倍精度演算に基づく四倍精度除算・平方根計算法

山中脩也, 大石進一
(早稲田大学) (JST/早稲田大学)

1 倍精度演算に基づく四倍精度演算

倍精度数を用いた四倍精度数 a の表現法：

$$a = a_h + a_l \qquad (a_h, a_l \in \mathbb{F}) \tag{1.1}$$

$$a_h = fl\,(a_h + a_l) \tag{1.2}$$

2 四倍精度除算法

$a_h, a_l, b_h, b_l \in \mathbb{F}$ に対し，$c_h, c_l \in \mathbb{F}$ を求めたい．

$$c = c_h + c_l \approx \frac{a_h + a_l}{b_h + b_l} = \frac{a}{b} \tag{2.1}$$

2.1 既存の手法 (Hida, Li & Bailey[1])

次式に従う．ただし，$c_h = fl\,(a_h/b_h)$ とする．

$$\frac{a_h + a_l}{b_h + b_l} = c_h + \frac{a - b \times c_h}{b} \approx c_h + \frac{a - b \times c_h}{b_h} \tag{2.2}$$

```
void dddivide(ah, al, bh, bl, resh, resl){
        resh = ah/bh;
        ddtimes(resh,0.0,bh,bl,&ch,&cl);
        TwoSum(ah,-ch,&s1,&s2);
        s2 -= cl;    s2 += al;
        resl = (s1+s2)/bh;
        FastTwoSum(resh,resl,resh,resl);
}
```

2.2 提案手法

次式に従う．

$$\frac{a_h + a_l}{b_h + b_l} = \frac{a_h\,(1 + a_l/a_h)}{b_h\,(1 + b_l/b_h)} \approx \frac{a_h}{b_h}\left(1 + \frac{a_l}{a_h} - \frac{b_l}{b_h}\right) \tag{2.3}$$

```
void dddivide(ah, al, bh, bl, resh, resl){
        double cr=1.0/bh,br=bl*cr;
        resh = ah*cr;
        TwoProduct(resh,bh,&r1,&r2);
        resl = ((ah-r1)-r2)*cr;
        resl += resh*((al/ah)-br);
        FastTwoSum(resh,resl,resh,resl);
}
```

2.3 倍精度演算回数・実行時間・精度の比較

	演算回数	時間比	合致率 †
既存手法	36	(1.00)	38%
提案手法	30	0.66	42%

3 四倍精度平方根計算法

$a_h, a_l \in \mathbb{F}$ に対し，b_h, b_l を求めたい．

$$b = b_h + b_l \approx \sqrt{a_h + a_l} = \sqrt{a} \tag{3.1}$$

3.1 既存の手法 (Hida, Li & Bailey[1])

次式に従う．ただし，$b_h = fl\left(\sqrt{a_h}\right)$ とする．

$$\sqrt{a_h + a_l} \approx b_h + \frac{a - b_h \times b_h}{2b_h} \tag{3.2}$$

```
void ddsqrt(ah, al, bh, bl, resh, resl){
        double x = 1.0/sqrt(ah), ax = ah*x;
        TwoProduct(ax,ax,&r1,&r2);
        ddplus(ah,al,-r1,-r2,&s1,&s2);
        TwoSum(ax,s1*(x*0.5),resh,resl);
}
```

3.2 提案手法

次式に従う．

$$\sqrt{a_h + a_l} = \sqrt{a_h\left(1 + \frac{a_l}{a_h}\right)} \approx \sqrt{a_h}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{a_l}{a_h}\right) \tag{3.3}$$

```
void ddsqrt(ah, al, bh, bl, resh, resl){
        double app = sqrt(ah);
        TwoProduct(app,app,&p1,&p2);
        resl = 0.5*(((ah-p1)-p2)+al)/app;
        FastTwoSum(app,resl,resh,resl);
}
```

3.3 倍精度演算回数・実行時間・精度の比較

	演算回数 ‡	時間比	合致率 †
既存手法	42(+1)	(1.00)	30%
提案手法	25(+1)	0.71	35%

† MPFR で擬似的な 106bit 演算を行なった結果と比較
‡ 括弧内は倍精度平方根演算回数

参考文献

[1] Yozo Hida, Xiaoye S. Li and David H. Bailey. “Quad-Double Arithmetic: Algorithms, Implementation, and Application” October 30, 2000 Report LBL-46996.

WASEDA UNIVERSITY

© 2012 Information Processing Society of Japan