Vol.2012-GI-27 No.8
2012/3/2

キングメーカーノードを含むゲーム木の均衡点

水野　悠[†1]　鶴岡慶雅[†1]　近山　隆[†1]

プレイヤーの数が 3 人以上の多人数ゲームでは，$\max^n$ アルゴリズムが各ノードでの最善手を導くために用いられることが多い．$\max^n$ アルゴリズムはゲーム理論の部分ゲーム均衡点に相当する．

しかし 2 値ゲームにはキングメーカーノードが多くの場合含まれる．キングメーカーノードにおいて $\max^n$ アルゴリズムは手番プレイヤーの合理的な振る舞いを一意に決定することが出来ず，各ノードに対する最善手が複数導かれてしまう．このような状況においては，複数の最善手をどのような確率で選ぶ戦略も，部分ゲーム完全均衡点となる．

本稿では既存手法で考えられてきたプレイヤーの合理性の概念を拡張し，そこから導かれる均衡点を定義した．この均衡点によりキングメーカーノードを含む 2 値ゲームにおいて，より多くのノードに対して合理的な最善手を導くことを可能にした．

Equilibrium Points of Game Trees with King Maker Nodes

Yu Mizuno,[†1] Yoshimasa Tsuruoka[†1]
and Takashi Chikayama [†1]

For multiplayer games, games with more than 2 players,the $\max^n$ algorithm is often used to decide the best moves for each node.the $\max^n$ algorithm corresponds to deciding the subgame perfect Nash equilibrium point in game theory.

In two-value payoff games, however, game trees often contain kingmaker nodes. The $\max^n$ algorithm cannot decide rational strategy uniquely for kingmaker nodes, and more than one best move exists for each such node.These games have an infinite number of subgame perfect equilibrium points.

In this paper, we propose a new framework of equilibrium points, extending the notion of players' rationality. The framework introduces the a more rational equilibrium point, which can give the rational best moves for kingmaker nodes at certain game situations of two-value payoff games.

1. はじめに

多人数ゲームのコンピュータゲームプレイヤーでは，$\max^n$ アルゴリズム[1)]が広く用いられており，この手法が各ノードでの最善手を導くことを前提として議論や手法の提案・改良がなされることが多い．この $\max^n$ アルゴリズムとは各プレイヤーが自分の利得が最大である子ノードを選ぶことを仮定して他のプレイヤーの行動を予測する手法である．$\max^n$ アルゴリズムで求める最善手は，ゲーム理論の分野の部分ゲーム完全均衡点[4)] に相当し，多くのゲームで合理的な解を導くことが出来る．

しかしプレイヤーの目的が勝利することのみである「2 値ゲーム」では，どの子ノードを選んでも自分の敗北が確定している「キングメーカーノード」が多くの場合存在する．キングメーカーノードにおいて $\max^n$ アルゴリズムは手番プレイヤーの合理的な振る舞いを一意に決定することが出来ず，各ノードに対する最善手が複数導かれてしまう．このような状況においては，複数の最善手をどのような確率で選ぶ戦略も部分ゲーム完全均衡点となる．また，キングメーカーノードでの振る舞いを根拠を持って予測できないため，キングメーカーノードを子孫に持つノードでは，子ノードの利得を正しく予測できず，根拠のない最善手が複数導かれてしまう．ゲーム木全体に対しても同様である．

本稿ではゲーム理論の分野からアプローチを行い，部分ゲーム完全均衡点を定義する際に仮定している各プレイヤーの合理性よりも，より強い合理性を各プレイヤーが持つことが自然な仮定であることを示し，この仮定によって導かれる「部分ゲーム完全一段階予測均衡点」を定義した．

本研究で定義した部分ゲーム完全一段階予測均衡点により，$\max^n$ アルゴリズムで一意に振る舞いを定めることが出来なかった多くのノードで，合理的な振る舞いを一意に決定することが可能となった．また，特に 3 人定和 2 値ゲームで部分ゲーム完全一段階予測均衡点を求めると，2 人のプレイヤーの全ての手番での合理的な振る舞いを決定することが出来ることを示す．

†1 東京大学大学院 工学系研究科
Graduate School of Engineering, The University of Tokyo

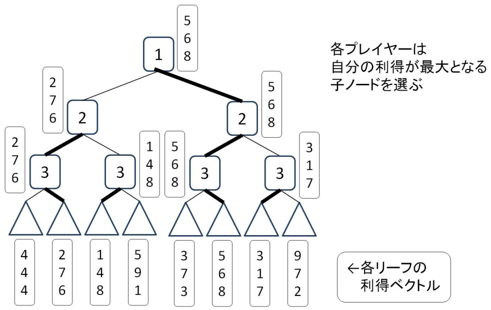

図 1 全探索可能な場合の $\max^n$ アルゴリズム

2. 既存手法

2.1 Max^n アルゴリズム

$\max^n$ アルゴリズム[1] とは展開形ゲームの局面での最善手を求めるアルゴリズムである．多人数ゲームでは「$\max^n$ アルゴリズムが最善手を導く」ことを前提として議論されることが多い．

全探索可能なゲーム木に対する $\max^n$ アルゴリズムは「自分以外のプレイヤーは自分の利得を最大にするように行動する」という合理的な仮定に基づき，与えられた局面における最善手を求める．各リーフには各プレイヤーの利得を表す n 次の利得ベクトルが対応付けられている．

各ノードでは手番ノードの利得が最も大きな子ノードが選ばれる．末端のノードから順に，最善手とノードの持つ利得ベクトルを求めていく．図 1 に全探索が可能な木に対して $\max^n$ アルゴリズムを適用した例を示す．ルートノードでの最善手は右のノードを選ぶことであると求めることができる．

全探索が不可能なゲーム木に対しては，利得ベクトルの代わりに評価値ベクトルを用いる．

2.2 部分ゲーム完全均衡点

$\max^n$ アルゴリズムが各ノードに対して合理的な最善手を導くことの根拠になっているのが，ゲーム理論の分野における部分ゲーム完全均衡点[4] である．

まず，ゲーム理論の基礎について述べる．ゲーム木の構造を持つゲームは展開形ゲームと呼ばれ，各プレイヤーがそれぞれの手番ノードで「戦略」をとる．各ノードにおける戦略には「常に同じ手を選ぶ順戦略」と「あらかじめ決めた確率で手を選ぶ局所戦略」が許されている．局所戦略を用いるプレイヤーがいるときは， 利得ではなく利得の期待値である「期待利得」を用いる．各プレイヤーは合理的 (十分な推論能力を持つ) かつ理性的 (自分が他のプレイヤーの立場に立ったらどうするかを考えることができる) であることが仮定されており，自分の期待利得を最大化することを目的としている．

ゲームの解として最も基礎的な概念であるナッシュ均衡点[2),3)] について述べる．ナッシュ均衡点とは,「他のプレイヤーが戦略を変えない限り自分も戦略を変える動機を持たない戦略の組」のことである．ナッシュ均衡点である戦略の組では，各プレイヤーの戦略は，他のプレイヤーの戦略に対する「最適応答」になっている．最適応答とは他のプレイヤーの戦略に対して，最も利得を大きくすることのできる戦略のことである．

ゲーム全体ではナッシュ均衡点となっている戦略の組でも，部分ゲームではナッシュ均衡点となっていない戦略の組が存在し，そのような戦略の組は各プレイヤーの合理性と矛盾する．各プレイヤーの合理性を正しく満たしている均衡点が部分ゲーム完全均衡点である．その定義はゲーム木の全ての部分木に対してナッシュ均衡点を導くような戦略の組である．

$\max^n$ アルゴリズムが各ノードに対して導く最善手と，部分ゲーム完全均衡点はほとんどの場合一致する．一致しないのは，手番プレイヤーの利得が最大である子ノードが複数存在するノードがゲーム木に含まれる場合である．$\max^n$ アルゴリズムでは何らかの方法で子ノードから 1 つを選ぶが，利得が最大の子ノードらを任意の確率で選択する局所戦略の全てが部分ゲーム完全均衡点となる．

3. 2 値ゲームと既存手法の問題点

3.1 2 値ゲームとキングメーカーノード

前章で述べた既存手法は，基本的に各プレイヤーの利得を「実数」であるとしている．これを実際のゲームに当てはめると，ゲームが終わった時点での「得点」や「儲け」について考えているといえる．一方，実際のゲームでは「勝敗」のみが意味を持ち,「得点」や「儲け」は意味を持たないことも多々ある．特に将棋やチェスをはじめとボードゲーム類にはそもそも「得点」の概念がないものも多く存在する．

このようなゲームでは，どの手をとっても自分が勝つ可能性はないが，自分のとる手によって勝者が決まってしまう，というような局面が存在しうる.「勝敗」よりも「得点」が重要な意味を持つゲームでは，自分が 1 位になることがなくなっても，少しでも得点を大きくなる手を選ぼうという動機を持つが,「勝敗」のみが意味を持つゲームでは自分の勝利の可能性がなくなれば，どの手を選ぶ動機もなくなってしまう．こういった局面を「キングメー

Vol.2012-GI-27 No.8
2012/3/2

カーノード」と名付け，以下に定義した．

まず「勝敗」のみが意味を持つゲームでは各プレイヤーの利得が「勝ち」を意味する「1」と「負け」を意味する「0」の 2 値しかとらないものとする．この利得が 1, 0 の 2 値をとるゲームを「2 値ゲーム」と名づける．プレイヤー i が利得 1 を得ることを「プレイヤー i が勝利する」，利得 0 を得ることを「プレイヤー i が敗北する」という言葉で表すことにする．以降の議論では基本的に勝者が 1 人である「等和 2 値ゲーム」を対象とする．

確定定和 2 値ゲームにおいて,「この手番に到達すれば，プレイヤー i の勝利が確定するノード」を「プレイヤー i の必勝ノード」と呼ぶことにする．定義は以下のとおりで，直感的な意味は「そのノードに到達後，プレイヤー i が正しく手を選べば，必ず勝利するノード」である．

定義 3.1 (必勝ノード)．まず「プレイヤー i の利得が *1* であるリーフ」を，プレイヤー i の必勝ノードとする．また，再帰的に，ノード x とその子ノードの集合 $A(x)$ について,「$A(x)$ が全てプレイヤー i の必勝ノードである」または,「ノード x の手番がプレイヤー i かつ，$A(x)$ にプレイヤー i の必勝ノードが含まれる」という状態のとき，ノード x をプレイヤー i の必勝ノードとする．

続いて，キングメーカーノードを定義する．

定義 3.2 (キングメーカーノード)．プレイヤー i の手番ノード x とその子ノードの集合 $A(x)$ について,「$A(x)$ は全て，プレイヤー i 以外のプレイヤーの必勝ノード」かつ「$A(x)$ に *2* 人以上のプレイヤーの必勝ノードが含まれる」とき，ノード x を「プレイヤー i のキングメーカーノード」という．

図 2 にキングメーカーノードの例を示す．三角のノードは中に書かれたプレイヤーの必勝ノードを表す．以下の図中でも同様である．実際のゲームにおけるキングメーカーノードは「自分は勝つ可能性がないが，自分の選択によって勝者が変わるノード」「自分が勝利出来ないが，勝利者を決める権利を有するノード」に相当する．なお，キングメーカーノードの定義からも分かるが，2 人ゲームではキングメーカーノードは発生しない．

3.2 既存手法の問題点

前章で述べた，max^n アルゴリズムや部分ゲーム完全均衡点ではキングメーカーノードを含むゲームで，各ノードの手番プレイヤーがどのような戦略を選ぶかを一意に定めることが出来ない．

キングメーカーノードでは，複数の子ノードのうちどれを選んでも手番プレイヤーの利得が変わらないため，それぞれの子ノードを任意の確率分布で選ぶ戦略が全て部分ゲーム完全均衡点となる．キングメーカーノードを子孫ノードに持つノードでは, キングメーカーノードでとられる戦略をナッシュ均衡点となっている戦略から 1 つ「適当に」選んで，それに対する最善手をとることになる．こうして考えられた最善手は子孫ノードへの予測が「適当な」ことから，根拠のないものとなってしまう．

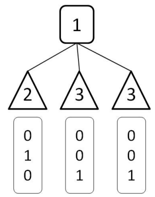

図 2　キングメーカーノードの例

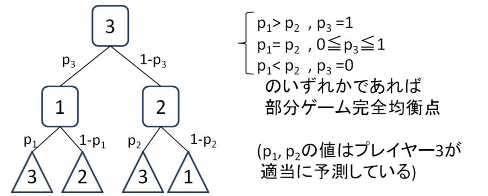

図 3　キングメーカーノードを含むツリーでの部分ゲーム完全均衡点

図 3 にキングメーカーノードを含んだゲームの例を示す．各プレイヤーが戦略を決定することは，自分の手番においてそれぞれの子ノードを選ぶ確率を決定することと等価である．それぞれのノードで左の子ノードを選ぶ確率を p_1, p_2, p_3 とおいた．従って，それぞれのノードで右の子ノードが選ばれる確率は $1 - p_1, 1 - p_2, 1 - p_3$ である．p_1, p_2, p_3 は確率を表すので，$0 \leq p_1, p_2, p_3 \leq 1$ の式を満たす．

このゲームの部分ゲーム完全均衡点は次の 3 つの条件のいずれかを満たす任意の p_1, p_2, p_3 の組である．

$$0 \leq p_2 < p_1 \leq 1\ , \quad p_3 = 1 \tag{1}$$

$$0 \leq p_1 = p_2 \leq 1\ ,\ 0 \leq p_3 \leq 1 \tag{2}$$

$$0 \leq p_1 < p_2 \leq 1\ , \quad p_3 = 0 \tag{3}$$

図 4 に式 (1), 式 (2), 式 (3), の条件を満たす部分ゲーム完全均衡点の例を示す．

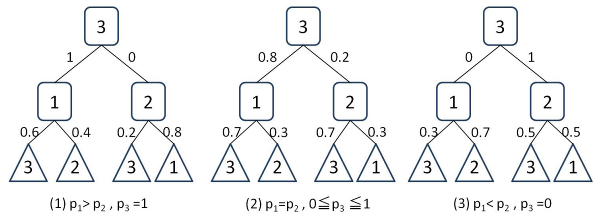

図 4　部分ゲーム完全均衡点の例

プレイヤー3がプレイヤー1とプレイヤー2の戦略を正しく予測できたときは，各プレイヤーの戦略の組はこの図に示したように部分ゲーム完全均衡点となるが，プレイヤー3が正しく予測をできることに合理的な根拠はなく，プレイヤー3が誤った戦略をとってしまい，各プレイヤーの戦略の組が部分ゲーム完全均衡点にならないこともあり得る．

4. 提案手法

4.1 kmn-η 則

キングメーカーノードを含むゲーム木において，子孫ノードでとられる戦略の予測によっては「自分の戦略をどのように選んでも利得が0になるので，どのような戦略を選んでも変わらないと推定する」という状況になりうる．例えば図6に示すゲーム木のルートノードでプレイヤー3は，子ノードであるプレイヤー1の手番ノードでとられる戦略を「プレイヤー3の必勝ノードをとる確率は0」と予測したとする．この時プレイヤー3は自分の手番ではどのような戦略をとっても期待利得は0であるので，どのような戦略をとってもそれは部分ゲーム完全均衡となる．しかし，プレイヤー3がこのように手を選ぶのは以下の観点から不自然であるといえる．プレイヤー3の選択できる2つの子ノードを比べると，右の子ノードを選ぶとプレイヤー3の期待利得は必ず0になるのに対し，左の子ノードを選ぶとプレイヤー3の期待利得は0より大きくなる可能性がある．したがって，プレイヤー3は左の子ノードを確率1で選ぶという戦略をとることが自然である．

また，図5のゲーム木についてプレイヤー1と3が左の子ノードを選ぶ確率をそれぞれ p_1, p_3 とおくと，プレイヤー3の期待利得 h_3 は $h_3 = p_3 \cdot p_1$ であるので，$p_3 = 1$ とする戦略によるプレイヤー3の利得 $h_3|_{p_3=1}$ と，$0 \leq p_3 < 1$ とする戦略による戦略によるプレイヤー3の利得 $h_3|_{0 \leq p_3 < 1}$ との関係は $h_3|_{p_3=1} \geq h_3|_{0 \leq p_3 < 1}$ となる．等号が成立するのは $p_1 = 0$ の場合のみである．すなわち，$p_3 = 1$ とする戦略はその他の戦略より大きいか同じ利得を必ず得られることが分かる．この観点からもプレイヤー3は左の子ノードを確率1で選ぶという戦略をとることが自然であるといえる．

次に図6に示した,「自分の戦略をどのように選んでも利得が1になるので，どのような戦略を選んでも変わらないと推定する」という状況について考える．プレイヤー3は，子ノードであるプレイヤー1の手番ノードでとられる戦略を「プレイヤー3の必勝ノードをとる確率は1」と予測したとする．この時プレイヤー3は自分の手番ではどのような戦略をとっても期待利得は1であるので，どのような戦略をとってもそれは部分ゲーム完全均衡となる．しかしこのプレイヤー3の戦略は先述の例と同様に2つの観点から，不自然な戦略である．

プレイヤー3の選択できる2つの子ノードを比べると，右の子ノードは常に利得が1になるのに対し，左の子ノードは利得が1より小さくなることがあるので，プレイヤー3は確率1で右の子ノードを選ぶ戦略をとるべきである．また，プレイヤー1,3が左の子ノードを選ぶ確率をそれぞれ p_1, p_3 とおくと，$p_3 = 0$ とする戦略はその他の戦略より大きいか同じ利得を得られることが分かり，プレイヤー3は $p_3 = 0$ である戦略をとることが自然であるといえる．$p_3 = 0$ とする戦略とその他の戦略の期待利得が同じになるのは，$p_1 = 1$ の場合のみである．

以上の2つの例でも見たように，各プレイヤーが到達することが望ましいと考える「ノードの選択好順」は「自分の利得が必ず1となるノード」,「自分の利得が0から1の間になるノード」,「自分の利得が必ず0となるノード」の順であるとするのが自然である．それぞれの性質を持つノードについて考えると，選択好順は「自分の必勝ノード」,「誰の必勝ノードでもなく，子孫に自分の必勝ノードを含むノード」,「他人の必勝ノード，および，誰の必勝ノードでもなく子孫に自分の必勝ノードを含まないノード」の順であると言い換えることが出来る．この選択好順は自分の手番ノードでの選択のみでなく，他のプレイヤーの手番ノードで選択される際にも望ましい順を示している．この選択好順に従った，戦略の選択を各プレイヤーに行わせるために，次に定義するkmn-η 則を導入する．なお「kmn」とはKing Maker Nodeの頭文字をとったものである．

定義 4.1 (kmn-η 則). 子ノード $A(x)$ にプレイヤー i の必勝ノードが含まれるキングメーカーノード x に関して，プレイヤー i がこのキングメーカーノード x でとられる戦略を予測するとき,「自分の必勝ノードが選ばれれる確率 p_{win-i} は, η を微小な正の数として $\eta \leq p_{win-i} \leq 1-\eta$ である」と予測するものとする．この条件を「*kmn-η* 則」と呼ぶ．

実際のゲームでこのkmn-η 則が意味するところは,「他プレイヤーのキングメーカーノードでは，自分を勝たせる手を必ずとろうとしたり，必ずとらないようにしようとはしない」と予測することである．あるいは「他プレイヤーのキングメーカーノードでは，微小な確率で手がすべって戦略とは異なる手をとる可能性がある」と考えることに相当すると言うことも出来る．

このkmn-η 則により先述の自然な選択好順が導かれる．図5と図6で見た例に関して，プレイヤー3は図7で示すように，自然な戦略をとるようになる．図7のそれぞれのツリーでプレイヤー3は，期待利得が大きくなる子ノードを確率1で選ぶ戦略をとることになり，いずれも自然な選択好順に一致している．本節の以降の議論では各プレイヤーはkmn-η 則に従うことを仮定する．

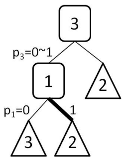

図 5 どの戦略を選んでも利得が 0 と推論してしまう例

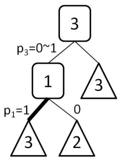

図 6 どの戦略を選んでも利得が 1 と推論してしまう例

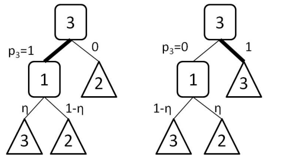

図 7 kmn-η 則による自然な選択好順

4.2 一段階予測均衡点

3.2 節で述べたように，2 値ゲームにおいてはナッシュ均衡点および部分ゲーム完全均衡点ではキングメーカーノードにおける最善な戦略を一意に定めることが出来ない．したがってキングメーカーノードを子孫ノードに持つノードはキングメーカーノードでとられる戦略を「適当に」予測し，それに基づいた最適応答をとることになる．あるノードで子孫であるキングメーカーノードの戦略を予測した結果，子ノードの利得が全て同じになり，そのノードでもキングメーカーノード同様，最善な戦略を一意に定められない，といったことも起こりうる．

キングメーカーノードやその先祖ノードで最善手を一意に定められるようにするため，ゲーム理論の前提となっている「各プレイヤーの持つ十分な論理的思考力」をより強いものとして考える．ナッシュ均衡点や部分ゲーム完全均衡点において，各プレイヤーは，他のプレイヤーの戦略に対する最適応答をとり「他のプレイヤーも自分やそのプレイヤー以外の戦略に対する最適応答をとっている」ことを知っているため「戦略を変えても利得が増えることはないので，誰も戦略を変える動機はない」という推論を行っている．

しかし，キングメーカーノードを含むツリーでは，ナッシュ均衡点および部分ゲーム完全均衡点においても，「現在とっている戦略と異なる戦略に変えても利得が増えることも減ることもないので，戦略を変えない動機もない」という状況が多く存在する．プレイヤー i がさらに深い推論を行うことが可能であるとすると，「自分の利得が変化しない範囲で戦略を b'_i に変更すると，他のプレイヤーが戦略を変更する動機を持つようになる」という状況があり得ることが分かる．この「戦略を変更する動機を持ったプレイヤー」が，実際に戦略を変更することによりプレイヤー i の利得が増加するならば，プレイヤー i は戦略を今のままにしておくより b'_i に変更すべきである．以上の話をまとめて，次のような概念を導入する．

部分ゲーム完全均衡点である戦略の組 $b = (b_1, \ldots, b_n)$ において，プレイヤー i が部分ゲーム完全均衡点の範囲で戦略を b'_i に変えると，その変更に対して，少なくとも 1 人のプレイヤー j が戦略を b'_j に変更する動機を持ち，その変更の結果，プレイヤー i の利得が初めの状態 $h_i(b)$ より大きくなる場合,「b においてプレイヤー i は一段階予測に基づく戦略変更の動機を持つ」という．定義は以下の通りである．b_{-i} は戦略の組 b から第 i 番目の要素を除いたもの，b_{-ij} は戦略の組 b から第 i 番目の要素と第 j 番目の要素を除いたものである．また b' は戦略の組 $b' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ を意味する．$B_i(b_{-i})$ は戦略の組 b_{-i} に対するプレイヤー i の最適応答の全体を示す.

定義 4.2 (一段階予測に基づく戦略変更の動機)．部分ゲーム完全均衡点である行動戦略の組 $b = (b_1, \ldots, b_n)$ に関して，以下の 2 式を満たす，プレイヤー i の行動戦略 b'_i が存在するとき「b においてプレイヤー i は一段階予測に基づく戦略変更の動機を持つ」という．

- $b'_i \in B_i(b_{-i})$
- $j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$ に対して，$b_j \in B_j(b'_i, b_{-ij})$ であれば $b'_j = b_j$，$b_j \notin B_j(b'_i, b_{-ij})$ であれば b'_j は $B_j(b'_i, b_{-ij})$ の任意の要素とし，$h_i(b') > h_i(b)$

例として，図 8 にて一段階予測に基づく戦略変更の動機の概念を説明する．左のゲーム木で各プレイヤーがとっている戦略 $p_1 = 0.6, p_2 = 0.2, p_3 = 1$ は部分ゲーム完全均衡点の一つである．ここでプレイヤー 1 が戦略を $p_1 = 0.6$ から $p_1 = 0.1$ へと変更することを考える．まず，プレイヤー 1 はどのような戦略をとっても自分の利得 $h_1 = 0$ が変化することはないので，プレイヤー 1 のこの戦略 $p_1 = 0.1$ は他のプレイヤーの戦略 $p_2 = 0.2, p_3 = 1$ に対する最適応答である．このプレイヤー 1 の戦略変更に対し，プレイヤー 2 の現在とっている戦略 $p_2 = 0.2$ は $p_1 = 0.1, p_3 = 1$ に対する最適応答の 1 つなので，戦略を変更する動機を持たず，そのままの戦略をとる．プレイヤー 3 は現在とっている戦略 $p_3 = 1$ は $p_1 = 0.6, p_2 = 0.2$ に対する最適応答でなくなり，$p_3 = 0$ が最適応答になるので，動機を持って $p_3 = 0$ に戦略を変更する．この結果，各プレイヤーの戦略は $p_1 = 0.1, p_2 = 0.2, p_3 = 0$ となり，再び部分ゲーム完全均衡点となる．プレイヤー 1 の期待利得 h_1 の変化を見ると，戦略変更後のほうが増加していることが分かる．以上の議論より，プレイヤー 1 は初めの状態 $p_1 = 0.6, p_2 = 0.2, p_3 = 1$ において，戦略を $p_1 = 0.1$ に変更する動機を持つので，一段階予測に基づく戦略変更の動機を持つことが分かった．

図 4 のゲーム木の (1)$p_1 > p_2, p_3 = 1$ である部分ゲーム完全均衡点では，プレイヤー 1 のみが $0 \leq p_1 < p_2$ とする一段階予測に基づく戦略変更の動機を持つ．$p_2 = 0$ の場合でも kmn-η 則によりプレイヤー 1 は $0 < p_2 = \eta$ と予測するので，同様の動機を持つ．

図 4 のゲーム木の (3)$p_1 < p_2, p_3 = 0$ である部分ゲーム完全均衡点では，$p_1 \neq 0$ の場合

はプレイヤー 2 のみが $0 \leq p_2 < p_1$ とする一段階予測に基づく戦略変更の動機を持つ．

図 4 のゲーム木の (2)$p_1 = p_2, 0 \leq p_3 \leq 1$ である部分ゲーム完全均衡点では，$p_1 = p_2 \neq 0$ の場合はプレイヤー 1 が $0 \leq p_1 < p_2$，プレイヤー 2 が $0 \leq p_2 < p_1$ とする一段階予測に基づく戦略変更の動機を持つ．$p_1 = p_2 = 0$ の場合はどのプレイヤーも一段階予測に基づく戦略変更の動機を持たない．

各プレイヤーが十分な推論能力を持ち，一段階予測に基づく戦略変更の動機にも考えが及ぶ場合，部分ゲーム完全均衡点でも誰かが一段階予測に基づく戦略変更の動機を持っている場合は，戦略を変更すべきであると考える．どのプレイヤーも戦略を変更しなくなるのは，どのプレイヤーも一段階予測に基づく戦略変更の動機を持たないような部分ゲーム完全均衡点のみである．このような戦略の組を「一段階予測均衡点」と定義する．

定義 4.3 (一段階予測均衡点)．部分ゲーム完全均衡点である行動戦略の組 $b = (b_1, \ldots, b_n)$ において，どのプレイヤーも一段階予測に基づく戦略変更の動機を持たないとき，b は一段階予測均衡点であるという．

図 9 に示したゲーム木について kmn-η 則が成り立つとすると，今までに見てきた一段階予測に基づく戦略変更の動機に関する議論より，一段階予測均衡点は $p_1 = p_2 = 0, 0 \leq p_3 \leq 1$ のみであることが分かる．

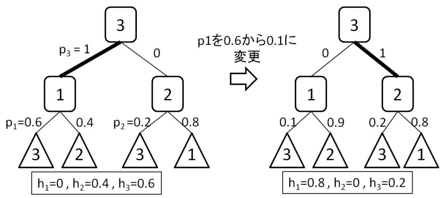

図 8　一段階予測に基づく戦略変更の動機

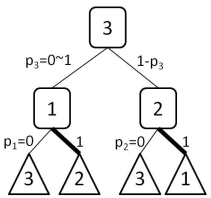

図 9　一段階予測均衡点

4.3　部分ゲーム完全一段階予測均衡点

ゲーム全体でナッシュ均衡点となっていても，部分ゲームではナッシュ均衡点でない戦略の組がプレイヤーの合理性を正しく表現していないのと同様に，ゲーム全体では一段階予測均衡点となっていても部分ゲームでは一段階予測均衡点でない戦略の組はプレイヤーの合理性を正しく表現していない．

プレイヤーの合理性を正しく表現している均衡点として部分ゲーム完全一段階予測均衡点を定義する．部分ゲーム完全一段階予測均衡点は任意のゲーム木に対して少なくとも 1 つは存在する．

定義 4.4 (部分ゲーム完全一段階予測均衡点)．戦略の組 $b = (b_1, \ldots, b_n)$ が，展開形ゲーム Γ の任意の部分ゲームに対して一段階予測均衡点を導くとき，b を Γ の「部分ゲーム完全一段階予測均衡点」であるという．

5. 3 人 2 値ゲーム

全探索が可能な 3 人 2 値定和ゲームについて考える．部分ゲーム完全均衡点の範囲で考えると無数の均衡点が存在する．各プレイヤーは手番ノードにおいて，子孫ノードの戦略を「適当に」予測し，それに対する最適応答となる戦略をとることになる．

各プレイヤーが kmn-η 則に従い，十分な論理的思考力を持つため，部分ゲーム完全一段階予測均衡点にあたる戦略をとろうとしている場合について考える．ルートノードがいずれかのプレイヤー i の必勝ノードである場合は，必ずプレイヤー i が勝利する．

一方，ルートノードが必勝ノードでない場合は必ずプレイで一度はキングメーカーノードに到達することになる．3 人 2 値ゲームにおいて，各プレイヤーが kmn-η 即に従い，部分ゲーム完全一段階予測均衡点にしたがった戦略をとると，戦略が一意に定まらないキングメーカーノードは全て同じプレイヤーの手番ノードとなる．残りの 2 人のプレイヤーのキングメーカーノードでは必ず戦略が一意に定まる．この時定まる戦略はどちらかの子ノードを確率 1 で選択するものである．

また，各ノードでの戦略が決まった後,「どのプレイヤーの勝利ノードに到達する可能性があるか」と「それを決めることができるプレイヤーは誰か」がゲーム木の「本質」であると考えると，ゲーム木を次のように単純化できる．これらの単純化を「同値変換」と呼ぶことにする．図 10 に (1) から (4) の例を示す．

(1)　あるノード x においてとられる戦略が，子ノード y を確率 1 で選ぶものである場合，x の親ノード z から x につながるエッジを y へと直接つなぎ替え，x の y 以外の子ノードと x を削除する.「プレイでノード x に到達した場合，必ずノード y へ到達する」というゲーム木の本質を表現したまま，ゲーム木を単純化している．

(2)　あるノード x と，その子ノード y の手番プレイヤーが同じ場合，x から y の子ノードらへ直接エッジをつなぎ，ノード y を削除する.「ノード x とノード y の子ノードのどれに到達するかは手番プレイヤーが選べる」というゲーム木の本質を残したまま，ゲーム木を単純化している．

(3)　あるノードの子ノードに同じプレイヤーの必勝ノードが複数ある場合，それらの子

Vol.2012-GI-27 No.8
2012/3/2

ノードは本質的には同じものであるので，1 つを残して削除する．

(4) あるノードの子ノードに同じプレイヤーの手番，かつ，全く同じプレイヤーらが勝利する可能性があるキングメーカーノードが複数ある場合，それらの子ノードは本質的には同じものであるので，1 つを残して削除する．

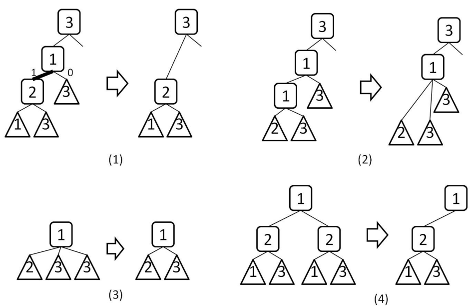

図 10 同値変換

それぞれの変換を順不同で何度繰り返しても，ゲーム木の本質は失われない．3 人 2 値ゲームで，各プレイヤーが kmn-η 即に従い，部分ゲーム完全一段階予測均衡点にしたがった戦略がとられるゲーム木を考え，この同値変形を適用すると，図 11 に示すように 1 つのキングメーカーノードと 2 つのリーフからなるゲーム木へと単純化される．このキングメーカーノードでとられる戦略を決定することは出来ないが，元のゲーム木で勝ち目のあるプレイヤーが 2 人しかおらず，それが誰なのかを求めることが出来る．

3 人 2 値ゲームの場合これらの同値変形の結果は，1 人だけキングメーカーノードが残ったプレイヤー i が，i 以外の 2 人のうち片方のプレイヤー j を勝たせる戦略を選ぶ確率が全てのキングメーカーで等しいと仮定したときの，ゲームのプレイの様子を表しているともいえる．

6. 実験と評価

6.1 実 験 方 法

実際に存在する 3 人 2 値定和ゲームの例として 3 人ダイヤモンドゲームを用いて実験を行った．各プレイヤーが順番に自分のコマを動かして，最も早く自分のコマを全てゴールに到達させたプレイヤーが勝ち，というゲームである．通常は 3 人のプレイヤーで行われる．完全情報・確定の性質を持つので，多人数ゲームの例としてしばしば研究の対象にされている．

ダイヤモンドゲームには盤面の大きさが様々なものが存在し，大きさによって各プレイヤーのコマの数が変わる．今回は全探索が可能なサイズで実験を行うため，図 12 に示す最小の大きさのダイヤモンドゲームを用いた．各プレイヤーは 1 つづつのコマを動かして，ゴールに最も早く到達させることを目指す．コマは現在いるマスの隣り合ったマスか，隣のマスにある他のプレイヤーのコマを飛び越した先のマスに移動させることが出来る．他のプレイヤーのスタートマスやゴールマスに自分のコマを動かすことは出来ない．また，ゲームが有限回の手番で終わるようにするため，以前に到達した局面に再び到達するようなコマの移動は禁止した．

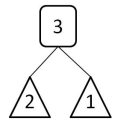

図 11 3 人 2 値ゲームの同値変換後

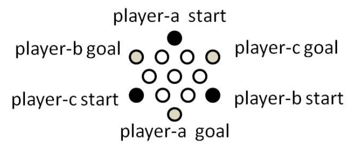

図 12 ダイヤモンドゲーム

6.2 各種実験と結果

6.2.1 最善手が一意に定まるノードの数

各種手法でゲーム木でどれだけのノードで最善手を一意に定めることが出来るかを調べた．図 1 にその結果を示す.「既存手法」は max^n アルゴリズム,「kmn-η」は kmn-η 則,「kmn-η，均衡点」は kmn-η 則と部分ゲーム完全一段階予測均衡点をそれぞれ適用した場合に，最善手が一意に定まるノードと定まらないノードの数を示す．また，一意に定まった最善手に各プレイヤーが従っている時に，ルートノードからのプレイで到達する可能性のあるノードの数を示す.「既存手法」,「kmn-η」,「kmn-η，均衡点」の順に，最善手が一意に定まるノードの数が増加していることが分かる．

6.2.2 ゲーム木の同値変形

同値変形によりゲーム木をどれだけノードの数を減らし単純化出来るかを調べた．図 **??** にその結果を示す．上から順に，そのままのゲーム木，同値変形したゲーム木，kmn-η 則を適用後に同値変形したゲーム木，kmn-η 則を適用し部分ゲーム完全一段階予測均衡点を求めた後同値変形したゲーム木である．順にノードの数が減っていき，部分ゲーム完全一段

表 1 最善手が一意に定まらないノードの数

	全ノード数	うち，一意に定まる/定まらないノード数	到達しうるノード数	うち，一意に定まる/定まらないノード数
既存手法	84	0 / 84	84	0 / 84
kmn-η	84	25 / 59	69	20 / 49
kmn-η，均衡点	84	38 / 46	63	28 / 35

階予測均衡点ではキングメーカーノードが 1 つあるだけの木まで単純化できた．

表 2 同値変形によるノードの数の削減

	ノード数	リーフ数	キングメーカーノードの数
元のゲームツリー	84	112	26
同値変形	72	85	19
kmn-η，同値変形	9	10	5
kmn-η，均衡点，同値変形	1	2	1

6.2.3 既存手法と提案手法の対戦

4 つの手法を用意しダイヤモンドゲームで対戦を行った．4 つの戦略は，全てのノードでランダムに手を選ぶ「RNDall」，kmn-η 則に従い候補からランダムに手を選ぶ「RNDeta」，max^n アルゴリズムを用いて予想利得が最大である子ノードを当確率で選ぶ「eqprob」，kmn-η 即と部分ゲーム一段階予測均衡点に従い最善手が定まらないノードでは勝者を当確率で選ぶ「1EP」である．対戦は「戦略 1EP を使うプレイヤーが 1 人と，他の戦略を使うプレイヤーが 2 人」「1EP を使うプレイヤーが 2 人と他の戦略を使うプレイヤーが 1 人」で行い，プレイヤーの各手番順を 1 回ずつ行った時に得られる期待利得の平均をとった．

各プレイヤーが他のプレイヤーの戦略を知らず，他のプレイヤーが自分と同じ戦略を用いていると仮定して手を選ぶ場合の結果を表 3 に，各プレイヤーが他のプレイヤーの戦略を知っている場合の結果を表 4 に示す．2 つの組み合わせを除き 1EP が他の戦略を上回っていることが分かる．唯一下回っているのは「戦略 1EP が 1 人，eqprob が 2 人」，同点となっているのが「戦略 1EP が 2 人，eqprob が 1 人」の場合である．1EP の戦略は「自分の戦略の変更によって，他のプレイヤーに戦略を変えさせることにより自分の利得を上げる」というものであるので，お互いの戦略を適当に予測する状況では効果が小さくなっていることが確認された．また 1EP を用いるプレイヤー a は「プレイヤー b のうち片方はプレイヤー c を勝たせないように振る舞う」と仮定して最善手を決めているが，プレイヤー b が実際は eqprob を用いているためにこの仮定が間違っており，結果として得られる利得が悪くなっているという状況も見られた．a と b の戦略が逆の場合にも同様の状況が見られた．

表 3 相手の戦略を知らない場合の各戦略の平均利得

戦略	平均利得	戦略	平均利得
1EP 1 人	0.374	RNDall 2 人	0.313
1EP 2 人	0.421	RNDall 1 人	0.157
1EP 1 人	0.347	RNDeta 2 人	0.327
1EP 2 人	0.359	RNDeta 1 人	0.281
1EP 1 人	0.213	eqprob 2 人	0.394
1EP 2 人	0.333	eqprob 1 人	0.333

表 4 相手の戦略を知る場合の各戦略の平均利得

戦略	平均利得	戦略	平均利得
1EP 1 人	0.615	RNDall 2 人	0.192
1EP 2 人	0.431	RNDall 1 人	0.139
1EP 1 人	0.449	RNDeta 2 人	0.276
1EP 2 人	0.458	RNDeta 1 人	0.083
1EP 1 人	0.472	eqprob 2 人	0.264
1EP 2 人	0.417	eqprob 1 人	0.167

7. おわりに

本稿では既存手法で考えられてきたプレイヤーの合理性の概念を拡張することで導かれる，部分ゲーム完全一段階予測均衡点を定義した．この均衡点によって既存手法では最善手を複数導かれてしまった多くのキングメーカーノード上で，最善手を一意に導かれることを示した．

今後の課題としては，評価値を使った max^n アルゴリズムや利得が実数のゲームにおいて，この部分ゲーム完全一段階予測均衡点が有効な働きをするのかどうかの検証や，そのための均衡点の概念の改良が考えられる．

参考文献

1) C.Luckhardt and K.Irani. An algorithmic solution of n-person games. In *Proceedings of the 5th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI)*, pp. 158–162, 1986.
2) J.Nash. Non-cooperative games. *The Annals of Mathematics*, Vol.54, No.2, pp. 286–295, 1951.
3) J.F. Nash, etal. Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the national academy of sciences*, Vol.36, No.1, pp. 48–49, 1950.
4) R. Selten. Spieltheoretische behandlung eines oligopolmodells mit nachfrageträgheit: Teil i: Bestimmung des dynamischen preisgleichgewichts. *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft/Journal of Institutional and Theoretical Economics*, Vol. 121, No.2, pp. 301–324, 1965.