

τ-method による複素変数のベッセル関数 $K_n(z)$ の数値計算†

吉田年雄†† 二宮市三†††

Abstract

In this paper we describe a method for the calculation of $K_n(z)$ with complex argument.

The τ-method proposed by C. Lanczos is applied to the computation of $K_n(z)$. The function $K_n(z)$ is written

$$K_n(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z} f_n\left(\frac{1}{z}\right),$$

where $f_n(t)$ satisfies the differential equation

$$t^2 f_n''(t) + 2(t+1)f_n'(t) - \left(n^2 - \frac{1}{4}\right)f_n(t) = 0.$$

The polynomial approximation for $f_n(t)$ is performed by putting the shifted Ultraspherical polynomial to the right hand side of this equation. Then it is found from error analysis that the choice of the shifted Legendre polynomial—a special case of the Ultraspherical polynomial—leads to the most efficient computation of $f_n(t)$ for $\text{Re}(z) > 0$.

Combining this method with the method using the recurrence technique, the value of $K_n(z)$ can be obtained efficiently in the whole complex region.

1. まえがき

複素変数 z の第2種変形ベッセル関数 $K_n(z)$ の数値計算法としては、I. Gargantini と P. Henrici の連分数法¹⁾、Fr. Mechel の数値積分による方法²⁾が報告されている。

本論文では、C. Lanczos の τ-method^{3), 4)}を適用した $K_n(z)$ の計算法について述べる。Lanczos は、数値解を求めようとする変数 t の微分方程式の右辺に、 m 次の直交多項式 $\tau T_m^*(t/\beta)$ ($T_m^*(t)$: shifted Chebyshev 多項式) を付加し、その微分方程式に m 次の多項式を代入し、初期条件とともに係数および τ を決めて、 $0 \leq t/\beta \leq 1$ における近似式を導びいた。しかし、この τ-method に対して、本論文で述べるような明白な誤差解析はなされなかった。

ここでは、 $K_n(z)$ の計算に対して、τ-method を適

用し、誤差解析を行なう。その際、付加する直交多項式を $T_m^*(t/\beta)$ に限らないで、 $T_m^*(t/\beta)$ や $P_m^*(t/\beta)$ ($P_m^*(t)$: shifted Legendre 多項式) を一般に含む $C_m^{*\alpha}(t/\beta)$ ($C_m^*(t)$: shifted Ultraspherical 多項式) として誤差解析を行なう。そして、その結果から $\alpha = 0.5$ ($C_m^{*0.5}(t) = P_m^*(t)$)、 $t/\beta = 1$ とするとき、 $K_0(z)$ 、 $K_1(z)$ を能率的に計算できることを示す。

この τ-method による計算法は、 $\text{Re}(z) > 0$ で有効で、連分数法と比較して、同じ乗算回数では、かなり精度が高いのが特長であり、 $|z|$ の小さいところ以外では、能率的に、 $K_n(z)$ を求めることができる。そして、漸化式を用いる方法を併用すれば、複素平面全域で、丸め程度の誤差でもって、能率的に、 $K_n(z)$ を計算することができる。(ただし、丸め程度の誤差で求められるといっても、計算式中に関数 e^* を含むので、 $|z|$ の大きい場合には、一般に、 $|z|$ の整数部分の桁数程度の桁数だけ誤差をもつことは避けられない。)

ここでは、

$$K_{-n}(z) = K_n(z), \quad K_n(\bar{z}) = \overline{K_n(z)} \quad (1)$$

† Computation of Bessel Function $K_n(z)$ with Complex Argument by Using the τ-method, by Toshio Yoshida and Ichizo Ninomiya (Faculty of Engineering, Nagoya University)

†† 名古屋大学工学部電子工学科 (現在、同学部情報工学科)

††† 名古屋大学工学部情報工学科

が成立することを考慮して、次数 n は $n \geq 0$, $\arg z$ は $0 \leq \arg z \leq \pi$ とする。また、 $n=0, 1$ 以外の $K_n(z)$ は、 $K_0(z)$, $K_1(z)$ より漸化式を用いれば、桁落ちによる不安定をとまわずに求められるので、 $n=0, 1$ の場合だけを考える。なお、非整数次の場合については、整数次のものを一般化すれば得られるので、ここでは述べない。

2. τ -method

$K_n(z)$ は、微分方程式

$$\omega''(z) + \frac{1}{z}\omega'(z) - \left(1 + \frac{n^2}{z^2}\right)\omega(z) = 0 \tag{2}$$

の解である。ここでは、 $K_n(z)$ を、

$$K_n(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z} f_n\left(\frac{1}{z}\right) \tag{3}$$

という形として、 $f_n(1/z)$ に対する近似式を求めることにする。そのとき、 $f_n(t)$ は、

$$t^2 f_n''(t) + 2(t+1)f_n'(t) - \left(n^2 - \frac{1}{4}\right)f_n(t) = 0 \tag{4}$$

を満足する。この $f_n(t)$ に対する形式的な無限級数解は、 $f_n(t)$ の漸近展開式となるが、 $|z| = \infty$ を除いて発散するので、 $|z|$ の大きい場合を除いて、数値計算には適当でない。そこで、つぎに述べる τ -method を $f_n(t)$ の近似計算に適用する。

微分方程式 (4) の解 $f_n(t)$ を m 次の多項式

$$f_n(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_m t^m \tag{5}$$

で近似しよう。そのために、(4)の右辺に、 m 次の直交多項式 $\tau C_m^{*(\alpha)}(t/\beta)$ を加えた式、すなわち、

$$t^2 f_n''(t) + 2(t+1)f_n'(t) - \left(n^2 - \frac{1}{4}\right)f_n(t) = \tau C_m^{*(\alpha)}\left(\frac{t}{\beta}\right) \tag{6}$$

に、(5)を代入する。ただし、 $C_m^{*(\alpha)}(t)$ は、shifted Ultraspherical 多項式で、次式によって定義される⁵⁾。

$$C_m^{*(\alpha)}(t) = \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\alpha)} \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \frac{1}{k!(m-k)!} \frac{\Gamma(2\alpha+m+k)}{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2} + k\right)} t^k, \tag{7}$$

$$C_m^{*(\alpha)}(t) = C_m^{(\alpha)}(2t-1).$$

($C_m^{(\alpha)}(t)$: Ultraspherical 多項式)

そのとき、未定係数法によって、係数 b_0, b_1, \dots, b_m を決めれば、

$$f_{nm}(t) = \tau \sum_{k=0}^m \frac{-C_{mk}^{*(\alpha)} S_k(t)}{2(k+1)a_{k+1}\beta^k}, \tag{8}$$

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_k &= \frac{(4n^2-1)(4n^2-9)\dots(4n^2-(2k-1)^2)}{k!8^k} \\ S_k(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_k t^k, \\ C_m^{*(\alpha)}(t) &= \sum_{k=0}^m C_{mk}^{*(\alpha)} t^k \end{aligned} \right\} (k \geq 1), \tag{9}$$

が得られ、初期条件 $f_{nm}(0)=1$ より、 τ を消去すると、 $f_n(t)$ に対する近似式として、

$$f_{nm}(t) = \sum_{k=0}^m \frac{C_{mk}^{*(\alpha)} S_k(t)}{(k+1)a_{k+1}\beta^k} \bigg/ \sum_{k=0}^m \frac{C_{mk}^{*(\alpha)}}{(k+1)a_{k+1}\beta^k} \tag{10}$$

なる多項式が得られる。上式は、未知数として α および β を含んでいるが、それらの値をどのように選んだとき、 $f_n(t)$ を精度よく、能率的に計算することができるかを、つぎに述べる誤差解析を通じて求める。

2.1 誤差解析

$f_n(t)$ に対する近似式 $f_{nm}(t)$ の絶対誤差を $\eta_{nm}(t)$ とすれば、

$$f_n(t) = f_{nm}(t) + \eta_{nm}(t) \tag{11}$$

となる。ここで、 $f_{nm}(t)$ は、

$$\begin{aligned} & t^2 f_{nm}''(t) + 2(t+1)f_{nm}'(t) - \left(n^2 - \frac{1}{4}\right)f_{nm}(t) \\ &= E_{nm}(t), \end{aligned} \tag{12}$$

$$E_{nm}(t) = C_m^{*(\alpha)}\left(\frac{t}{\beta}\right) \bigg/ \sum_{k=0}^m \frac{-C_{mk}^{*(\alpha)}}{2(k+1)a_{k+1}\beta^k}$$

を満足するから、(4) と (11) より、

$$\begin{aligned} & t^2 \eta_{nm}''(t) + 2(t+1)\eta_{nm}'(t) - \left(n^2 - \frac{1}{4}\right)\eta_{nm}(t) \\ &= -E_{nm}(t) \end{aligned} \tag{13}$$

が得られる。上式 (13) の一般解は、(4) の独立な解が、

$$\left. \begin{aligned} f_n(t) &= \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{1/2} e^{1/4} K_n\left(\frac{1}{t}\right), \\ g_n(t) &= \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{1/2} e^{1/4} I_n\left(\frac{1}{t}\right) \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

($I_n(t)$: 第1種変形ベッセル関数)

で与えられることより、

$$\begin{aligned} \eta_{nm}(t) &= A f_n(t) + f_n(t) \int \frac{E_{nm}(t) g_n(t)}{t^2 \Delta} dt \\ &+ B g_n(t) - g_n(t) \int \frac{E_{nm}(t) f_n(t)}{t^2 \Delta} dt, \end{aligned} \tag{15}$$

$$A = f_n(t)g_n'(t) - f_n'(t)g_n(t) = -\frac{2}{\pi t^2}e^{2/t}$$

として求められる。ただし、 A および B は初期条件によって決定される定数である。

初期条件,

$$\left. \begin{aligned} \eta_{nm}(0) &= 0, \\ \eta_{nm}'(0) &= a_1 - a_1 \sum_{k=1}^m \frac{C_{mk}^{*(\alpha)}}{2(k+1)a_{k+1}\beta^k} \\ &= \frac{1}{2} C_{m0}^{*(\alpha)} \left/ \sum_{k=0}^m \frac{C_{mk}^{*(\alpha)}}{2(k+1)a_{k+1}\beta^k} \right. \end{aligned} \right\} (16)$$

より、定数 A および B を決定すると、

$$\left. \begin{aligned} \eta_{nm}(t) &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{r_{nm}} \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{1/2} e^{1/t} \int_0^t s_{nm}(x) \left(\frac{1}{x}\right)^{1/2} \\ &\quad \times C_m^{*(\alpha)}\left(\frac{x}{\beta}\right) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} C_{m0}^{*(\alpha)} \frac{1}{r_{nm}} \left(\frac{1}{t}\right)^{1/2} e^{1/t} \lim_{x \rightarrow 0} s_{nm}(x) \left(\frac{1}{x}\right)^{-3/2} \end{aligned} \right\} (17)$$

$$\left. \begin{aligned} r_{nm} &= \sum_{k=0}^m \frac{C_{mk}^{*(\alpha)}}{2(k+1)a_{k+1}\beta^k} \\ s_{nm}(x) &= \left(K_n\left(\frac{1}{t}\right) I_n\left(\frac{1}{x}\right) - I_n\left(\frac{1}{t}\right) K_n\left(\frac{1}{x}\right) \right) / e^{1/x} \end{aligned} \right\}$$

が得られ、誤差解析の基本式となる。

2.1.1 $\text{Re}(z) > 0$ の場合

(17) の右辺第 2 項は、 $\text{Re}(z) > 0$ のときには 0 となり、相対誤差 $\epsilon_{nm}(t)$ は、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{nm}(t) &= \eta_{nm}(t) / f_n(t) = p_{nm} * q_{nm}(t), \\ p_{nm} &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{r_{nm}}, \\ q_{nm}(t) &= \int_0^t \left(I_n\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{I_n\left(\frac{1}{t}\right)}{K_n\left(\frac{1}{t}\right)} K_n\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{x}\right)^{1/2} C_m^{*(\alpha)}\left(\frac{x}{\beta}\right) dx \end{aligned} \right\} (18)$$

と表わされる。

ここで、 α および β をいろいろ変化させ、相対誤差 ϵ_{nm} がどのようなときに小さくなるかを、つぎに示す例を通して調べることにする。

例 まず、表 1 には、 t が正の実数の場合の例として、 $t=0.5 (z=2)$ 、 $m=8$ のとき、 $n=0, 1$ について、 α および t/β を変化させたときの相対誤差 $\epsilon_{0,8}$ 、 $\epsilon_{1,8}$ および積分値 $q_{0,8}$ 、 $q_{1,8}$ が示されている。これらの値

表 1 相対誤差 $\epsilon_{0,8}$ および $\epsilon_{1,8}$ ($t=0.5$)
Table 1 Relative errors $\epsilon_{0,8}$ and $\epsilon_{1,8}$ ($t=0.5$)

α	t/β	$n=0$		$n=1$	
		$q_{0,8}$	$\epsilon_{0,8}$	$q_{1,8}$	$\epsilon_{1,8}$
0	0.8	-6.85E-04	4.18E-09	-6.69E-04	-4.91E-09
	0.9	-7.53E-04	2.63E-09	-7.02E-04	-2.93E-09
	1.0	-3.55E-04	7.39E-10	-3.65E-04	-9.05E-10
	1.1	9.99E-03	-1.29E-08	8.07E-03	1.24E-08
0.4	0.8	-5.62E-04	3.27E-09	-5.03E-04	-3.52E-09
	0.9	-2.77E-04	9.24E-10	-2.61E-04	-1.04E-09
	1.0	-1.49E-04	2.97E-10	-1.52E-04	-3.61E-10
	1.1	1.35E-02	-1.67E-08	1.09E-02	1.61E-08
0.49	0.8	-5.92E-04	2.32E-09	-4.97E-04	-2.34E-09
	0.9	-1.16E-04	2.61E-10	-1.03E-04	-2.76E-10
	1.0	-2.55E-05	3.42E-11	-2.61E-05	-4.18E-11
	1.1	2.12E-03	-1.77E-08	1.73E-02	1.71E-08
0.5	0.8	-5.84E-04	2.19E-09	-4.84E-04	-2.19E-09
	0.9	-8.41E-05	1.81E-10	-7.10E-05	-1.83E-10
	1.0	-8.82E-07	1.14E-12	-1.11E-06	-1.71E-12
	1.1	2.22E-02	-1.78E-08	1.81E-02	1.72E-08
0.51	0.8	-5.73E-04	2.07E-09	-4.69E-04	-2.03E-09
	0.9	-4.83E-05	9.98E-11	-3.57E-05	-8.84E-11
	1.0	2.65E-05	-3.28E-11	2.66E-05	3.93E-11
	1.1	2.33E-02	-1.79E-08	1.90E-02	1.73E-08
0.6	0.8	-3.10E-04	7.90E-10	-1.56E-04	-4.78E-10
	0.9	4.72E-04	-6.89E-10	4.76E-04	8.32E-10
	1.0	4.27E-04	-3.73E-10	4.32E-04	4.51E-10
	1.1	3.49E-02	-1.90E-08	2.85E-02	1.84E-08

は、(18) を数値積分することによって求められたものであるが、(10) で計算される $f_{nm}(t)$ の、真値 $f_n(t)$ に対する相対誤差と完全に一致し、誤差解析が正しいことを示している。この表から、 $\alpha=0.5$ (shifted Legendre 多項式の場合)、 $t/\beta=1$ のとき、最も精度がよく、 $\alpha=0$ (shifted Chebyshev 多項式の場合) に相当。 $C_m^{*(0)}(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1/\alpha) C_m^{*(\alpha)}(t) = (2/m) T_m^*(t)$ のときと比べて、3桁程度精度がよいことがわかる。また、積分値 $q_{0,8}$ 、 $q_{1,8}$ が最小のとき、相対誤差 $\epsilon_{0,8}$ 、 $\epsilon_{1,8}$ も最小になっているが、これは、(18) において、 p_{nm} は α および t/β に対して余り変化しない関数であることによる。したがって、誤差に対する評価としては、積分値 q_{nm} について考えればよいことになる。

いま、 $F_{m-1}(x)$ を $m-1$ 次の多項式 $P_m^*(x)$ を shifted Legendre 多項式とすれば、 $P_m^*(x)$ の直交関係から、

$$\int_0^t F_{m-1}(x) P_m^*\left(\frac{x}{t}\right) dx = 0 \quad (19)$$

となるが、 $F_{m-1}(x)$ が $m-1$ 次の多項式でなくとも、 $m-1$ 次の多項式で近似よく表わされる関数であれば、上式 (19) の積分値は十分小さい値となるであら

表 2 相対誤差 $|\epsilon_{0,8}|$ ($|t|=0.5$)
Table 2 Relative error $|\epsilon_{0,8}|$ ($|t|=0.5$)

α	$ \epsilon_{0,8} $							
	$-\arg t$							
	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
0	7.62E-10	8.37E-10	1.00E-09	1.39E-09	2.35E-09	4.90E-09	1.17E-08	3.01E-08
0.4	3.06E-10	3.40E-10	4.24E-10	6.46E-10	1.26E-09	2.94E-09	7.56E-09	2.07E-08
0.49	4.20E-11	7.41E-11	1.62E-10	3.89E-10	9.74E-10	2.52E-09	6.78E-09	1.90E-08
0.5	*2.02E-11	*5.82E-11	1.48E-10	3.73E-10	9.51E-10	2.48E-09	6.70E-09	1.88E-08
0.51	3.74E-11	6.28E-11	*1.44E-10	*3.62E-10	9.31E-10	2.45E-09	6.62E-09	1.86E-08
0.55	1.79E-10	1.91E-10	2.33E-10	3.89E-10	*8.92E-10	2.32E-09	6.32E-09	1.79E-08
0.6	3.80E-10	4.02E-10	4.47E-10	5.63E-10	9.59E-10	*2.24E-09	6.00E-09	1.71E-08
0.7	8.44E-10	8.94E-10	9.84E-10	1.14E-09	1.46E-09	2.43E-09	*5.64E-09	1.57E-08
0.8	1.39E-09	1.47E-09	1.62E-09	1.86E-09	2.26E-09	3.12E-09	5.79E-09	1.47E-08
0.9	2.01E-09	2.14E-09	2.36E-09	2.71E-09	3.25E-09	4.19E-09	6.54E-09	*1.44E-08
1.0	2.72E-09	2.89E-09	3.19E-09	3.67E-09	4.39E-09	5.54E-09	7.86E-09	1.48E-08

う。したがって、表1の例において、 $\alpha=0.5$, $t/\beta=1$ のとき、 $q_{0,8}$, $q_{1,8}$ が最小となることは、(18)の被積分関数の $C_m^{*(\alpha)}(x/\beta)$ を除いた部分が $m-1$ 次の多項式で近似よく表わされる関数であることを意味する。また、 m を大きくすると、 p_{nm} および q_{nm} は小さくなり、相対誤差 ϵ_{nm} は小さくなる。 $(q_{nm}$ が小さくなる理由は、 m を大きくすると、被積分関数の $C_m^{*(\alpha)}(x/\beta)$ を除いた部分は、 $m-1$ 次の多項式で、それだけ近似よく表わされるようになるからである。)

例 つぎに、表2には、 $t(=1/z)$ が複素数の場合の例として、 $n=0$, $t/\beta=1$ のとき、 $|t|=0.5$, $-\arg t = 10^\circ(10^\circ)80^\circ$ に対して、 $|\epsilon_{0,8}|$ が示されている。この場合には、相対誤差 $|\epsilon_{0,8}|$ の最小となる α の値は、 $\arg t$ によって異なり、 $-\arg t$ が0から $\pi/2$ に近づくにしたがって、その値は0.5から徐々に大きくなり、相対誤差も大きくなっている。(この事情は、連分数法の場合も同様である。) このことは、 $-\arg t$ が0から $\pi/2$ に近づくにつれて、(18)の被積分関数の $C_m^{*(\alpha)}(x/\beta)$ を除いた部分が $m-1$ 次の多項式で近似されにくい関数になることを意味している。 $(m$ を大きくすれば、相対誤差 ϵ_{nm} が小さくなるが、これは t が正の実数の場合と同様である。) しかし、この表からわかるように、 $|\epsilon_{0,8}|$ は $\arg t$ が $\pi/2$ に近づくにつれて、 α によって余り変化しなくなる。したがって、実際に、 f_{nm} を計算する場合、 $\arg t$ によって、その都度、 α を変化させることは余り利点がない。

以上より、 $f_n(t)$ の近似値 $f_{nm}(t)$ を精度よく、能率的に求めるためには、 $\alpha=0.5$, $\beta=t$ とすることが適切であると考えられる。(このように選ぶことは、少なくとも $\alpha=0$ と選ぶことよりはよい。) そのとき、

$f_{nm}(t)$ は、

$$f_{nm}(t) = \frac{\sum_{k=0}^m P_m^{*(k)} S_k(t)}{\sum_{k=0}^m \frac{P_m^{*(k)}}{(k+1)a_{k+1}t^k}} \quad (20)$$

となる。ただし、 $P_m^{*(k)}$ は、shifted Legendre 多項式

$$P_m^{*(k)}(t) = \sum_{k=0}^m P_m^{*(k)} t^k \quad (21)$$

の係数である。

つぎに、(20)の相対誤差の例を示す。図1および図2には、 $n=0$ について、それぞれ、 $m=7$, $m=19$ のときの相対誤差が、いろいろな $z(=1/t)$ の値に対して示されている。 $(n=1$ についても、同様なものが得られる。虚軸付近で、 $|z|$ の小さいところでは、精度が低くなっているが、これは、(18)において、積分区間および $p_{0,m}$ が大きくなることから理解できる。この部分で、精度を高めるには、 m を大きくすればよいが、 $K_n(z)$ を能率よく求めるためには、むしろ、3で述べる漸化式を用いる方法を利用した方がよい。

2.1.2 $\operatorname{Re}(z) \leq 0$ の場合

(17)の右辺第2項は、 $\operatorname{Re}(z) \leq 0$ のときには発散し、相対誤差 ϵ_{nm} は(18)のような簡単な形として表わすことができない。したがって、 $\operatorname{Re}(z) > 0$ のときのような議論はできないので、相対誤差は小さくならないことが予想される。実際、(20)によって $f_{nm}(t)$ を計算すると、 $\operatorname{Re}(z) > 0$ のときと比べて、相対誤差が大きく、漸近展開式と同程度の精度をもつに過ぎず、また、 m を大きくすることは必ずしも精度を高めることとはならない。

2.2 計算式

以上のことより、本方法は、 $\operatorname{Re}(z) > 0$ のときに有

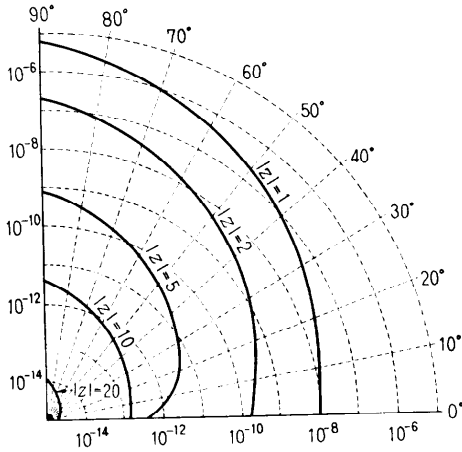


図 1 相対誤差 $|\epsilon_{0.7}|$ (対数目盛)
Fig. 1 Relative error $|\epsilon_{0.7}|$

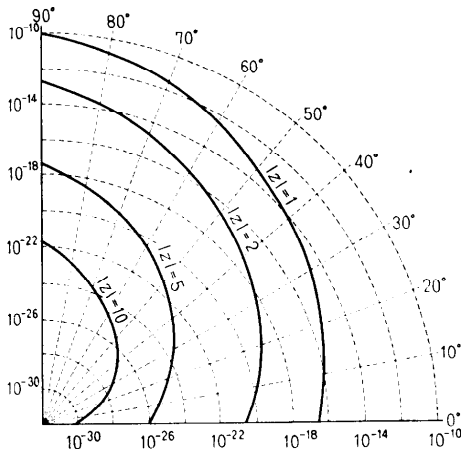


図 2 相対誤差 $|\epsilon_{0.19}|$ (対数目盛)
Fig. 2 Relative error $|\epsilon_{0.19}|$

効な計算法であることがわかる。そのとき、 $K_n(z)$ の近似式としては、(3) と (20) より、

$$K_n(z) \approx \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z} \sum_{k=0}^m \frac{P_m^{*(k)} z^k S_k \left(\frac{1}{z}\right)}{(k+1)a_{k+1}} \Bigg/ \sum_{k=0}^m \frac{P_m^{*(k)} z^k}{(k+1)a_{k+1}} \quad (22)$$

が得られる。上式を $1/z$ に関する有理関数として、実際の計算に便利な形とすると、

$$K_n(z)$$

$$\approx \left(\frac{1}{z}\right)^{1/2} e^{-z} \frac{c_0 + \frac{c_1}{z^{m-1}} + \dots + \frac{c_j}{z^{m-j}} + \dots + c_m}{d_0 + \frac{d_1}{z^{m-1}} + \dots + \frac{d_j}{z^{m-j}} + \dots + d_m} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} c_j &= \lambda \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \sum_{p=j}^m \frac{P_m^{*(p)} a_{p-j}}{(p+1)a_{p+1}} \\ d_j &= \lambda \frac{P_m^{*(j)}}{(j+1)a_{j+1}} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

となる。ただし、 λ は適当に選ばれた定数である。

上式は、連分式法によるものと比較して、同じ乗算回数では、2~4桁精度が高く、これは本計算法の大きな特長である。

3. 漸化式を用いる方法との併用

漸化式を用いる方法とは、漸化式を用いる $I_n(z)$ の計算法⁹⁾により、 $I_n(z)$ ($n=0, 2, 4, \dots$) を求め、

$$K_0(z) = -\left(\log \frac{z}{2} + \gamma\right) I_0(z) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_{2k}(z)}{k} \quad (25)$$

γ : Euler の定数、

$$I_0(z)K_1(z) + I_1(z)K_0(z) = 1/z \quad (26)$$

より、 $K_0(z)$ 、 $K_1(z)$ を計算するものである。この漸化式を用いる方法は、 $\text{Re}(z) > 0$ の虚軸付近、および、 $\text{Re}(z) \leq 0$ の全領域で、 $K_0(z)$ を丸め程度の誤差で求

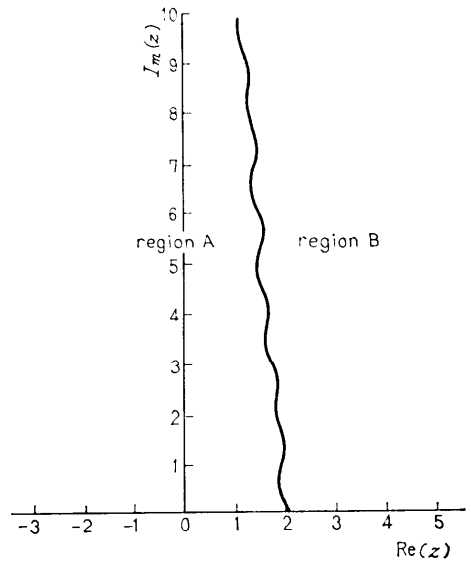


図 3 (25)式において、桁落ちを伴わない領域A および、桁落ちを伴う領域B

Fig. 3 Region A where the calculation in Eq. (25) does not occur and region B where it occurs

表 3 (23)式の係数 c_j および d_j の値(単精度)
Table 3 Coefficients c_j and d_j in Eq. (23)
(single precision)

j		$K_0(z)$	
		c_j	d_j
0	1.0000000 E 00	3.0094208 E 00	
1	1.1284751 E 02	1.4980228 E 02	
2	1.2853403 E 03	1.2942917 E 03	
3	3.9445368 E 03	3.5218822 E 03	
4	4.5406188 E 03	3.8262424 E 03	
5	2.2266165 E 03	1.8214178 E 03	
6	4.6410607 E 02	3.7362417 E 02	
7	3.3299090 E 01	2.6568830 E 01	

j		$K_1(z)$	
		c_j	d_j
0	1.0000000 E 00	7.0924498 E -02	
1	2.5551605 E 01	6.3548351 E 00	
2	1.5087998 E 02	6.5364018 E 01	
3	3.3339671 E 02	1.9367116 E 02	
4	3.2547067 E 02	2.2133847 E 02	
5	1.4708600 E 02	1.0896663 E 02	
6	2.9472379 E 01	2.2894000 E 01	
7	2.0773483 E 00	1.6574841 E 00	

表 4 (23)式の係数 c_j および d_j の値(倍精度)
Table 4 Coefficients c_j and d_j in Eq. (23)
(double precision)

j		$K_0(z)$	
		c_j	d_j
0	1.00000000000000000000 D 00	6.30712524957247507 D 00	
1	9.05424879193518607 D 02	2.13040675096670269 D 03	
2	8.26595780388865165 D 04	1.28847000298466179 D 05	
3	2.11461570482790715 D 06	6.62251853668714834 D 06	
4	2.21138097639685782 D 07	2.38293042345893973 D 07	
5	1.15304418497927946 D 08	1.13435365612590850 D 08	
6	3.38414423189949094 D 08	3.1233751198475720 D 08	
7	6.05821612246759435 D 08	5.37767659200430696 D 08	
8	6.99367414203444102 D 08	6.02895230383873860 D 08	
9	5.41557476393325808 D 08	4.57228023288970511 D 08	
10	2.89222683934275594 D 08	2.40537191390116006 D 08	
11	1.08549647107259574 D 08	8.9286876365957334 D 07	
12	2.89509995664119662 D 07	2.36193550202407913 D 07	
13	5.50806234911773473 D 06	4.46616906154600592 D 06	
14	7.44480973200955287 D 05	6.00850330685312840 D 05	
15	7.04899117228808499 D 04	5.66879257531755437 D 04	
16	4.54352350930749062 D 03	3.64385197678814330 D 03	
17	1.88908277388261226 D 02	1.51178300501558502 D 02	
18	4.54594011818692272 D 00	3.6319112316056462 D 00	
19	4.78835035490393440 D -02	3.82055081989277015 D -02	

j		$K_1(z)$	
		c_j	d_j
0	1.00000000000000000000 D 00	2.72781164650679092 D -02	
1	1.69554971144461453 D 02	1.65850948107612888 D 01	
2	6.50752679054324770 D 03	1.19412682637481279 D 03	
3	9.57058094638479476 D 04	2.64653886260254806 D 04	
4	6.85752724138577843 D 05	2.52967870503308490 D 05	
5	2.74341311754439489 D 06	1.24538028555474949 D 06	
6	6.67500833592968437 D 06	3.52228767631646320 D 06	
7	1.04574308668198609 D 07	6.15660366952793567 D 06	
8	1.09758863605723719 D 07	6.99908627693702161 D 06	
9	7.93865147138095634 D 06	5.36749100104974206 D 06	
10	4.03646324097597703 D 06	2.84956043991656787 D 06	
11	1.46206097639341452 D 06	1.06580961908567733 D 06	
12	3.80005306422589643 D 05	2.83758223868221126 D 05	
13	7.09500134853749928 D 04	5.39516962516554119 D 04	
14	9.45885391340128715 D 03	7.29300963156017856 D 03	
15	8.86653188811316031 D 02	6.90943441234541473 D 02	
16	5.67345435238516206 D 01	4.45769962086800950 D 01	
17	2.34646178190303923 D 00	1.85549572309580393 D 00	
18	5.62536580556620644 D -02	4.47071008576603958 D -02	
19	5.90977366310304025 D -04	4.71531716362931004 D -04	

めることができる。(それ以外の領域では、(25)の右辺の第1項と第2項の大きさがほぼ等しく、その加算において桁落ちを生ずる。) 実際、 $K_0(z)$ を丸め程度の誤差で計算できる領域を求めると、結果として、**図3**に示されたものが得られた。(25)の k は文献6)の M までとればよい.)

したがって、2 で述べた τ -method とこの漸化式を用いる方法を領域によって使い分ければ、複素平面全域で、 $K_0(z)$ 、 $K_1(z)$ を丸め程度の誤差で求めることができることがわかる。

いろいろな m に対して、(23) の精度を調べた結果、 $\text{Re}(z) > 0$ の場合には、単精度 (8 D) では、

$$I_m(z) \geq -2.25 \text{Re}(z) + 4.5 \quad (27)$$

で、(23) の $m=7$ とした式を、倍精度 (18D) では、

$$I_m(z) \geq -4 \text{Re}(z) + 8 \quad (28)$$

で、(23) の $m=19$ とした式を用い、それ以外では、漸化式を用いる方法を用いれば、丸め程度の誤差で、 $K_0(z)$ 、 $K_1(z)$ を能率的に求められることがわかった。**表3**および**表4**には、それぞれ、 $m=7$ および $m=19$ のときの (23) の c_j 、 d_j の値が示されている。(なお、(24) の計算においては、多少の桁落ちを生ずるので、係数 c_j 、 d_j を正確に決めるために、4倍精度 (42D) で計算を行なった.)

一方、 $\text{Re}(z) \leq 0$ の場合には、漸化式を用いる方法で、 $K_0(z)$ 、 $K_1(z)$ を丸め程度の誤差で求めることが

できるが、 $|z|$ の大きいところでは、(25) の k の上限が大きくなり、能率的でない。そこで、 $|z|$ の大きいところでは、漸近展開式

$$K_n(z) \approx \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z} \sum_{i=0}^k \frac{a_i}{z^i} \quad (29)$$

において、単精度のときには $k=9$ としたものを $|z| \geq 10$ で、倍精度のときには $k=36$ としたものを $|z| \geq 18$ で用いれば、丸め程度の誤差でもって $K_0(z)$ 、

$K_1(z)$ を求めることができる.

4. む す び

以上において, τ -method による $K_n(z)$ の計算法について述べた. その際, 微分方程式 (6) の右辺の shifted Ultraspherical 多項式 $C_n^{*(\alpha)}(t/\beta)$ を, shifted Legendre 多項式と選び, 得られる近似式において $\beta=t$ としたときに, $\operatorname{Re}(z)>0$ の $|z|$ の小さくないところで, $K_0(z), K_1(z)$ を能率よく求められることを誤差解析を通じて示した. また, この τ -method は, 漸化式を用いる方法を併用することによって, 複素平面全域で $K_n(z)$ を丸め程度の誤差で能率的に求めることができることを示した.

なお, 本計算は, 名古屋大学大型計算機センターで行なった.

おわりに, 有益なご助言をいただいた本学梅野正義助教授に深謝いたします.

参 考 文 献

1) I. Gargantini & P. Henrici: A Continued

- Fraction Algorithm for the Computation of Higher Transcendental Functions in the Complex Plane, Math. Comp., Vol. 21, pp. 18~29 (1967).
- 2) Fr. Mechel: Calculation of the Modified Bessel Functions of the Second Kind with Complex Argument, Math. Comp., Vol. 20, pp. 407~412 (1966).
- 3) C. Lanczos: Applied Analysis, pp. 464~507, Prentice Hall, Englewood Cliffs (1956).
- 4) National Bureau of Standards: Table of Chebyshev Polynomials $S_n(x)$ and $C_n(x)$, Appl. Math. Ser. 9, pp. XVIII~XXV, U.S. Government Printing Office, Washington D.C. (1952).
- 5) National Bureau of Standards: Handbook of Mathematical Functions, Appl. Math. Ser. 55, p. 774, U.S. Government Printing Office, Washington D.C. (1964).
- 6) 吉田年雄 他: 漸化式を用いる複素変数のベッセル関数 $I_n(z)$ の数値計算, 情報処理, Vol. 13, No. 1, pp. 23~29 (1973).

(昭和48年6月11日受付)