資 料

条件の悪い連立1次方程式の誤差解析における数値実験†

大原正志†† 石原和夫††

Abstract

The numerical analysis of complex phenomena which was very difficult, has now become comparatively easy to solve approximately by the highspeed digital computer.

In the structural analysis by the finite element method, it is the most important to solve successfully the linear algebraic equations.

In solving the ill-conditioned equation, the numerical solution may often become absurd owing to the finite significance of the computer number set.

We clarify the difference between the real number set (which is a field) and the computer number set (which is not a field). And we can estimate the number of significant digits by the conditioning number of the coefficient matrix of the equation and show the numerical experiments of Hilbert matrices and Lotkin matrices which are very ill-conditioned and Pascal matrices. We used UNIVAC-1108 for this purpose.

1. まえがき

従来，解析が極めて困難とされていた複雑な現象も，コンピュータの高速化，大型化によって，数値的に比較的容易に解析できるようになってきた．とくに有限要素法[1)]による構造解析などにおいては，最終的には，多元連立1次方程式を解くことに帰着される．これを計算機で解く場合，有限桁であるため ill-condition と言われる行列においては，非常に奇妙な解が得られる場合がしばしば起る．そのためにまず実数体 (real number) と計算機内部で表わされる数 (computer number) の差異について，あきらかにする．そして連立1次方程式を解いて得られた解の有効桁は，行列の条件数を導入することにより，ある程度評価できることを数値実験とともに示す．

扱った行列は，ill-condition として著名なヒルベルト行列で，数値解法のアルゴリズムは，コレスキー分解により，さらにロトキン行列については掃き出し法により計算した．パスカル行列も同様に計算した．使用した計算機は UNIVAC-1108 である．

† Numerical Experiments of Error Analysis of ill-conditioned Linear Algebraic Equations, by Masashi Oohara and Kazuo Ishihara (Toyota Motor Co., Ltd.)

†† トヨタ自動車工業株式会社技術電算室

2. real number と computer number

実数全体の集合を $\boldsymbol{R}$ とすると，$\boldsymbol{R}$ は，体 (field) の概念をなし，次の性質がある．

1° $\boldsymbol{R}$ は無限集合で，演算として加法と乗法が定義され，それらの演算に関して閉じている．すなわち $\boldsymbol{R}$ の任意の元 a, b に対して
$a+b\in\boldsymbol{R},\ a\cdot b\in\boldsymbol{R}$.

2° 加法に関する結合律が成り立つ．
$(a+b)+c=a+(b+c)$

3° 加法に関して交換律が成り立つ．
$a+b=b+a$.

4° 任意の $a, b\in\boldsymbol{R}$ に対して
$a+x=b$ を満足させる $x\in\boldsymbol{R}$ が一意的に存在する．とくに $b=a$ のとき，x を 0 で表わし加法の単位元をなす．

5° 乗法に関して結合律が成り立つ．
$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$.

6° 乗法に関して交換律が成り立つ．
$a\cdot b=b\cdot a$.

7° 任意の $a, b\in\boldsymbol{R}$ (ただし $a\neq 0$) に対して

$a \cdot x = b$ を満足する $x \in \boldsymbol{R}$ が，一意的に存在する．とくに $b=a$ のとき，x を1で表わし乗法の単位元をなす．

8° 加法と乗法の間に，分配律が成り立つ．
$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

2進の有限ビット数で表わされる computer number 全体の集合を $\boldsymbol{F}$ とする．

任意の実数 x を計算機の中で表わす場合は，$\boldsymbol{F}$ のある数で近似するのであるが，そこですでに誤差は，ふつう含まれている．

しかも実数体 $\boldsymbol{R}$ にある性質が，有限集合 $\boldsymbol{F}$ においても必ずしも保たれない．したがって，計算した結果，奇妙な解が得られる原因となる．それらの $\boldsymbol{R}$ で保たれない例を列挙する．

1° $\boldsymbol{F}$ は有限で上界，下界のある集合でしかも稠密 (dense) でない．

2° 加法，乗法に関して必ずしも閉じてない．
$2^{126}+2^{126}=$ overflow (定義されない)．
$2^{100} \cdot 2^{100}=$ overflow.

3° 加法における結合律が必ずしも成り立たない．
$(2^{-20}+2^{20})-2^{20}=0 \neq 2^{-20}+(2^{20}-2^{20})$.

4° 加法における単位元0はただ一つでない．
$2^{20}+2^{-20}=2^{20}$.

5° 乗法における結合律が必ずしも成り立たない．
$$2^{100} \cdot (2^{100} \cdot 2^{-100}) = 2^{100} \neq (2^{100} \cdot 2^{100}) \cdot 2^{-100} = \text{overflow}.$$

つぎに 10 進 (decimal) の浮動小数点で表わされる有効桁と，その有効精度を保つために必要な計算機のビット数は，Goldberg による次の定理[2]から明らかとなる．

定理 x を任意の 10 進の浮動小数点で，P 桁の有効桁数をもっているとする．$(P>0)$ y を x に対応した計算機内で表現された 2 進 (binary) の浮動小数点数で q 桁に丸めるとする．

y に対応する 10 進の浮動小数点数を z とする．ただし z は p 桁に丸めるとする．

$10^p < 2^{q-1}$ が成立すれば $x=z$ となり y は p 桁の有効桁数を保つ．

3. ノルムと条件数[3),4)]

n 次元ベクトル空間を $\boldsymbol{R}^n$ とする．

$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ とすれば $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$.

また $\|\boldsymbol{x}\|_k = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^k)^{1/k}$ と定義すれば $\|\cdot\|_k$ は，次のノルムの性質を満たす．

Ⅰ. $\|\boldsymbol{x}\|_k \geq 0$ $\boldsymbol{x}=0$ のときのみ $\|x\|_k=0$.

Ⅱ. $\|c\boldsymbol{x}\|_k = |c| \cdot \|\boldsymbol{x}\|_k$. c：スカラー．

Ⅲ. $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_k \leq \|\boldsymbol{x}\|_k + \|\boldsymbol{y}\|_k$ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n)$.

またマトリックスのノルムを次のように定義する．
$$\|A\|_k = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_k=1} \|A\boldsymbol{x}\|_k.$$

ただし，A は $n \times n$ 行列 $A=(a_{ij})$.

そのとき，ノルムの性質Ⅰ．Ⅱ．Ⅲ．の他に次の性質を満たす．

Ⅳ. $\|A \cdot B\|_k \leq \|A\|_k \cdot \|B\|_k$

通常使われるマトリックスのノルムは，次のものがある．

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|,$$
$$\|A\|_2 = (\text{max eigenvalue } (A^T \cdot A))^{1/2},$$
$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

またユークリッドノルムは次のように定義される．
$$\|A\|_E = (\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2)^{1/2}.$$

つぎに連立1次方程式
$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \qquad (\det A \neq 0) \tag{1}$$
を考える．以後ノルムの添字 k は省略する．$\boldsymbol{b}$ を固定し，A が $A+\delta A$ に変化したときの解を $\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x}$ とすれば，
$$(A+\delta A)(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}. \tag{2}$$

このとき $\|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| < 1$ と仮定すれば，ユークリッドノルムをのぞき次の誤差評価式が得られる．
$$\frac{\|\delta\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \frac{\|A^{-1}\delta A\|}{1-\|A^{-1}\delta A\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\|}{1-\|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\|}. \tag{3}$$

ここで条件数 (conditioning number) K_n を次のように定義する．
$$K_n = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|.$$

また行列 A の相対誤差 l を使えば(3)式は
$$\frac{\|\delta\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \frac{K_n l}{1-K_n l}. \tag{4}$$

ただし， $l = \|\delta A\| / \|A\|$

となる．

つぎに得られた解の有効桁を評価するため
$$\rho = \log_{10}\|\boldsymbol{x}\| - \log_{10}\|\delta\boldsymbol{x}\| \tag{5}$$
と置けば ρ は連立1次方程式の解を得たときの有効桁を表わしている．

ill-condition の場合には $\|\delta \boldsymbol{x}\|/\|\boldsymbol{x}\|$ が（3）の右辺 $\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\|/(1-\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\|)$ に近いから $1-\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\| \fallingdotseq 1$ と仮定すれば（5）式は次のようになる.

$$\rho=\log_{10}\frac{\|\boldsymbol{x}\|}{\|\delta\boldsymbol{x}\|}=\log_{10}\frac{1}{K_n l}=\log_{10}\frac{1}{l}-\log_{10}K_n$$
$$=g-\log_{10}K_n \qquad (6)$$

ただし，　$g=\log_{10}\dfrac{1}{l}$.

ここで g は計算機で表わされる有効桁数を示しているから $\log_{10}K_n$ は連立1次方程式を解いて得られる結果，失われる桁数を示していると考えることができる.

4. 数　値　実　験

以上得られた結果の数値実験を示すため，有限要素法などによる構造解析においては，最終的には正値対称行列となり，正値対称行列で ill-condition として著名なヒルベルト行列を考える.

$H_n=(h_{ij})$.　　$n\times n$ ヒルベルト行列,

$h_{ij}=1/(i+j-1)$.

$n=2, 3, 4, 5, 6, 7$ の場合を考えれば，H_n, H_n^{-1} は次のようになる.

$$H_2=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix},\quad H_2^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -6\\ -6 & 12\end{pmatrix},\quad H_3=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad H_3^{-1}=\begin{pmatrix}9 & -36 & 30\\ -36 & 192 & -180\\ 30 & -180 & 180\end{pmatrix},$$

$$H_4=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7}\end{pmatrix},\quad H_4^{-1}=\begin{pmatrix}16 & -120 & 240 & -140\\ -120 & 1200 & -2700 & 1680\\ 240 & -2700 & 6480 & -4200\\ -140 & 1680 & -4200 & 2800\end{pmatrix},$$

$$H_5=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9}\end{pmatrix},\quad H_5^{-1}=\begin{pmatrix}25 & -300 & 1050 & -1400 & 630\\ -300 & 4800 & -18900 & 26880 & -12600\\ 1050 & -18900 & 79380 & -117600 & 56700\\ -1400 & 26880 & -117600 & 179200 & -88200\\ 630 & -12600 & 56700 & -88200 & 44100\end{pmatrix},$$

$$H_6=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11}\end{pmatrix},\quad H_6^{-1}=\begin{pmatrix}36 & -630 & 3360 & -7560 & 7560 & -2772\\ -630 & 1470 & -8820 & 211680 & -220500 & 83160\\ 3360 & -8820 & 564480 & -1411200 & 1512000 & -582120\\ -7560 & 211680 & -1411200 & 3628800 & -3969000 & 1552320\\ 7560 & -220500 & 1512000 & -3969000 & 4410000 & -1746360\\ -2772 & 83160 & -582120 & 1552320 & -1746360 & 698544\end{pmatrix},$$

$$H_7=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} \end{pmatrix},\quad H_7^{-1}=\begin{pmatrix} 49 & -1176 & 8820 & -2940 & 48510 & -38808 & 12012 \\ -1176 & 37642 & -317520 & 1128960 & -1940400 & 1596672 & -504504 \\ 8820 & -317520 & 2857680 & -10584000 & 18711000 & -15717240 & 5045040 \\ -2940 & 1128960 & -10584000 & 40320000 & -72765000 & 62092800 & -20180160 \\ 48510 & -1940400 & 18711000 & -72765000 & 133402500 & -115259760 & 37837800 \\ -38808 & 1596672 & -15717240 & 62092800 & -115259760 & 100590336 & -33297264 \\ 12120 & -504504 & 5045040 & -20180160 & 37837800 & -33297264 & 11099088 \end{pmatrix}.$$

表 1　有効桁の理論的評価（ヒルベルト行列）

Table 1　Theoretical estimation of significant digits (Hilbert matrices)

order	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$
$\|H_n\|_1$	1.5	1.83	2.08	2.28	2.45	2.59
$\|H_n^{-1}\|_1$	1.80×10^1	4.08×10^2	1.36×10^4	4.13×10^5	1.19×10^7	3.80×10^8
K_1	2.70×10^1	7.48×10^2	2.84×10^4	9.44×10^5	2.92×10^7	9.84×10^8
$\rho=7.83-\log_{10}K_1$（単精度）	6.4	4.96	3.38	1.86	0.36	負
$\rho=17.76-\log_{10}K_1$（倍精度）	16.33	14.89	13.31	11.79	10.29	8.77
$\|H_n\|_2$	1.27	1.41	1.50	1.57	1.62	1.66
$\|H_n^{-1}\|_2$	1.52×10^1	3.72×10^2	1.03×10^4	3.04×10^5	9.24×10^6	2.86×10^8
K_2	1.93×10^1	5.24×10^2	1.55×10^4	4.77×10^5	1.50×10^7	4.75×10^8
$\rho=7.83-\log_{10}K_2$（単精度）	6.54	5.11	3.64	2.15	0.65	負
$\rho=17.76-\log_{10}K_2$（倍精度）	16.47	15.04	13.57	12.08	10.59	9.08

また正値対称行列 $A=(a_{ij})$ はコレスキーの分解により次のように分解できる.

$$A=S^T\cdot S \tag{7}$$

ただし，S は対角線より下の要素は0である上三角行列でその成分 S_{ij} は，次のアルゴリズムから計算できる.

$$\left.\begin{aligned} &S_{11}=\sqrt{a_{11}},\quad S_{ij}=a_{1j}/S_{11} && (1<j\leq n)\\ &S_{ij}=(a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1}S_{ki}\cdot S_{kj})/S_{ii} && (1<i<j\leq n)\\ &S_{jj}=(a_{jj}-\sum_{k=1}^{j-1}S_{kj}{}^2)^{1/2} && (1<j\leqq n)\\ &S_{ij}=0 && (1\leq j<i) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

いま，ヒルベルト行列による連立1次方程式

$$H_n\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \tag{9}$$

を考えれば，

$$S^T\cdot S\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}. \tag{10}$$

$\boldsymbol{b}=(1,0,\cdots,0)^T$ を考えれば，解 $\boldsymbol{x}$ は H_n^{-1} の第1列目となる.

$$\boldsymbol{y}=S\cdot\boldsymbol{x} \tag{11}$$

と置けば，(10)式は

$$S^T\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b} \tag{12}$$

となり y_1 から順次 $y_2,\cdots,y_n$ と求められる.（前進代入）　つぎに $S\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ より x_n から $x_{n-1},\cdots,x_1$ と計算できる.（後退代入）　$\boldsymbol{b}=(1,0,\cdots,0)^T$ の各要素は1と0であるから，これらは計算機内でも誤差を含まない.

したがって前の結果を利用すると，有効桁数の評価が表1のように得られる.

また計算機で得られた解は，表2，3，4，5，6，7のとおりである.

なお使用した計算機は UNIVAC-1108 で，単精度演算は，1 word 36 ビットで仮数部が 27 ビット，倍

表 2　解の数値例（order　$n=2$）

Table 2　Numerical solution (order $n=2$)

x_i	厳密解	単　精　度	倍　精　度
x_1	4	$0.4000000\underline{1}\times10^1$	$0.40000000000000000\underline{1}\times10^1$
x_2	-6	$-0.6000000\underline{2}\times10^1$	$-0.60000000000000000\underline{2}\times10^1$

表 3 解の数値例 (order $n=3$)

Table 3 Numerical solution (order $n=3$)

x_i	厳密解	単精度	倍精度
x_1	9	0.90000043×10^{1}	$0.900000000000000055\times10^{1}$
x_2	−36	-0.36000023×10^{2}	$-0.360000000000000030\times10^{2}$
x_3	30	0.30000022×10^{2}	$0.300000000000000028\times10^{2}$

表 4 解の数値例 (order $n=4$)

Table 4 Numerical solution (order $n=4$)

x_i	厳密解	単精度	倍精度
x_1	16	0.16000111×10^{2}	$0.160000000000000156\times10^{2}$
x_2	−120	-0.12000119×10^{3}	$-0.120000000000000165\times10^{3}$
x_3	240	0.24000278×10^{3}	$0.240000000000000385\times10^{3}$
x_5	−140	-0.14000178×10^{3}	$-0.140000000000000246\times10^{3}$

表 5 解の数値例 (order $n=5$)

Table 5 Numerical solution (order $n=5$)

x_i	厳密解	単精度	倍精度
x_1	25	0.25003715×10^{2}	$0.250000000000005740\times10^{2}$
x_2	−300	-0.30006878×10^{3}	$-0.300000000000010678\times10^{3}$
x_3	1050	0.10502956×10^{4}	$0.105000000000004609\times10^{4}$
x_4	−1400	-0.14004456×10^{4}	$-0.140000000000006971\times10^{4}$
x_5	630	0.63021783×10^{3}	$0.630000000000034161\times10^{3}$

表 6 解の数値例 (order $n=6$)

Table 6 Numerical solution (order $n=6$)

x_i	厳密解	単精度	倍精度
x_1	36	0.36098308×10^{2}	$0.360000000000232187\times10^{2}$
x_2	−630	-0.63270715×10^{2}	$-0.630000000000653483\times10^{3}$
x_3	3360	0.33778992×10^{4}	$0.336000000000438158\times10^{4}$
x_4	−7560	-0.76058042×10^{4}	$-0.756000000001132363\times10^{4}$
x_5	7560	0.76099415×10^{4}	$0.756000000001243783\times10^{4}$
x_6	−2772	-0.27914903×10^{4}	$-0.277200000000488195\times10^{4}$

表 7 解の数値例 (order $n=7$)

Table 7 Numerical solution (order $n=7$)

x_i	厳密解	単精度	倍精度
x_1	49	0.49562583×10^{2}	$0.490000000005470397\times10^{2}$
x_2	−1176	-0.11944270×10^{4}	$-0.117600000002124614\times10^{4}$
x_3	8820	0.89725264×10^{4}	$0.882000000020107030\times10^{4}$
x_4	−29400	-0.29924253×10^{5}	$-0.294000000007718802\times10^{5}$
x_5	48510	0.49376812×10^{5}	$0.485100000014017874\times10^{5}$
x_6	−38808	-0.39493556×10^{5}	$-0.388080000012024541\times10^{5}$
x_7	12012	0.12220384×10^{5}	$0.120120000003925193\times10^{5}$

表 8 数値実験による有効桁 (ヒルベルト行列)

Table 8 Significant digits by numerical experiment (Hilbert matrices)

order	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$
単精度	7桁	6桁	5桁	3桁	1桁	1桁
倍精度	17桁	16桁	15桁	13桁	11桁	10桁

表 9 コレスキー分解による S 行列の数値例 (order 7)

Table 9 Numerical solution of S matrix by Cholesky decomposition (order 7)

S_{ij}	厳密解	単精度	倍精度
$S_{1,1}$	1	0.10000000×10^{1}	$0.100000000000000000\times10^{1}$
$S_{1,2}$	$\frac{1}{2}$	0.50000000	0.500000000000000000
$S_{1,3}$	$\frac{1}{3}$	0.33333333	0.333333333333333333
$S_{1,4}$	$\frac{1}{4}$	0.25000000	0.250000000000000000
$S_{1,5}$	$\frac{1}{5}$	0.20000000	0.200000000000000000
$S_{1,6}$	$\frac{1}{6}$	0.16666667	0.166666666666666667
$S_{1,7}$	$\frac{1}{7}$	0.14285714	0.142857142857142857
$S_{2,2}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	0.28867513	0.288675134594812882
$S_{2,3}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	0.28867514	0.288675134594812883
$S_{2,4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{20}$	0.25980762	0.259807621135331594
$S_{2,5}$	$\frac{2\sqrt{3}}{15}$	0.23094011	0.230940107675805306
$S_{2,6}$	$\frac{5\sqrt{3}}{42}$	0.20619652	0.206196524710580630
$S_{2,7}$	$\frac{3\sqrt{3}}{28}$	0.18557688	0.185576872239522568
$S_{3,3}$	$\frac{\sqrt{5}}{30}$	0.74535576×10^{-1}	0.745355992499929869
$S_{3,4}$	$\frac{\sqrt{5}}{20}$	0.11180341	0.111803398874989488
$S_{3,5}$	$\frac{2\sqrt{5}}{35}$	0.12777532	0.127775312999987985
$S_{3,6}$	$\frac{5\sqrt{5}}{84}$	0.13309932	0.133099284374987486
$S_{3,7}$	$\frac{5\sqrt{5}}{84}$	0.13309930	0.133099284374987483
$S_{4,4}$	$\frac{\sqrt{7}}{140}$	0.18898128×10^{-1}	$0.188982236504613485\times10^{-1}$
$S_{4,5}$	$\frac{\sqrt{7}}{70}$	0.37796502×10^{-1}	$0.377964473009227313\times10^{-1}$
$S_{4,6}$	$\frac{5\sqrt{7}}{252}$	0.52495070×10^{-1}	$0.524950656957260022\times10^{-1}$
$S_{4,7}$	$\frac{\sqrt{7}}{42}$	0.62994159×10^{-1}	$0.629940788348712245\times10^{-1}$
$S_{5,5}$	$\frac{1}{210}$	0.47612121×10^{-2}	$0.476190476190465131\times10^{-2}$
$S_{5,6}$	$\frac{1}{84}$	0.11903732×10^{-1}	$0.119047619047619698\times10^{-1}$
$S_{5,7}$	$\frac{3}{154}$	0.19481167×10^{-1}	$0.194805194805195849\times10^{-1}$
$S_{6,6}$	$\frac{\sqrt{11}}{2772}$	0.11932170×10^{-2}	$0.119647358959342449\times10^{-2}$
$S_{6,7}$	$\frac{\sqrt{11}}{924}$	0.35836459×10^{-2}	$0.358942076878226702\times10^{-2}$
$S_{7,7}$	$\frac{\sqrt{13}}{12012}$	0.30026626×10^{-3}	$0.300162443841059964\times10^{-1}$

表 10　前進代入によるの $\boldsymbol{y}$ 数値例 (order 7)

Table 10　Numerical solution of $\boldsymbol{y}$ by forward substitution (order 7)

y_i	厳密解	単　精　度	倍　精　度
y_1	1	0.10000000×10^1	$0.100000000000000000\times10^1$
y_2	$-\sqrt{3}$	-0.17320508×10^1	$-0.1732050807568877\underline{30}\times10^1$
y_3	$\sqrt{5}$	$0.223606\underline{89}\times10^1$	$0.2236067977499789\underline{82}\times10^1$
y_4	$-\sqrt{7}$	$-0.2645\underline{7716}\times10^1$	$-0.264575131106459\underline{343}\times10^1$
y_5	3	$0.3000\underline{6008}\times10^1$	$0.30000000000000\underline{9300}\times10^1$
y_6	$-\sqrt{11}$	$-0.33\underline{308536}\times10^1$	$-0.331662479035\underline{881382}\times10^1$
y_7	$\sqrt{13}$	$0.36\underline{693690}\times10^1$	$0.36055512755\underline{3663184}\times10^1$

精度演算は，2 word 72 ビットで仮数部が 60 ビットである．

したがって，Goldberg の定理により単精度は 7.83 桁，倍精度 17.76 桁の有効桁表示が可能である．

数値実験により得られるヒルベルト行列の有効桁は，表 8 のようになる．したがって，表 1 と表 8 を比較すれば，ほぼ理論的解析と数値例とが一致することがわかる．ヒルベルト行列は，条件数により有効桁の評価が可能である．

なお，order $n=7$ の場合において，(8) 式のコレスキー分解により得られる行列 S，および前進式により得られる $\boldsymbol{y}$ の解析解は，(13)，(14) のとおりである．またこれらの数値解の誤差伝播は，表 9，表 10 のとおりである．

$$S=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{3\sqrt{3}}{20} & \frac{2\sqrt{3}}{15} & \frac{5\sqrt{3}}{42} & \frac{3\sqrt{3}}{28} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{30} & \frac{\sqrt{5}}{20} & \frac{2\sqrt{5}}{35} & \frac{5\sqrt{5}}{84} & \frac{5\sqrt{5}}{84} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{7}}{140} & \frac{\sqrt{7}}{70} & \frac{5\sqrt{7}}{252} & \frac{\sqrt{7}}{42} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{210} & \frac{1}{84} & \frac{1}{153} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{11}}{2772} & \frac{\sqrt{11}}{924} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{13}}{12012} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

$$\boldsymbol{y}=(1, -\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, 3, -\sqrt{11}, \sqrt{13})^T. \tag{14}$$

なお表の中の線は誤差を表わす．

つぎにロトキン行列について考える．

$A_n=(a_{ij})$.　　$n\times n$　ロトキン行列．

$n=2, 3, 4, 5, 6, 7$ の場合を考えれば，A_n および A_n^{-1} は次のようになる．

$$A_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},\quad A_2^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix},\qquad A_3=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix},\quad A_3^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 36 & -60 \\ -12 & -96 & 180 \\ 10 & 60 & -120 \end{pmatrix},$$

$$A_4=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix},\quad A_4^{-1}=\begin{pmatrix} -4 & 120 & -480 & 420 \\ 30 & -600 & 2700 & -2500 \\ -60 & 900 & -4320 & 4200 \\ 35 & -420 & 2100 & -2100 \end{pmatrix},$$

$$A_5=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \end{pmatrix},\quad A_5^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & 300 & -2100 & 4200 & -2520 \\ -60 & -2400 & 18900 & -40320 & 25200 \\ 210 & 6300 & -52920 & 117600 & -75600 \\ -280 & -6720 & 58800 & -134400 & 88200 \\ 126 & 2520 & -22680 & 52920 & -35280 \end{pmatrix},$$

$$A_6=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} \end{pmatrix},\quad A_6^{-1}=\begin{pmatrix} -6 & 630 & -6720 & 22680 & -30240 & 13860 \\ 105 & -7350 & 88200 & -317520 & 441000 & -207900 \\ -560 & 29400 & -376320 & 1411200 & -2016000 & 970200 \\ 1260 & -52920 & 705600 & -2721600 & 3969000 & -1940400 \\ -1260 & 44100 & -604800 & 2381400 & -3528000 & 1746360 \\ 462 & -13860 & 194040 & -776160 & 1164240 & -582120 \end{pmatrix},$$

$$A_7=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} \end{pmatrix},\quad A_7^{-1}=\begin{pmatrix} 7 & 1176 & -17640 & 88200 & -194040 & 194040 & -72072 \\ -168 & -18816 & 317520 & -1693440 & 3880800 & -3991680 & 1513512 \\ 1260 & 105840 & -1905120 & 10584000 & -24948000 & 26195400 & -10090080 \\ -4200 & -282240 & 5292000 & -30240000 & 72765000 & -77616000 & 30270240 \\ 6930 & 388080 & -7484400 & 43659000 & -106722000 & 115259760 & -45405360 \\ -5544 & -266112 & 5239080 & -31046400 & 76839840 & -83825280 & 33297264 \\ 1716 & 72027 & -1441440 & 8648640 & -21621600 & 23783760 & -9513504 \end{pmatrix}.$$

表 11　有効桁の理論的評価（ロトキン行列）

Table 11　Theoretical estimation of significant digits (Lotkin matrices)

order	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$
$\|A_n\|_1$	1.5	1.83	2.08	2.28	2.45	2.62
$\|A_n^{-1}\|_1$	1.20×10^1	3.60×10^2	9.60×10^3	3.49×10^5	1.11×10^7	3.31×10^8
K_1	1.80×10^1	6.60×10^2	2.00×10^4	7.98×10^5	2.73×10^7	8.58×10^8
$\rho=7.83-\log_{10}K_1$ (単精度)	6.57	5.01	3.54	1.93	0.39	負
$\rho=17.76-\log_{10}K_1$ (倍精度)	16.50	14.94	13.44	11.86	10.32	8.83
$\|A_n\|_\infty$	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0
$\|A_n^{-1}\|_\infty$	9.0×10^1	2.88×10^2	9.48×10^3	2.88×10^5	9.39×10^6	3.19×10^8
K_2	1.80×10^1	8.64×10^2	3.79×10^4	1.44×10^6	5.64×10^7	2.23×10^9
$\rho=7.83-\log_{10}K_2$ (単精度)	6.57	4.89	3.25	1.67	0.08	負
$\rho=17.76-\log_{10}K_2$ (倍精度)	16.50	14.82	13.18	11.60	10.01	8.41

この行列については，掃き出し法（消去法）により行なった．ロトキン行列の有効桁の理論的評価と数値実験の結果は表 11，12 のとおりである．これらを比較すれば，理論的評価と数値実験とが大変よく一致することがわかる．

さらにつぎのパスカル行列[7] $P=(P_{ij})$ を考える．

$$P_{ij}=\frac{1}{9}\,\frac{(i+j-2)!}{(i-1)!(j-1)!}.$$

この行列についての理論的有効桁の評価と数値実験における有効桁は，表 13，14 のとおりである．

表 12　数値実験による有効桁（ロトキン行列）

Table 12　Significant digits by numerical experiment (Lotkin matrices)

order	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$
単精度	7桁	6桁	5桁	2桁	1桁	0桁
倍精度	18桁	16桁	14桁	13桁	11桁	10桁

この行列は，ヒルベルト行列，ロトキン行列よりは少し条件が良いため，理論的評価よりも 1 桁ほど良い結果が得られている．

表 13 有効桁の理論的評価（パスカル行列）

Table 13 Thoretical estimation of significant digits (Pascal matrices)

order	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$
$\|P\|_1$	0.33	1.11	3.89	1.40×10^1	5.13×10^1	1.91×10^2
$\|P^{-1}\|_1$	2.70×10^1	9.00×10^1	3.06×10^2	1.12×10^3	4.00×10^4	1.50×10^4
K_1	9.00	1.00×10^2	1.19×10^3	1.56×10^4	2.05×10^5	2.87×10^6
$\rho=7.83\log_{10}K_1$（単精度）	6.88	5.83	4.75	3.64	2.51	1.37
$\rho=17.76\log_{10}K_1$（倍精度）	16.81	15.76	14.68	13.57	12.45	11.30

表 14 数値実験による有効桁（パスカル行列）

Table 14 Significant digits by numerical experiment (Pascal matrices)

order	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=6$
単精度	8桁	6桁	6桁	5桁	4桁	2桁
倍精度	18桁	17桁	15桁	15桁	14桁	13桁

5. おわりに

以上により，連立１次方程式の誤差解析が行列の条件数によりある程度評価できることが，明らかになった.

本研究を行うにあたって，日頃ご指導いただいているトヨタ自工技術電算室三木室長，また有益なご教示をいただいた京大理学部数学教室山口昌哉教授，技術電算室の諸兄に深謝いたします.

参考文献

1) Zienkiewicz, O. C. and Cheung, Y. K.: The Finite Element Method in Structures and Continuum Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1967.
2) Goldberg, I. B.: 27 Bits are not Enough for 8 Digit Accuracy, Communications of the ACM, Vol. 10, No. 2, February 1967, pp. 105, 106.
3) 新谷尚義，数値計算 I，朝倉書店，1967.
4) Wilkinson, J. H.: The Algebraic Eigenvalue Problem, Clarendon Press, 1965.
5) Rosanoff, R. A. and Ginsburg, T. A.: Matrix Error Analysis for Engineers, Proceedings of Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Dayton, Ohio, December 1965, pp. 887—910.
6) Forsythe, G. E. and Moler, C. B.: Computer Solution of Linear Algebraic Systems, Prentice-Hall, 1967. 渋谷，田辺訳，線形計算の基礎，培風館，1969.
7) Gregory, R. T. and Karney, D. L.: A Collection of matrices for Testing Computational Algorithms, Wiley-Interscience.

（昭和47年3月 3 日受 付）
（昭和47年8月15日再受付）