

微分方程式の解曲線の表示†

村上伸一††

Abstract

This paper discusses a method to display the solution curves of given differential equations. The solution curves can be represented as sequences of points which are calculated successively by use of difference equations derived from the given differential equations.

The characteristics of this method are summarized as follows; (1) the solution curves are displayed in two-dimensional forms, (2) the method is easily programmable, (3) it can deal with nonlinear differential equations of implicit forms, (4) the approximated shapes of the solution curves can be obtained within a relatively short period.

1. ま え が き

工学や物理学上の諸問題や実際の設計問題等の際には非線形の微分方程式が現われることが多い。そしてこのような際、解の正確な値を求めることも重要であるが、ただ単に解の存在範囲を知ることやその大略の値を知ること、また各パラメータの値の変化に対する解の変化の傾向を知るといった概略的な関係を求めることも必要な場合が多い。ここでは後者のような目的のために、与えられた常微分方程式の解の示す曲線を比較的簡単な取り扱いで数値計算により求め、デジタル・プロットを用いてその解曲線を直接2次元平面上に図形表示することを考える。

微分方程式を計算機を用いて数値的に解く方法については種々の方法が提案されている。その一つは、与えられた微分方程式をそれに対応する差分方程式におきかえる方法である。そしてその差分方程式を用いて与えられた区間内にとられた各格子点においてある初期値から出発し緩和法¹⁾によりその差分方程式の解を求め、それを与えられた微分方程式の解とするものである。一般には差分方程式の解は必ずしもそれが対応する微分方程式の解に収束するとは限らないが、この方法は各操作が比較的単純であり、また各格子点で誤差を調べながら繰り返し計算を行なうことにより近似度を上げることが可能である。しかし収束の速度と繰り返し計算のための計算量の多さ等から、解の概略

的な値を短時間で求めるといった目的には不向きである。

また予測子修正子法は着目している格子点の近傍のいくつかの格子点だけの関数値を用いた差分方程式による緩和を行ない、その格子点の値がある誤差内に納まるまで繰り返し計算を行なうことにより解を得る方法である。しかしこの方法も繰り返し計算を含むため短時間で解を求めるといった目的には不向きである。

微分方程式の他の数値解法としては Euler 法および Runge-Kutta 法で代表される解曲線の勾配を計算し、解曲線を順次延長してゆく方法がある。この方法は解曲線を延長する方向を求める時、1つの格子点については1回の計算を行なうだけでよく計算量の面からは有利である。しかしこの方法は普通その1次の微係数が陽関数の形に表現された形の方程式を対象としている。

ここでは一般に陰関数形式で与えられた非線形常微分方程式を対象とし、その解曲線の形を短時間で求め図形表示するといった立場から、与えられた微分方程式に対応する一種の差分方程式を用いて、その解曲線に沿って格子点を移動させながら解曲線を延長し求めるといった方法について考察する。この方法は微分方程式の差分方程式による近似解法に Euler 法、Runge-Kutta 法のような各格子点で微係数を推定する方法をとり入れたものであり、この方法の特徴は緩和法のような繰り返し操作を含まないこと、定義域内に2次元的な格子点を考えていること、部分的に y 軸に平行な軌跡をもつ曲線も取り扱うことができること、また曲線の延長方向に沿って格子点を等間隔に移動させ

† Displaying the solution curves of a differential equation, by Shin-ichi Murakami (Musashino Electrical Communication Laboratory, N. T. T.)

†† 武蔵野電気通信研究所

ることにより解曲線の変化に滑らかに追従すること等である。

2. 曲線追跡による微分方程式の解の図形表示

2.1 微分方程式と差分方程式

微分方程式の数値解法としてよく用いられる手法は与えられた微分方程式をそれに対応する差分方程式に直して解く方法である。すなわち微分方程式

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(k)})=0 \quad (1)$$

が与えられたとき変数 x の変域を n 等分した格子点 $x_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ を考える。そして格子点 x_i における微分方程式 (1) の解曲線上の y の値を y_i とするとき、 n を十分大きくとれば

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} \quad (2)$$

は格子点 (x_i, y_i) における微係数 y' を示すと考えられる。また x の変域を n 等分した間隔を d で表わすと

$$\frac{1}{x_{i+1}-x_i} \left(\frac{y_{i+2}-y_{i+1}}{x_{i+2}-x_{i+1}} - \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} \right) = \frac{1}{d^2} (y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i) \quad (3)$$

は格子点 (x_i, y_i) における y'' を示し、一般に

$$\frac{1}{d^m} \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} y_{i+j} \quad (4)$$

は格子点 (x_i, y_i) における m 次の微係数 $y^{(m)}$ を示すと考えられる。そこで点列 $(x_i, y_i) (i=0, 1, 2, \dots, n)$ が微分方程式 (1) の解曲線上の点であるときには、その点列 (x_i, y_i) は (1) 式の x を x_i で、 y を y_i で、 y' を (2) 式で、一般に $y^{(m)}$ を (4) 式でおきかえた式

$$F(x_i, y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+m})=0 \quad (5)$$

を満たすはずである。与えられた微分方程式 (1) に対し上の手順で作られる $n+1$ 個の式 (5) を (1) 式の微分方程式の対応する差分類似式と呼ぶ。そして (5) 式を差分方程式として解きその解 (x_i, y_i) の点列を微分方程式 (1) の解とするのである。しかし一般に (5) 式の形で与えられる $n+1$ 個の差分方程式はそれが非線形となるような場合には解くのが困難になることが多い。

ここでは微分方程式 (1) の解曲線を求めるのにこの微分方程式を差分方程式におきかえる考え方を利用するが、上に述べた一般の差分方程式による近似の場合と異なり、 xy 平面内に x 軸方向に必ずしも等

間隔でない2次元的な格子点 (x_i, y_i) をとる。そして求める解曲線としては2次元座標の点列 (x_j, y_j) を求めることとし、与えられた微分方程式 (1) に対応する差分方程式としては (1) 式につきの代入を行なって得られるものを用いる。

$$\left. \begin{aligned} x &\rightarrow x_i, \\ y &\rightarrow y_i, \\ y' &\rightarrow \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \triangleq D_i^{(1)}, \\ y'' &\rightarrow \frac{1}{\Delta x_{i-1}} \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} - \frac{\Delta y_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} \right) \triangleq D_i^{(2)}, \\ y^{(m)} &\rightarrow \frac{1}{\Delta x_{i-1}} (D_i^{(m-1)} - D_{i-1}^{(m-1)}). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_i &\triangleq x_{i+1} - x_i, \\ \Delta y_i &\triangleq y_{i+1} - y_i, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 &= S^2, \\ s &: \text{ステップ間隔を示す定数.} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(6) 式の意味は前に述べた一般の微分方程式に対する差分方程式近似の式 (2), (3) および (4) 式と同様、ある1つの点列で示される近似曲線 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_i, y_i)$ が与えられているとき、この曲線を次の格子点 (x_{i+1}, y_{i+1}) へ延長することになると格子点 (x_i, y_i) でこの曲線の各微係数の値はどのような値をとるかを表わしたものである。したがって点列 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$ が格子点 (x_i, y_i) に着目して微分方程式 (1) の解曲線であるためには、この点列は (6) 式を (1) 式に代入した式を満たしているはずである。そこである1つの中心格子点 P_0 から解曲線の延長方向を探る手掛りとしてたとえば P_0 のまわりに8つの方向を考え、そのそれぞれの方向へ解曲線の延長を行なってみる(図1)。そしてその各場合について (6) 式を計算し、(1) 式の左辺へ代入してみてその値が0に近いかどうかみることにより、その延長方向が与えられた微分方程式 (1) を満たすかどうか調べることにする。

与えられた微分方程式に対しそれを差分方程式に変換する際 (2), (3), (4) 式でなく、(6), (7), (8) 式を用いることによる特徴にはつぎのようなものがある。(2), (3), (4) 式では解曲線の各微係数を考える格子点は曲線の延長方向に拘らず変数 x の増加する方向に等間隔にとられている。したがって、 x 軸方向の増加に比較して y 軸方向への増加が急な解曲線に対しては解曲線に沿った格子点間隔は実質的に長くとられることになり極端な場合として y 軸に平行

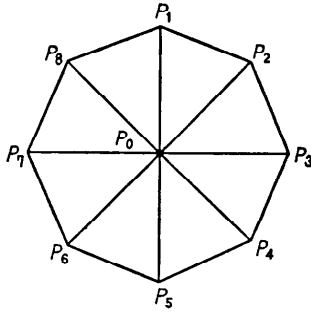


図 1 探索の多角形

Fig. 1 Searching directions

な部分を含む解曲線に対しては延長は困難である。これに対し (6), (7), (8) 式による延長方法では, 延長のステップ間隔を (8) 式で示されるように解曲線に沿って一定の長さ s としているので解曲線の傾きに関係なく一様な精度が期待できると共に, 解曲線が y 軸に平行な部分を含むようなものに対しても適用が可能である。

2.2 判定関数と曲線の延長方法

解曲線の延長方向を探るときの判定関数, すなわちある 1 つの方向への解曲線の延長が与えられた微分方程式に対しどの程度の適合度があるかを判定する判定関数について考察する。

与えられた微分方程式 (1) が k 次の微係数までを含む式であるとすると, (1) 式に (6) 式の代入を行なって得られる一種の差分類似式 F は

$$F(x_i, y_i, \Delta x_i, \Delta y_i, \Delta x_{i-1}, \Delta y_{i-1}, \dots, \Delta x_{i-k+1}, \Delta y_{i-k+1}) = 0 \tag{9}$$

となる。そしてある段階 i までの微分方程式 (1) の解曲線 $(x_1, y_1), \dots, (x_i, y_i)$ が求まっているとき, この点列に点 (x_{i+1}, y_{i+1}) を新たに付加し点列 $(x_1, y_1), \dots, (x_{i+1}, y_{i+1})$ が微分方程式 (1) を満足するようにすることは, x_{i+1}, y_{i+1} すなわち $\Delta x_i, \Delta y_i$ をうまく定め, 式 (9) が成立するようにすることになる。(9) 式の $2(k+1)$ 個の変数のうち $\Delta x_i, \Delta y_i$ を除く他の $2k$ 個の変数は変数 $x_i, y_i, \dots, x_{i-k+1}, y_{i-k+1}$ が求まっているときには (7) 式の関係から定数であるので, (9) 式は事実上 $\Delta x_i, \Delta y_i$ の変数の関数となる。そこで (9) 式を

$$G(\Delta x_i, \Delta y_i) = 0 \tag{10}$$

と書くことにすると, 格子点 (x_i, y_i) から解曲線を延長することは $\Delta x_i, \Delta y_i$ を上手に選び (10) 式を満たすようにすることになる。そこでこのための判定関数

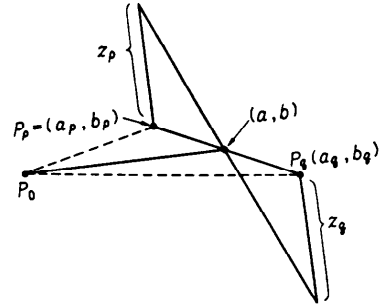


図 2 延長方向の決定

Fig. 2 Extension of the solution curves

として

$$z = G(\Delta x_i, \Delta y_i) \tag{11}$$

なる関数を考え, 変数 $(\Delta x_i, \Delta y_i)$ の値として延長方向を探るといえば時計方向にまわる 8 つの方向を示すベクトルの方向比† の値

$$\left. \begin{matrix} (0, 1), (1, 1), (1, 0), (1, -1), \\ (0, -1), (-1, -1), (-1, 0), (-1, 1) \end{matrix} \right\} \tag{12}$$

を順次 (11) 式に代入する。以後この延長方向を探る多角形を探索の多角形と呼ぶことにする (図 1)。

そして (10) 式を最も良く満たす方向を求めることは, (11) 式の代入値 z が 0 となる方向比 (a, b) を求めればよいこととなる。(12) 式の 8 つの方向比を順次式 (11) に代入した値のうちその値が正から負 (あるいは負から正) になる境目の 2 つの方向が求めればその間に (10) 式を満たす方向があることが分る。この値の符号が変る境目の 2 つの方向比の値を $(a_p, b_p), (a_q, b_q)$, その各々の方向での z の値を $z_p, z_q (z_p \cdot z_q \leq 0)$ とする。ここでこの 2 方向間で (11) 式の値が直線的に変化するものとすれば, (10) 式を満たす方向比 (a, b) は

$$\left. \begin{matrix} a = \frac{|z_p| a_q + |z_q| a_p}{|z_p| + |z_q|} \\ b = \frac{|z_p| b_q + |z_q| b_p}{|z_p| + |z_q|} \end{matrix} \right\} \tag{13}$$

で与えられることになる。したがって格子点 (x_i, y_i)

† (6) 式では $\Delta x_i, \Delta y_i$ は常に比として現われているのでここでは実際のステップ間隔と関係なく $\Delta x_i, \Delta y_i$ の値として方向比を代入してもよい。

†† 2 変数関数の方程式 (11) の解曲線を求めることは, 文献 5) にみられる。しかしここでの場合は第 i 段階では $\Delta x_{i-1}, \Delta y_{i-1}, \dots, \Delta x_{i-k+1}, \Delta y_{i-k+1}$ がそれぞれ $x_i, y_i, \dots, x_{i-k+1}, y_{i-k+1}$ で定められる定数であるが, それにより $\Delta x_i, \Delta y_i$ が求められ第 $i+1$ 段階の延長に移るときには $\Delta x_i, \Delta y_i, \dots, \Delta x_{i-k+2}, \Delta y_{i-k+2}$ が前とは別の新たな定数となるから, つぎの延長方向を探る判定関数 $Z = G(\Delta x_{i+1}, \Delta y_{i+1})$ はこれらの新しい定数を用いて作り直すことになる。

から延長される次の格子点は

$$\left. \begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \Delta x_i = x_i + s \times \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ y_{i+1} &= y_i + \Delta y_i = y_i + s \times \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned} \right\} (14)$$

とするのが妥当である。上の議論では (10) 式の代入値が 2 つの方向の間で直線的に変化すると仮定したが、これは延長方向を探る探索の多角形を 64~256 角形のように多角化すれば、相隣りあう 2 方向間隔は狭くなり、ほぼ満足されるものである。事実 3 に示す例では 128 分割に対する α の値を調べたがほとんど直線的に変化していることが確かめられた。

2.3 初期条件の設定

一般に微分方程式の解は積分定数を含み初期条件が定まらないと解は一意的に決定できない。微分方程式の初期条件としては k 次の微係数までを含む方程式の場合 k 個の初期条件が必要である。一方ここで述べた解曲線の求め方は曲線の一方の端から順次曲線に沿って解曲線を延長してゆくやり方なので初期条件の形式からすればいわゆる微分方程式の初期値問題である。そこでここでは初期条件として

$$\left. \begin{aligned} &\text{解曲線上の一点の座標 } (x_0, y_0) \\ &\text{点 } (x_0, y_0) \text{ での一次微係数 } \left(\frac{dy}{dx} \right)_{(x_0, y_0)} \\ &\vdots \\ &\text{点 } (x_0, y_0) \text{ での } k-1 \text{ 次の微係数 } \left(\frac{d^{(k-1)}y}{dx^{(k-1)}} \right)_{(x_0, y_0)} \end{aligned} \right\} (15)$$

の k 個の条件式が与えられているものとする。

2.2 の考察では曲線の延長を考えると、与えられた微分方程式が k 次の微係数までを含む式であるとき、(6) 式を (1) 式に代入して得られる差分類似式 (9) は $2(k+1)$ 個の変数を含む式となっている。すなわち 1 つの格子点から次の格子点を定めるためにはその格子点の $k-1$ 個以前の格子点の座標が必要である。そこで (15) 式の形の初期条件が与えられたときには、それから格子点 (x_0, y_0) における (9) 式に対する初期条件式すなわち (x_0, y_0) 点から仮想的な $k-1$ 個以前の曲線上の格子点を決定することが必要である。

ある一点における各微係数とその格子点座標との関係については 2.1 で考察した微係数を差分類似式に変形するときの関係式 (6) がある。したがって格子点 (x_0, y_0) においてその各微係数が (15) 式となるように点 (x_0, y_0) の直前 $k-1$ 個の格子点を定めること

は、(6) 式の $y', y'', \dots, y^{(m)}$ に (15) 式で与えられる初期条件を代入し、その式を $\Delta x_{i-1}, \Delta y_{i-1}, \Delta x_{i-2}, \Delta y_{i-2}, \dots, \Delta x_{i-k+1}, \Delta y_{i-k+1}$ について解くことになる。(6) 式は変数の数が $2k$ 個あり、条件式は k 個であるが、各微係数は (6) 式の形からも分るよう変数 $\Delta x, \Delta y$ の比の形になっている。そして Δx は各格子点の x 軸方向の間隔を示すものでここでは簡単のため初期条件設定の場合だけ x 軸方向に等間隔に格子点を選ぶことにする。すなわち

$$\Delta x_{i-j} = s \quad (j=1, 2, \dots, k-1) \quad (16)$$

とし (6) 式を (15), (16) 式の下に Δy_i について解くと

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_{i-1} &= s \left(\frac{dy}{dx} \right)_{(x_0, y_0)} \\ \Delta y_{i-2} &= s \left(\frac{dy}{dx} \right)_{(x_0, y_0)} - s^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_{(x_0, y_0)} \\ &\vdots \\ y_{i-k+1} &= \sum_{j=1}^{k-1} (-s)^j \left(\frac{d^j y}{dx^j} \right)_{(x_0, y_0)} \end{aligned} \right\} (17)$$

となる。したがって (15) 式の初期条件が与えられたとき、追跡操作の開始時に (17) 式を使って $\Delta y_{i-1}, \Delta y_{i-2}, \dots, \Delta y_{i-k+2}$ を求め、それを (9) 式に代入し判定関数 (11) を作ればよい。

2.4 解曲線追跡の手順

ここでこれまでに述べた微分方程式の解曲線追跡の手順をまとめておく。

与えられた微分方程式は k 次の微係数までを含むものとし、陰関数表現として (1) 式の形で与えられるものとする。またここでは格子点のステップ間隔を s 探索の多角形は正 v 角形であるとする。

手順

- (i) 与えられた微分方程式 (1) に対し、(6) 式を代入し (9) 式を得る。 $i=0$ 。
- (ii) 与えられた初期条件 (15) 式を用い (17) 式の形の初期値 $\Delta y_{-1}, \Delta y_{-2}, \dots, \Delta y_{-k+1}$ を求める。
- (iii) (ii) で得た初期値式 (17) を (i) で得た (9) 式に代入し判定関数式 (11) を作る。
- (iv) 曲線の延長方向を探るため、判定関数 (11) を用い中心格子点 (x_i, y_i) の周囲 v 個の方向比を (11) 式の $\Delta x_i, \Delta y_i$ に順次代入し、(11) 式の符号が変化する \uparrow 2 方向間を見つける。
- (v) (iv) で得た 2 方向間 v_2, v_0 に対し、(13) 式

† 符号の変化は正から負あるいは負から正の 2 箇所あるが、曲線を一定の方向に延長するためそのどちらかの境目のみを検出するようにする。……(ix) 参照。

を用い格子点 (x_i, y_i) からの曲線の延長方向を求める。

(vi) (v)で得た延長方向に対し (14) 式を用いつぎの延長格子点を決定する。

(vii) (vi)で得た格子点 (x_{i+1}, y_{i+1}) が曲線の定義域内に入っていればこの格子点をつぎの延長格子点として採用し、この点をあらためて中心格子点とみなす。i を 1 だけ増しあらたに判定関数(11)を作りなおす。以下 (iv) へもどり同様の操作を繰り返す。もし (vi) で得た格子点が曲線の定義域を越えたら (viii) へ。

(viii) 曲線の開始点 (x_0, y_0) に戻り $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{i-1}, y_{i-1})$ を (x_0, y_0) の直前の $k-1$ 個の格子点とみなし (7) 式を用い (9) 式に対する各 Δy_i の初期値を定め (11) 式の形の判定関数を得る。

(ix) (vi)と同様の操作で曲線の延長方向を求めるがこの場合は曲線を前回と逆の方向に延長するため符号の変化点は前回と逆の境目を見つけるようにする。

(x) 以下 (v), (vi) と同様の操作を行ない曲線の延長を行なう。得られる格子点が曲線の定義域を越えたら操作を終了する。

3. プログラムおよび適用例

前節までに述べた手順に基づいてプログラムを作成しいくつかの例について与えられた微分方程式の解曲線の図形表示を行なってみた。プログラムは FORTRAN で書かれ、プログラム長はおよそ 300 命令であった。プログラムでは与えられた微分方程式に対す

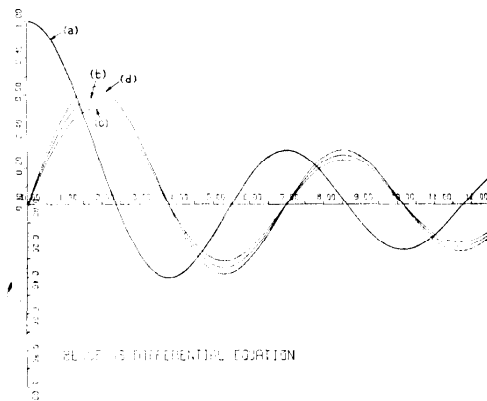


図 3 第 1 種円筒関数
Fig. 3 Bessel Function

る (9) 式の形の差分類似式は文関数の形で与えることにした。使用した計算機は NEAC 2200/500 で表示機器としてデジタルプロッタ N244 A-1 を用いた。なおこのプロッタは最小ステップが 0.2 mm であり表示曲線の滑らかさはこの値で押えられることになる。

例 1. Bessel の微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{k^2}{x^2}\right)y = 0 \quad (18)$$

を初期条件

$$k=0 \text{ に対し } P_0 = (0.1, 0.9975),$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_0} = -0.0499,$$

$$k=1 \text{ に対し } P_0 = (0.1, 0.05),$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{P_0} = 0.4981$$

の下で解く、このとき (18) 式に対応する (9) 式の形の差分類似式は (6) 式の代入により

$$F = \frac{1}{\Delta x_{i-1}} \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} - \frac{\Delta y_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} \right) + \frac{1}{x} \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} + \left(1 - \frac{k^2}{x_i^2}\right)y_i = 0 \quad (19)$$

となる。この解曲線はよく知られる第 1 種円筒関数となり (19) 式の差分類似式を用いてその軌跡を求めると図 3 (a) および (b) に示すものとなる。表示のために得た格子点の総数は J_0 については 2085 個、 J_1 については 1946 個で計算時間は合せて約 2 分であった。

例 2. 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = xy - 1 \quad (20)$$

の解曲線を求める。

(20) 式は最高次数が 1 次の微分方程式であるので、解曲線上の一点が定まると解曲線全体が一意的に定まる。(20) 式に本稿の手順を適用すると解曲線群として図 4 を得る。表示に用いた格子点の総数は約 16000 個計算時間は約 6 分であった。

4. 誤差について

ここでは 2.1~2.4 に述べた解曲線追跡操作の過程で生じる誤差について考察する。

本稿の方法による解曲線延長の際生じる誤差には 2 つの要因がある。その 1 つは線形補間の式 (13) を用い延長方向を求める時生じる誤差である。すなわち、1 つの格子点からつぎの延長格子点を求めるとき、判定関数として (11) 式を用い (11) 式が 0 となるよう延長方向 $(\Delta x_i, \Delta y_i)$ を定める訳である。しかし、実

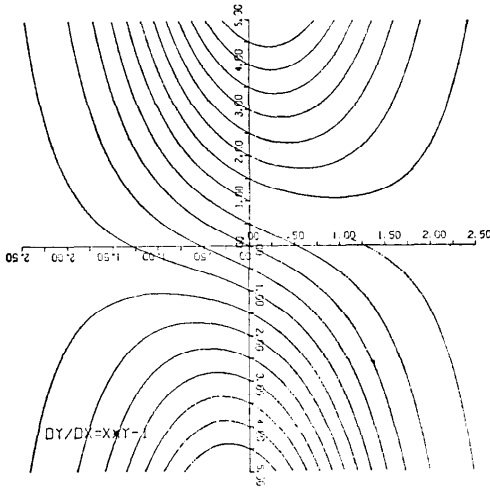


図4 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = xy - 1$ の軌跡

Fig. 4 Locus of equation $\frac{dy}{dx} = xy - 1$

際には延長方向を探る方向として離散的ないくつかの方向を考え、判定関数へのそれらの代入値の符号が変る境目の2つの方向を求め、その2つの方向間で判定関数値は直線的に変化すると仮定し、判定関数値が0となる方向を(13)式で推定している。したがってもしこの2方向間で判定関数(11)が線形に変化しないなら実際の延長方向と解曲線方向とは誤差が生じる。この誤差は判定関数の形すなわち与えられた微分方程式の形に依存し一概には論じられないが、延長方向を探る探索の多角形を多角化すれば、隣接する2方向の違いは小さくなるから各2方向間では判定関数は線形に変化するとみなせることとなり、任意に小さく押えることができる。実際にいくつかの例について検討した結果では64~128角形にすれば判定関数の隣接2方向間での変化はほぼ直線的になることが分った。

誤差の第2は解曲線の直線近似により生じる誤差である。すなわちこの方法では曲線を追跡するのに1つの格子点から(11)式、(13)式を用い曲線の延長方向を求め、その方向へ直線的に距離 s だけ進めている。したがってこの方法は解曲線を長さ s の線分で直線近似していることになる。そこで(13)式で定まる延長方向が、その着目している中心格子点での解曲線の延長方向になっていても解曲線の曲率がステップ間隔 s に比較しある程度大きい場合には、距離 s だけ進む間に近似曲線は解曲線からずれることになる。しかもこ

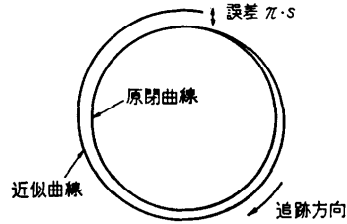


図5 閉曲線に対する誤差
Fig. 5 Errors for a circular curve

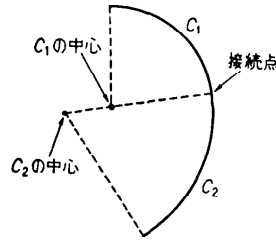


図6 滑らかに接続された円弧 C_1, C_2
Fig. 6 Smooth connection of circular curve C_1, C_2

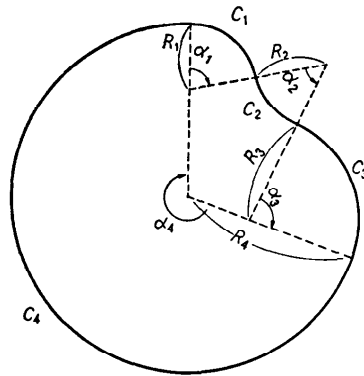


図7 滑らかに接続された円弧による閉曲線
Fig. 7 Closed curve composed of circular arcs

の誤差は等傾斜法等の場合と同様累積されてゆくものである。一般の解曲線に対するこの誤差の評価は難しいが、その特殊な場合として解曲線が滑らかに接続された円弧よりなる閉曲線の場合を考えると、本稿の方法でその閉解曲線を一周したとき生じる誤差は閉曲線の法線方向に1格子点間隔の π 倍となることが分る(図5)。ここで滑らかに接続された円弧とは図6に示すように2つの円弧の中心およびその接続点が同一直線上にあるような接続関係にある曲線と定義する。すなわち解曲線が図7のような滑らかに接続した σ 個の

円弧からなる閉曲線の場合には、本稿の方法でこの解曲線を求めると法線方向に $\pi \cdot s$ の誤差が生じる。これは次のようにして証明できる。

半径 R_i の円弧で中心角 α_i だけ回転したとき生じる誤差は $R_i \gg s$ のとき法線方向に

$$(\sqrt{R_i^2 + s^2} - R_i) \frac{\alpha_i}{\theta_i} \doteq \frac{1}{2} \frac{s^2}{R_i} \cdot \frac{\alpha_i}{\theta_i} = \frac{1}{2} \alpha_i \cdot s \quad (21)$$

ここで $\theta_i \doteq \tan \theta_i \doteq \frac{s}{R_i}$

である。一方円弧の回転角について時計針の回転方向を正にとることにすると、滑らかに接続された円弧よりなる閉曲線に対しては

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi \quad (22)$$

が成立する。そこで追跡によってこの閉曲線を一周するときの誤差の合計は (21) 式に (22) 式を用い

$$\sum \frac{1}{2} \alpha_i s = \frac{s}{2} \sum \alpha_i = \frac{s}{2} \cdot 2\pi = \pi s \quad (23)$$

となる。

そこで本稿の方法は、曲線に沿って曲率の符号が交互に入れ代るような曲線（右まわりと左まわりが交互に出てくるような曲線）については各段階での誤差が相殺するように働らくので全体としての誤差は累積されないが、一定方向に巻くせんのような解曲線については誤差が累積されることになる。

つぎに現象の面から本稿の方法における誤差について考えてみる。この場合誤差には初期値の影響と次数の高次化による影響とがある。ここではこのうち初期値の影響を調べるため図3に示すようにベッセルの微分方程式を3種の初期値について解いてみた。図において(c)は $k=1$ の場合で初期値の1次微係数を0.4としたものであり(d)は0.6としたものである。通常の円筒関数 J_1 として知られるものは(b)でこの初期1次微係数は0.5である。また $k=0$ についても J_0 (初期1次微係数は -0.05 とした) の前後に初期1次微係数として -0.04 および -0.06 の2種の初期値を与え解いてみたが図3(a)に示すようにそれらは一本の曲線に重なって表示された。この場合に $k=0$ については勾配の初期値の変動幅は J_0 の上下に $1/100$ であり、 $k=1$ については $1/10$ である。したがってそれが初期値の変動幅に比例するとした場合誤差の積算量は $k=1$ のときは $k=0$ のときの10倍程度のはずである。しかし実際には $k=1$ のときの誤差の積算量の最大は $k=0$ のときのその30倍程度であ

った。これは $k=0$ に対する初期点では解曲線の曲率半径が小さく隣接する解曲線群が粗となっているため初期勾配の影響が現われにくい。一方 $k=1$ に対する初期点では解曲線の曲率半径が大きく隣接する解曲線群が密となっているため初期値の影響が強調されるものと思われる。この初期値の誤差に与える影響は解曲線の形状および初期点の位置に関係し一律に議論できないが、この影響を知る方法としては初期点の近傍に2個以上の初期点(初期条件)を与え、定義域内での解曲線群の粗密の様子を調べそれにより誤差の範囲を知る方法が考えられる。

つぎに次数の高次化に関して考えると、この方法では n 次の微係数は $n-1$ 次微係数の差の形で近似しているため(式(6)参照)、次数が増せばそれだけ誤差も増大すると思われる。ここではその影響を調べるため、方程式

$$y = x^3 - 4x$$

を1次微分形、2次微分形、3次微分形の3つの方程式の形で与えその解曲線を同一画面に表示させてみた。この場合得られた曲線はすべてほぼ同一の曲線に重なって表示され、図形としてみる限りこの解法の次数の高次化による影響はほぼ無視できることが分った。

最後に本稿の方法と手法が似ており、微分方程式の初期値問題の解法として良く知られている Runge-Kutta 法と比較してみた。例としてやはりベッセルの微分方程式を用いたが、Runge-Kutta 法の場合ベッセルの微分方程式は次のような連立微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z, \\ \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x}z - \left(1 - \frac{k^2}{x^2}\right)y \end{cases}$$

に置きかえてから解くことになる。この連立微分方程式を Runge-Kutta 法で解いたものと直接例1のように本稿の方式で解いたものを比べるとほぼ同一の解曲線が得られ、本稿の方式はほぼ Runge-Kutta 法程度の精度を得ることができることが分った。

以上のことから本稿の方式は取扱い易さおよび計算時間などの点から微分方程式の解曲線の形状を概略的につかむ一つの有効な方法であると思われる。

5. あとがき

与えられた非線形微分方程式の解曲線を、微分方程

† Runge-Kutta 法での変数 x のきざみ幅は例1で得た表示点数と同程度となるようにした。

式の初期問題として解き、デジタル・プロッタのような表示機器に直接図形表示することを考えた。ここに述べた方法は短時間に解の概略的な値を求めることを目的としたもので必ずしも精度のよい解を得ることはできないが、非線形の微分方程式が扱えること、陰関数表現の方程式がそのまま扱えること、任意に尺度を選ぶことにより細部を拡大表示することが容易であることなどの特徴をもつものである。

謝辞 日頃御指導頂く武蔵野電気通信研究所表示機器研究室大和淳二室長、ならびに細部にわたり御指示御検討して頂いた釜江尚彦室長補佐に深く感謝致します。

参考文献

- 1) 正野重方：理工学のための緩和法入門，朝倉書店，1962.

- 2) 高田勝：非線形常微分方程式の境界値問題の一解法，情報処理，Vol. 6, No. 1, pp. 21-29 (1965).
- 3) 山内，森口，一松：電子計算機のための数値計算法Ⅱ，培風館.
- 4) 斎藤たつき：8角形追跡法による数式化パターンの自動作図，情報処理学会第11回大会予稿179.
- 5) 釜江，村上：2変数陰関数のグラフ表示，情報処理，Vol. 12, No. 9, pp. 582-586 (1971).
- 6) 村上：XY-プロッタによる微分方程式の解曲線の表示，信学会電算機研究会資料 (1972).
- 7) Lapwood: Ordinary Differential Equations, Pergamon Press. (1968).

(昭和47年5月23日受付)

(昭和47年10月11日再受付)