 5-edge-rigid グラフ $G = (V, E)$ において, *-replacement の操作を行うことで再び 5-edge-rigid グラフ G' を生成できるような, 対象となる disjoint な 3 辺 $(v_1, v_2), (v_3, v_4), (v_5, v_6) \in E$ の取り方が必ず存在する。

証明 *-replacement の操作を行ってできる G' から任意の 4 辺を除いてもまだ rigidであることを示す。本証明でも除く 4 辺について場合分けを行って考える。

新しく加えた辺から 1 本以上除く場合に関しては, 補題 4 の証明と同様に, Henneberg I,II および X-replacement を用いることによって想定すべきグラフが得られるので, 任意の disjoint な 3 辺 $(v_1, v_2), (v_3, v_4), (v_5, v_6) \in E$ に対して主張が成り立つことがわかる。

以下では, 4 辺全て既存の辺から除く場合について考える。

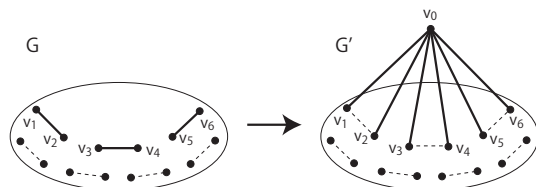


図 20 既存辺から 4 本削除

元の G から $(v_1, v_2), (v_3, v_4), (v_5, v_6) \in E$ 以外の 4 辺を除いてもまだ rigid である。ここで先の補題 7 より, *-replacement を行うことで rigid グラフが得られるような, 対象の disjoint な 3 辺が必ずこのグラフには存在する。その 3 辺を $(v_1, v_2), (v_3, v_4), (v_5, v_6) \in E$ と設定し直した上で *-replacement を実行することで, 想定するグラフが得られ, もちろんこのグラフは rigid である。 □

5. 未解決問題

2 章では Laman グラフを 2-edge-rigid グラフに冗長化させる問題について述べたが, Laman グラフを最小数の辺を加えることで 3-edge-rigid 以上のグラフに冗長化させる問題については未解決である。

また 4 章では, *-replacement によって剛性および冗長性を維持しようとする際に, その対象となる 3 辺については任意に選ぶことが出来ないことを示したが, *-replacement の逆操作についても, 任意の 6-regular かつ 5-edge-rigid に対していつでも実行可能かは未解決な問題である。一方で完全グラフ K_7 は, 6-regular かつ 5-edge-rigid である頂点数が最小のグラフである。つまり, この K_7 に対して *-replacement を繰り返し適用することによって, 辺数最小の 5-edge-rigid グラフが得られることがわかるが, この操作のみによってすべての辺数最小な 5-edge-rigid グラフが得られるかについては明らかにはなっていない。

同様の問題がさらに冗長なグラフを生成する際にも生じるため, $k \geq 2$ における辺数最小の $(2k + 1)$ -edge-rigid グラフをすべて列挙する問題についても同様に未解決である。

参 考 文 献

- 1) A.Garcia, J.Tejel: Augmenting the Rigidity of a Graph in R^2 . Algorithmica 59, pp.145-168, 2011.
- 2) J.Graver, B.Servatius, H.Servatius: Combinatorial Rigidity. AMS Graduate Studies in Mathematics, vol.2, American Mathematical Society, Providence, 1993.
- 3) C.Kiraly, F.Peterfalvi: Balanced generic circuits without long paths. Egervary Research Group, Technical Reports H-1117, pp.1-16, 2011
- 4) G.Laman: On graphs and rigidity of plane skeltal structures. Journal of Engineering mathematics, 4(4), pp.331-340, 1970.
- 5) L.C.Lomeli, L.Moshe, W.Whiteley: Bases and circuits for 2-rigidity: Constructions via tree partitions. Technical Report, York Univercity, <http://www.math.yorku.ca/Who/Faculty/Whiteley/menu.html>
- 6) W.Whiteley: Some matroids from discrete applied geometry. Contemporary Mathematics, vol.197, pp.171-311, 1996.