Vol. 15 No. 8 情 報 処 理 Aug. 1974

論 文

利用者の多い計算センターにおける最適多重処理について*

伊 澤 喜三男**

Abstract

Suppose that, under a multiprogramming environment of multiplicity N, we divide the main memory space of capacity C of a computer system into N domains such that $N=\sum_{i=1}^{n} p_i$, $C=\sum_{i=1}^{n} p_i u_i$, and $\alpha\ (=u_0) \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n$; so that, on domains of capacity u_i, only jobs requiring a memory space of capacity v such that $u_{i-1} \leq v \leq u_i$ are performed. Under a uniprogramming environment, jobs such that $u_n \leq v \leq C$ are performed.

The problem is, subject to the above mentioned constraints, to minimize the time needed to perform all the jobs which arrive at a computation center within a certain definite period.

In this paper, we consider some fundamental aspects of the problem, and show an analytical method and an efficient algorithm of calculation to obtain the optimal policy to divide the main memory into domains.

1. はじめに

多数の利用者を擁する計算センター***の運用の改善に資するため，広範な利用者層から出て計算センターに集中するジョブの記憶領域要求（または使用）量別領域占有時間総計の定期統計データ，あるいはその解析的表現に即して主記憶空間を最適に分割する方法を述べる．これにより多重処理と単一処理の併用によって一期間の全ジョブを処理するに要する時間を最小にする方策を得ることができる．この方法は，端的に述べるならば，よく知られている動的計画法の手法の効果的な適用であるということができる．

2. 問題の背景

本稿で念頭に置くのはごく普通に見られる計算機システムである．しかし，計算センターの運用方針に沿って，単一処理（uniprogramming）または多重処理（multiprogramming）が適宜に行えるものとする．システム内の CPU（中央処理装置）数はいくつでもよい．ところで，現在の設計技術では多重処理に関連して記憶空間の管理のしかたはさまざまである．記憶空間自体の階層的構造とあいまって仮想記憶方式を採るシステムも最近では多い．もちろんそうでない計算機も依然として多くみられる．後者に限っても，記憶領域の動的配分（dynamic allocation）方式と固定分割（partition）方式がある．動的配分方式のよく知られた例として，IBM OS/360 MVT[1] がある．また，それより優れた方式といえる動的再配分（dynamic relocation)方式は，わが国では辻ケ堂，伊澤，竜田の設計によって FONTAC-8040 モニター[2] において初めて実施されたもの（多重処理の実施としてもわが国で初めて）である．現今では，たとえば京大大型センター（全国共同利用京都大学大型計算機センターの略称）などに設置されている FACOM 230-60，同-75[3]，などに受け継がれ，さらに進んだ方式が実用化されている*．固定分割方式の例としては OS/360 MFT[1] がある．また，たとえば阪大，東北大大型センターなどに設置されている NEAC 2200-500，同-700[4] などに採用された方式でもある．そこでは主記憶空間を運用方針に従って適当な容量のいくつかの領域に固定的に分

* On Optimal Multiprogramming for Computation Centers Having Many Users, by Kimio IZAWA (Computation Center, Osaka University)

** 大阪大学大型計算機センター

*** たとえば東京大学をはじめ七大学に設置されている全国共同利用大型計算機センター．

* 文献 3，第Ⅱ部，第1章，2，‘記憶空間の管理’参照．

割し，各領域で単一処理を行いつつ全体として多重処理を行う**．本稿ではとりあえずこの方式によるシステムを想定する．阪大大型センターなどの現状もあり，また，解析の容易さもうかがえるからである．

このようにシステムを想定するならば，到着するジョブ全体を処理するには時間帯を分けて領域要求量が比較的小さいジョブを処理する多重処理と，残余の大型ジョブを処理する単一処理を併用する運用方式がまず考えられる．このためには個々のジョブは受付窓口で領域要求量に関するジョブ区分に従って所定の入力待ち行列に投入されるか，あるいは処理のある段階でシステムにより自動的に区分されることが必要である．区分のために，たとえば阪大大型センターでは要求量を利用者自身が申告する方式を採っている***．

本稿では計算センターの利用者は多数でありしかも利用者の専門分野は広範囲にわたっていると仮定する．全国共同利用大型計算機センターの現況は事実この通りである．このため，到着するジョブ全体としては一定期間を区切ると，たとえばジョブの記憶領域要求（使用）量別領域占有時間総計など年次変動，季節変動などの長期変動に服しながらも短期的には安定したパターンで分布することになる．阪大大型センターの統計資料によれば，これは第1図のようになる．

個々のジョブの領域占有時間は処理環境に左右される．領域要求量区分 s に対する領域占有時間総計を N 多重処理下では $T_N(s)$ と置くと，通常，

$$T_1(s)\leq T_2(s)\leq\cdots\leq T_N(s)\leq\cdots, \qquad (1)$$

$$T_1(s)\geq T_2(s)/2\geq\cdots\geq T_N(s)/N\geq\cdots \qquad (2)$$

の関係にあると考えられる．いま，

$$k_N=\frac{T_N(s)}{T_1(s)} \quad (N=1,2,\cdots) \qquad (3)$$

を考えると，k_N はシステムによって定まる定数であるとすると扱いが容易になる．

本章で簡単に考察したような計算センターにおいて一定期間内に到着するジョブの全部を最小の運転時間で処理することが本稿での‘最適’の意味である．この意味で多重処理時間帯における多重度 N と記憶空間分割の最適方策を決定する方法を開発するのが本稿の課題である．

** モデル700ではモデル500と異なりそれぞれの領域内の浮動する境界を挟む上部と下部とで二つのジョブを並列に処理し得る．

*** 東北大大型センターでは入力カード枚数から要求量を算出している．しかし，コンパイレーション時はともかく実行時にほとんど相関関係がないのでかえって弊害を生むことが報告されている．そのため同センターでも阪大と同等の方式を採る予定のようである[8]．

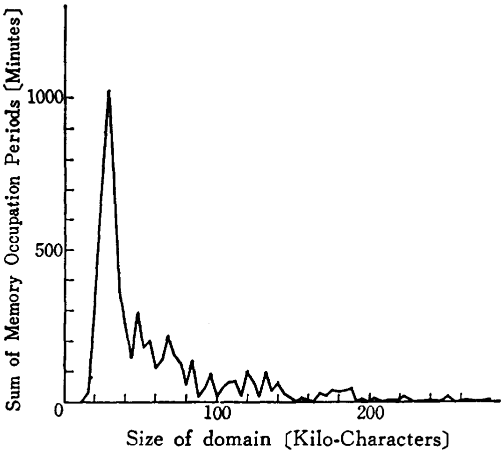

図1　記憶領域使用量別領域占有時間総計（2645 個のプログラムの実行より集計したもの）

Fig. 1 Sum of memory occupation periods vs size of domain (obtained from 2645 program executions)

3. 問題の定式化と解法の基礎

正整数の無限系列 $\langle p_1, p_2, \cdots\rangle$ を P と置くとき，系列 P の始めの n 個の要素からなる部分系列 $\langle p_1, p_2, \cdots, p_n\rangle$ を P_n と書く．

本章では記憶容量（領域量）を連続量（実数）として扱う．強いて離散量とする必要はないからである．

計算機システムが利用者に提供できる最大主記憶容量を C と書く．これを N 多重処理（多重度 N の多重処理）時に，N ($N=p_1+p_2+\cdots+p_n$, $\langle p_1, p_2\cdots, p_n\rangle=P_n$) 個の領域 $D_{ij}{}^{(P_n)}$ ($j=1,2,\cdots,p_i$; $i=1,2,\cdots,n$) に下記の式(4)，(5)を満たすようにそれぞれ容量 $u_{ij}{}^{(P_n)}(C)$ ($j,(P_n),(C)$ を省略することもある．) をもって分割する．

$$\begin{aligned}\alpha\leq u_{11}{}^{(P_n)}&=u_{12}{}^{(P_n)}=\cdots=u_{1p_1}{}^{(P_n)}(=u_1{}^{(P_n)})\leq u_{21}{}^{(P_n)}\\&=u_{22}{}^{(P_n)}=\cdots=u_{2p_2}{}^{(P_n)}(=u_2{}^{(P_n)})\leq\cdots\leq u_{n1}{}^{(P_n)}\\&=u_{n2}{}^{(P_n)}=\cdots=u_{np_n}{}^{(P_n)}(=u_n{}^{(P_n)}),\end{aligned} \qquad (4)$$

$$p_1u_1{}^{(P_n)}+p_2u_2{}^{(P_n)}+\cdots+p_nu_n{}^{(P_n)}=C, \qquad (5)$$

ここに $\alpha(\geq 0)$ はどのジョブも制御プログラムとかコンパイラなどを必要とすることを反映して最小必要容量を表す．

領域 $D_{ij}{}^{(P_n)}$($j=1,2,\cdots,p_i$) では，要求容量 υ が $u_{i-1}{}^{(P_n)}\leq\upsilon\leq u_i{}^{(P_n)}$（ただし $u_0{}^{(P_n)}=\alpha$ とする）であるようなジョブだけを処理し，処理量は時間的に均等に

配分するものとする．要求容量 v が $u_n^{(P_n)} \leq v \leq C$ であるようなジョブは多重処理時間帯に処理できないので，これは単一処理時間帯に処理する．

このような運用形態を P_n 型運用，このときの多重処理を P_n 型多重処理という．多重度は N である．

要求記憶容量 v が $\alpha \leq v \leq x(x \leq C)$ であるようなジョブの領域占有時間の一期間分総計 T_x は，N 多重処理の環境の下では，次式で与えられるとする．

$$T_x=\int_{\alpha}^{x} f_N(v)dv, \tag{6}$$

ここに被積分関数 f_N についてつぎの性質を仮定する．

$(F1)$ $f_N(x)(N=1,2,\cdots)$ は，区間 $[\alpha, C]$ において高々有限個の不連続点を持つ有界関数（したがって積分可能）であり，また $[\alpha, C]$ 内の連続な点 x において $f_N(x)>0$（したがって区間 $[a,b] \subseteq [\alpha, C]$ での積分は常に正となる）である．

$(F2)$ 下記の条件を満たす定数 $k_N(N=1,2,\cdots)$ が存在する．

$$f_N(x)=k_N \cdot f_1(x),\quad x \in [\alpha, C], \tag{7}$$

$$k_1(=1) \leq k_2 \leq k_3 \leq \cdots\cdots, \tag{8}$$

$$k_1 \geq k_2/2 \geq k_3/3 \geq \cdots. \tag{9}$$

なお，$F1$ の結果，式(6)の不定積分は $[\alpha, C]$ で連続な関数となる．

さて，ここで $\boldsymbol{J}_i^{(P_n)}(C)$（または $\boldsymbol{J}_i^{(P_n)}$）を

$$\boldsymbol{J}_i^{(P_n)}=\frac{1}{p_i}\int_{u_{i-1}}^{u_i} f_N(x)dx \tag{10}$$

と定義する．$\boldsymbol{J}_i^{(P_n)}$ は，一期間内に P_n 型多重処理の下で領域 $D_{ij}^{(P_n)}(j=1,2,\cdots,p_i)$ 上で行うすべての処理を完了するのに要する時間を表す．そうすると多重処理時間帯の長さは $\max\limits_{i=1,2,\cdots,n}[\boldsymbol{J}_i^{(P_n)}]$ である．単一処理時間帯の長さを $\boldsymbol{R}^{(P_n)}(C)$（または $\boldsymbol{R}^{(P_n)}$）と書くと，$\boldsymbol{R}^{(P_n)}$ は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{R}^{(P_n)}=\int_{u_n}^{C} f_1(x)dx. \tag{11}$$

最初に生じる問題は P_n 型多重処理時の領域最適分割問題であり，これは同時に P_n 型多重処理時間帯の最小化問題でもある．つぎの問題Ｉがそれである．

［問題Ｉ］ 関数 f_N が与えられたとき，制限条件：

$$(R)\ \begin{cases} p_1u_1+p_2u_2+\cdots+p_nu_n=C, \\ \alpha \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n \end{cases}$$

の下で，目標関数 $\max\limits_{i=1,2,\cdots,n}[\boldsymbol{J}_i^{(P_n)}]$ を最小にするような解 u_i, $\boldsymbol{J}_i^{(P_n)}(i=1,2,\cdots,n)$ を見出せ．

ここでこの問題の基本的性質を明らかにする．

［定理１］ 条件 R を満たす $u_i, \boldsymbol{J}_i^{(P_n)}(i=1,2,\cdots,n)$ が問題Ｉの解であるための必要十分条件は，条件：

$$(E)\qquad \boldsymbol{J}_1^{(P_n)}=\boldsymbol{J}_2^{(P_n)}=\cdots=\boldsymbol{J}_n^{(P_n)}$$

を満たすことである．

（証明）［１］必要性．

$u_i, \boldsymbol{J}_i^{(P_n)}(i=1,2,\cdots,n)$ は問題Ｉの解とする．この解が条件 E を満足しないと仮定すると，$\boldsymbol{J}_j^{(P_n)}<\boldsymbol{J}_{j+1}^{(P_n)}=\max\limits_i[\boldsymbol{J}_i^{(P_n)}]$ または $\boldsymbol{J}_j^{(P_n)}=\max\limits_i[\boldsymbol{J}_i^{(P_n)}]>\boldsymbol{J}_{j+1}^{(P_n)}$ となるような j が存在する．$\boldsymbol{J}_i^{(P_n)}$ の定義式(10)を不定積分と見なすと，$\boldsymbol{J}_i^{(P_n)}$ は u_i または $u_{i-1}(u_i, u_{i-1} \in [\alpha, C])$ の連続関数であるから，前者の場合，u_j を微かに増大させると $\boldsymbol{J}_j^{(P_n)}<\boldsymbol{J}_j'^{(P_n)}<\boldsymbol{J}_{j+1}'^{(P_n)}<\boldsymbol{J}_{j+1}^{(P_n)}$ となるような分割 $u_1, \cdots, u_{j-1}, u'_j, u_{j+1}, \cdots, u_n$ と $\boldsymbol{J}_1^{(P_n)}, \cdots, \boldsymbol{J}_{j-1}^{(P_n)}, \boldsymbol{J}_j'^{(P_n)}, \boldsymbol{J}_{j+1}'^{(P_n)}, \boldsymbol{J}_{j+2}^{(P_n)}, \cdots, \boldsymbol{J}_n^{(P_n)}$ を得る．後者の場合は u_j を微かに減少させて $\boldsymbol{J}_j^{(P_n)}>\boldsymbol{J}_j'^{(P_n)}>\boldsymbol{J}_{j+1}'^{(P_n)}>\boldsymbol{J}_{j+1}^{(P_n)}$ となるような分割を得る．$\boldsymbol{J}_j^{(P_n)}=\max\limits_i[\boldsymbol{J}_i^{(P_n)}]$ であるような j は有限個しかないからこの操作を有限回繰返して，結局，$\max\limits_i[\boldsymbol{J}_i'^{(P_n)}]<\max\limits_i[\boldsymbol{J}_i^{(P_n)}]$ となるような解 u'_i, $\boldsymbol{J}_i'^{(P_n)}(i=1,2,\cdots,n)$ を得ることになる．このことは u_i, $\boldsymbol{J}_i^{(P_n)}(i=1,2,\cdots,n)$ が問題Ｉの解であることに矛盾する．ゆえに解 u_i, $\boldsymbol{J}_i^{(P_n)}$ は条件 E を満足させる．

［２］十分性．

$u_i, \boldsymbol{J}_i^{(P_n)}(i=1,2,\cdots,n)$ は条件 R および E を満たすとする．いま，これが問題Ｉの解でないと仮定して，問題Ｉの解を $u_i', \boldsymbol{J}_i'^{(P_n)}(i=1,2,\cdots,n)$ と置く．仮定から $\max\limits_i[\boldsymbol{J}_i'^{(P_n)}]<\boldsymbol{J}_1^{(P_n)}=\cdots=\boldsymbol{J}_n^{(P_n)}$ である．区間 $[u_{i-1}, u_i] \subseteq [\alpha, C]$ での f_N の積分は常に正となるので，$\boldsymbol{J}_1'^{(P_n)}<\boldsymbol{J}_1^{(P_n)}$ から $u_1'<u_1$ が，$u_1'<u_1$ および $\boldsymbol{J}_2'^{(P_n)}<\boldsymbol{J}_2^{(P_n)}$ から $u_2'<u_2$ が，…，$u_{n-1}'<u_{n-1}$ および $\boldsymbol{J}_{n-1}'^{(P_n)}<\boldsymbol{J}_{n-1}^{(P_n)}$ から $u_n'<u_n$ がそれぞれいえる．$p_1u_1+\cdots+p_nu_n=C$ であるから，$u_1', \cdots, u_n'$ は $p_1u_1'+\cdots+p_nu_n'<C$，したがって条件 R を満たさない．このことは $u_1', \cdots, u_n'$ が問題Ｉの解であることに矛盾する．ゆえに $u_i, \boldsymbol{J}_i^{(P_n)}$ は問題Ｉの解でなければならない．　（証明終）

［定理２］ 問題Ｉの解が存在するための必要十分条件は

$$C \geq N\alpha \tag{12}$$

である．そして存在するならば，一意である．

（証明）［１］必要性．

解 $u_i(i=1,2,\cdots,n)$ が存在するならば，これは条件 R を満たすから，

$$C=p_1u_1+p_2u_2+\cdots+p_nu_n\geq p_1\alpha+p_2\alpha+\cdots+p_n\alpha=N\alpha.$$

［2］ 十分性.

$C\geq N\alpha$ ならば，$u_1=u_2=\cdots=u_n=C/N$ である $u_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ は，条件 R を満たすから，条件 R を満足する E^n（n 次元 Euclid 空間）の点 $(u_1, u_2,\cdots, u_n)$ の集合 $\mathcal{R}$ は空でない．一方，条件 R の定義から，集合 $\mathcal{R}$ はコンパクト(有界閉領域)であるので，$\mathcal{R}$ 上で関数 $\max\limits_{i=1,2,\cdots,n}[\boldsymbol{J}_i{}^{(P_n)}]$ ($\boldsymbol{J}_i{}^{(P_n)}$ を u_{i-1}, u_i の関数と見なす) は連続である．これゆえに $\max\limits_{i=1,2,\cdots,n}[\boldsymbol{J}_i{}^{(P_n)}]$ は集合 $\mathcal{R}$ の上で最小値をとる点が存在する.

［3］ 一意性.

定理1から問題Ⅰの解は同時に条件 E を満たす．いま条件 E を満たす二通りの異なる解 $u_i, \boldsymbol{J}_i{}^{(P_n)}$ および $u_i', \boldsymbol{J}_i'{}^{(P_n)}(i=1,2,\cdots,n)$ が存在すると仮定する．$j=\min\{i|u_i\neq u_i'\}$ と置く．ここで $u_j<u_j'$ として一般性を失わない．$u_{j-1}=u_{j-1}'$ であるから $\boldsymbol{J}_j{}^{(P_n)}<\boldsymbol{J}_j'{}^{(P_n)}$ である．$u_i, u_i'\,(i=1,2,\cdots,n)$ はともに条件 R を満たすので，$u_k>u_k'\,(k>j)$ なる k が存在するはずである．$\min\{i|i>j, u_i>u_i'\}$ を改めて k と置くと，$u_{k-1}\leq u_{k-1}'$ であるから $\boldsymbol{J}_j{}^{(P_n)}>\boldsymbol{J}_k'{}^{(P_n)}$ である．$u_i, \boldsymbol{J}_i{}^{(P_n)}\,(i=1,2,\cdots,n)$ は条件 E を満たすから，$\boldsymbol{J}_j{}^{(P_n)}=\boldsymbol{J}_k{}^{(P_n)}$，したがって $\boldsymbol{J}_j'{}^{(P_n)}>\boldsymbol{J}_k'{}^{(P_n)}$ となる．これは u_i', $\boldsymbol{J}_i'{}^{(P_n)}(i=1,2,\cdots,n)$ も条件 E を満たすことに矛盾する．ゆえに問題Ⅰの解は，存在するならば，一意である． (証明終)

問題Ⅰは，パラメータ α を消去した形に変えると好都合なことがある．解が存在するとき，問題Ⅰからつぎの問題Ⅱを作成することを問題の正規化という.

［問題Ⅱ］ 関数 $g_N(x)=f_N(x+\alpha)$ について，制限条件 S，すなわち

$$(S)\ \begin{cases}p_1u_1'+p_2u_2'+\cdots+p_nu_n'=\gamma(=C-N\alpha),\\ 0\leq u_1'\leq u_2'\leq\cdots\leq u_n'\end{cases}$$

の下で目標関数 $\max\limits_{i=1,2,\cdots,n}[\boldsymbol{J}_i'{}^{(P_n)}(\gamma)]$ を最小にするような解 u_i', $\boldsymbol{J}_i'{}^{(P_n)}(\gamma)\,(i=1,2,\cdots,n)$ を見出せ.

問題Ⅱに対応する単一処理時間は次式で与えられる.

$$\boldsymbol{R}'^{(P_n)}(\gamma)=\int_{u_n'}^{\gamma}g_1(x)dx. \tag{13}$$

［定理3］ P_n 型多重処理時間および領域分割に関する問題Ⅰの解 $u_i(C)$, $\boldsymbol{J}_i{}^{(P_n)}(C)\,(i=1,2,\cdots,n)$ とそのときの単一処理時間 $\boldsymbol{R}^{(P_n)}(C)$ は，問題を正規化して得られる問題Ⅱの解 $u_i'(\gamma), \boldsymbol{J}_i'{}^{(P_n)}(\gamma)\,(i=1,2,\cdots,n)$ と $\boldsymbol{R}'^{(P_n)}(\gamma)$ とから以下の式を用いて求められる.

$$u_i(C)=u_i'(\gamma)+\alpha, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{J}_i{}^{(P_n)}(C)=\boldsymbol{J}_i'{}^{(P_n)}(\gamma), \tag{15}$$

$$\boldsymbol{R}^{(P_n)}(C)=\boldsymbol{R}'^{(P_n)}(\gamma)+\int_{\gamma}^{\gamma+(N-1)\alpha}g_1(x)dx. \tag{16}$$

(証明) 式(10)，(11)における積分変数を $x=t+\alpha(=\varphi(t))$ で変換する．$\varphi(t)$ および $\varphi'(t)$ は $[0, C-\alpha]$ で無論連続であるから，$u_i=\varphi(u'_i)$ と置くと，まず

$$\boldsymbol{J}_i{}^{(P_n)}(C)=\frac{1}{p_i}\int_{u'_{i-1}}^{u'_i}f_N(t+\alpha)dt \tag{17}$$

が成り立つ．式(17)の右辺を $\boldsymbol{J}_i'{}^{(P_n)}$ と置くと，$\boldsymbol{J}_1{}^{(P_n)}(C)=\boldsymbol{J}_2{}^{(P_n)}(C)=\cdots=\boldsymbol{J}_n{}^{(P_n)}(C)$ であるから，$\boldsymbol{J}_1'{}^{(P_n)}=\boldsymbol{J}_2'{}^{(P_n)}=\cdots=\boldsymbol{J}_n'{}^{(P_n)}$ すなわち条件 E を満足する．$C=\sum\limits_i p_iu_i(C)=\sum\limits_i p_i(u_i'+\alpha)=\sum\limits_i p_iu_i'+N\alpha$ かつ $u_{i+1}(C)=u_i'+\alpha\geq u_i(C)=u_i'+\alpha\geq\alpha$ から，$\sum\limits_i p_iu_i'=C-N\alpha=\gamma$ および $0\leq u_1'\leq u_2'\leq\cdots\leq u_n'$．つまり条件 S を満足する．したがって u_i', $\boldsymbol{J}_i'{}^{(P_n)}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ は問題Ⅱの解である．定理2によって解の一意性から，問題Ⅱの解を求めれば式(14)，(15)より問題Ⅰの解が得られる.

また，

$$\boldsymbol{R}^{(P_n)}(C)=\int_{u_n'}^{C-\alpha}f_1(t+\alpha)dt =\int_{u_n'}^{C-N\alpha}f_1(t+\alpha)dt+\int_{C-N\alpha}^{C-\alpha}f_1(t+\alpha)dt \tag{18}$$

が成り立つ．したがって $\boldsymbol{R}^{(P_n)}(C)$ は式(16)より算出される． (証明終)

つぎの定理は問題の一般的解法の基本となる.

［定理4］ P_n 型多重処理に関する問題Ⅰの解を $u_i{}^{(P_n)}(C)$, $\boldsymbol{J}_i{}^{(P_n)}(C)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ と置くと，$u_i{}^{(P_n)}(C)$, $(k_{(N-p_n)}/k_N)\cdot\boldsymbol{J}_i{}^{(P_n)}(C)$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$ は，記憶容量が $C-p_n\cdot u_n{}^{(P_n)}(C)$ である場合の P_{n-1} 型多重処理に関する問題Ⅰの解にほかならない．換言すれば $n\geq2$ の場合，後者の解を $u_i{}^{(P_{n-1})}(C-p_nu_n{}^{(P_n)}(C))$, $\boldsymbol{J}_i{}^{(P_{n-1})}(C-p_nu_n{}^{(P_n)}(C))$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$ と書くと

$$u_i{}^{(P_{n-1})}(C-p_nu_n{}^{(P_n)}(C))=u_i{}^{(P_n)}(C), \tag{19}$$

$$\boldsymbol{J}_i{}^{(P_{n-1})}(C-p_nu_n{}^{(P_n)}(C))=(k_{(N-p_n)}/k_N)\cdot\boldsymbol{J}_i{}^{(P_n)}(C) =(k_{(N-p_n)}/k_N)\cdot\boldsymbol{J}_n{}^{(P_n)}(C). \tag{20}$$

(証明) $u_i{}^{(P_n)}(C)$, $\boldsymbol{J}_i{}^{(P_n)}(C)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ は条件 E を満たすから，

$$\sum_{i=1}^{n-1}p_i\cdot u_i{}^{(P_n)}(C)=C-p_nu_n{}^{(P_n)}(C),$$

$$\boldsymbol{J}_1{}^{(P_n)}(C)=\boldsymbol{J}_2{}^{(P_n)}(C)=\cdots=\boldsymbol{J}_n{}^{(P_n)}(C).$$

一方，

$$J_i^{(P_n)}(C)=\frac{1}{p_i}\int_{u_{i-1}^{(P_n)}(C)}^{u_i^{(P_n)}(C)} f_N(x)dx$$

$$=\frac{k_N}{k_{(N-p_n)}}\left[\frac{1}{p_i}\int_{u_{i-1}^{(P_n)}(C)}^{u_i^{(P_n)}(C)} f_{(N-p_n)}(x)dx\right]$$

であるから，定義式(10)により，式(20)を得る．

$u_i^{(P_n)}(C)$, $(k_{(N-p_n)}/k_N)\cdot J_i^{(P_n)}(C)$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$ は条件Eを満たすので，記憶容量 $C-p_n\cdot u_n^{(P_n)}(C)$ の場合の P_{n-1} 型多重処理に関する問題Ⅰの解となる．

（証明終）

定理4は，問題が多段決定過程[6]として処理できることを示している．定理4の結果，P_n 型多重処理問題Ⅰの関数再帰方程式を下記のようにまとめられる．

［関数再帰方程式］

(1)　$n=1$ に対して

$$\left.\begin{aligned}&J_1^{(P_1)}(C)=\frac{1}{p_1}\int_{\alpha}^{u_1^{(P_1)}(C)} f_{p_1}(x)dx,\\&u_1^{(P_1)}(C)=\frac{C}{p_1},\\&R^{(P_1)}(C)=\int_{C/p_1}^{C} f_1(x)dx.\end{aligned}\right\}\qquad(21)$$

(2)　$n\geq 2$ に対して

$$\left.\begin{aligned}&J_n^{(P_n)}(C)=\frac{k_N}{k_{(N-p_n)}}J_{n-1}^{(P_{n-1})}(C-p_nu_n^{(P_n)}(C),\\&u_{n-1}^{(P_n)}(C)=u_{n-1}^{(P_{n-1})}(C-p_nu_n^{(P_n)}(C)).\end{aligned}\right\}\qquad(22)$$

関数再帰方程式 (21)，(22) の解 $J_n^{(P_n)}(C)$ および $u_n=u_n^{(P_n)}(C)$, $u_{n-1}=u_{n-1}^{(P_{n-1})}(C-p_nu_n)$, $u_{n-2}=u_{n-2}^{(P_{n-2})}(C-p_nu_n-p_{n-1}u_{n-1})$, $\cdots$, $u_1=u_1^{(P_1)}(C-p_nu_n-p_{n-1}u_{n-1}-\cdots-p_2u_2)$ がわれわれの求める問題Ⅰの解である．

一期間内に到着するジョブは P_n 型運用により，領域を最適に分割することによって結局，$J^{(P_n)}=J_n^{(P_n)}+R^{(P_n)}$ なる時間を費して全部処理することができる．そこでつぎの運用最適化問題が生じる．

［問題Ⅲ］ すべての $J^{(P_n)}$ からなる集合 J が最小元 $J^{(P_n)}$ を持つならば，そのような P_n を決定せよ．

［定理5］ 問題Ⅲの解は存在し，解 P_n および最小値 $J^{(P_n)}$ を決定することができる．

（証明） P_n 型多重処理問題Ⅰの解を $u_i, J_i^{(P_n)}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ と置く．$u_1=\varepsilon_1+\alpha$ とすると，

$$C=p_1u_1+p_2u_2+\cdots+p_nu_n\geq Nu_1=N(\varepsilon_1+\alpha)$$

であるから，$(C-N\alpha)/N\geq\varepsilon_1$ が成り立つ．

［1］ $\alpha>0$ の場合．

$N>C/\alpha$ であるような P_n 型多重処理は不可能である．$N\leq C/\alpha$ であるような P_n 型運用は有限通りしかないから，最小値 $J^{(P_n)}$ は存在し，そのような P_n は決定できる．

［2］ $\alpha=0$ の場合．

$C/N\geq\varepsilon_1$ であるから，$N\to\infty\Rightarrow$(ならば) $\varepsilon_1\to 0\Rightarrow$

$$J_i^{(P_n)}\to 0\ \ (i=1,2,\cdots,n)\Rightarrow J^{(P_n)}\to\int_0^C f_1(x)dx$$

上記は，Nを大にすると全ジョブを単一処理で処理する場合の処理時間に近づくことを示す．ところで，$k_p/p<k_1$ なる p が存在しないときは，単一処理が最適運用である．$k_p/p<k_1$ なる p が存在するならば，$P=\langle p\rangle$ と置くと，

$$J^{(P)}=\frac{1}{p}\int_0^{C/p} f_p(x)dx+\int_{C/p}^{C} f_1(x)dx<\int_0^C f_1(x)dx$$

である．したがって適当な N_0 に対し $N<N_0$ であるようなある P_n が存在して，$J^{(P_n)}$ は最小となる．$N<N_0$ なる P_n は有限個しかないから解を決定することができる．

（証明終）

定理5は，最適運用形態が存在し，われわれは最適解を求めることができると述べている．しかし，与えられた $f_N(N=1,2,\cdots)$ について解析的に解くことが実際不可能であったり，かなりの困難が伴ったりすることもあるから，場合に応じて数値解法を用いる．

次章では，求解の実際を例解で示す．特に数値解法のアルゴリズムは一般性もあり実用上重要である．

4. 解析解の求め方と数値解法のアルゴリズム

［例題1］ 記憶領域占有時間総計が使用領域量の範囲〔α, C〕で一様に分布するような計算センターでの最適運用形態を決定せよ．

（解） $f_1(x)=K$(定数)>0 $(x\in[\alpha, C])$と置く．

(1.1)　$n=1$ に対しては式(21)より

$$\left.\begin{aligned}&u_1^{(P_1)}(C)=\frac{C}{p_1},\\&J_1^{(P_1)}(C)=\frac{1}{p_1}\int_{\alpha}^{C/p_1} k_{p_1}Kdx=\frac{k_{p_1}}{p_1^2}K(C-p_1\alpha),\end{aligned}\right\}\qquad(23)$$

$$R^{(P_1)}(C)=\int_{C/p_1}^{C} Kdx=K\frac{(p_1^2-p_1)C}{p_1^2}.\qquad(24)$$

(1.2)　$n=2$ に対して．

$u_1^{(P_2)}(C)$, $u_2^{(P_2)}(C)$ を u_1, u_2 と略記する．式(22)より

$$u_1=u_1^{(\mathrm{P}_1)}(C-p_2u_2)=(C-p_2u_2)/p_1. \tag{25}$$

式(10)より

$$\boldsymbol{J}_2^{(\mathrm{P}_2)}(C)=\frac{1}{p_2}\int_{u_1}^{u_2}f_{(p_1+p_2)}(x)dx$$

$$=\frac{k_{(p_1+p_2)}}{p_1p_2}K\{(p_1+p_2)u_2-C\}. \tag{26}$$

式(22)より

$$\boldsymbol{J}_2^{(\mathrm{P}_2)}(C)=\frac{k_{(p_1+p_2)}}{k_{p_1}}\boldsymbol{J}_1^{(\mathrm{P}_1)}(C-p_2u_2)$$

$$=\frac{k_{(p_1+p_2)}}{p_1^2}K(C-p_2u_2-p_1\alpha). \tag{27}$$

式(26)，(27)を u_2 に関して解くと

$$u_2=\frac{(p_1+p_2)C-p_1p_2\alpha}{p_1^2+p_1p_2+p_2^2}. \tag{28}$$

↗

↘u_2 の値を式(25)，(26)，(11)に代入すると

$$u_1=\frac{p_1C+p_2^2\alpha}{p_1^2+p_1p_2+p_2^2}, \tag{29}$$

$$\boldsymbol{J}_2^{(\mathrm{P}_2)}(C)=\frac{k_{(p_1+p_2)}}{p_1^2+p_1p_2+2^2}K\{C-(p_1+p_2)\alpha\}, \tag{30}$$

$$\boldsymbol{R}^{(\mathrm{P}_2)}(C)=K\frac{(p_1^2+p_1p_2+p_2^2-p_1-p_2)C+p_1p_2\alpha}{p_1^2+p_1p_2+p_2^2}. \tag{31}$$

(1.3) $n=3$ に対して.

$u_i^{(\mathrm{P}_3)}(C)$ $(i=1,2,3)$ を u_i と略記し，結果のみ示す.

$$u_3=\frac{(p_1+p_2+p_3)C-(p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1)\alpha}{p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1}, \tag{32}$$

$$u_2=\frac{(p_1+p_2)C-\{(p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1)-(p_1+p_2+p_3)p_3\}\alpha}{p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1}, \tag{33}$$

$$u_1=\frac{p_1C-\{(p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1)-(p_1+p_2+p_3)(p_3+p_2)\}\alpha}{p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1}, \tag{34}$$

$$\boldsymbol{J}_3^{(\mathrm{P}_3)}(C)=\frac{k_{(p_1+p_2+p_3)}}{p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1}K\{C-(p_1+p_2+p_3)\alpha\}, \tag{35}$$

$$\boldsymbol{R}^{(\mathrm{P}_3)}(C)=K\frac{(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1-p_1-p_2-p_3)C+(p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1)\alpha}{p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1}. \tag{36}$$

これまでの結果から一般解が推測できる. 証明は数学的帰納法による（詳細は省略する).

(1.4) 一般解.

$$u_n=\frac{\{\sum_{i=1,2,\cdots,n}p_i\}C-\{\sum_{i,j=1,2,\cdots n;\ i<j}p_ip_j\}\alpha}{\sum_{i,j=1,2,\cdots,n;\ i\leq j}p_ip_j}, \tag{37}$$

$$u_{n-1}=\frac{\{\sum_{i=1,2,\cdots,n-1}p_i\}C-\{\sum_{i,j=1,2,\cdots,n;\ i<j}p_ip_j-p_n(\sum_{i=1,2,\cdots,n}p_i)\}\alpha}{\sum_{i,j=1,2,\cdots,n:\ i\leq j}p_ip_j}, \tag{38}$$

$$u_{n-2}=\frac{\{\sum_{i=1,2,\cdots,n-2}p_i\}C-\{\sum_{i,j=1,2,\cdots,n;\ i<j}p_ip_j-(p_n+p_{n-1})(\sum_{i=1,2,\cdots,n}p_i)\}\alpha}{\sum_{i,j=1,2,\cdots,n;\ i\leq j}p_ip_j}, \tag{39}$$

$$\vdots$$

$$u_1=\frac{p_1C-\{\sum_{i,j=1,2,\cdots,n;\ i<j}p_ip_j-(p_n+p_{n-1}+\cdots+p_2)(\sum_{i=1,2,\cdots,n}p_i)\}\alpha}{\sum_{i,j=1,2,\cdots,n;\ i\leq j}p_ip_j}, \tag{40}$$

$$\boldsymbol{J}_n^{(\mathrm{P}_n)}(C)=\frac{k_{(p_1+p_2+\cdots+p_n)}}{\sum_{i,j=1,2,\cdots,n;\ i\leq j}p_ip_j}K\{C-(\sum_{i=1,2,\cdots,n}p_i)\alpha\}, \tag{41}$$

$$\boldsymbol{R}^{(\mathrm{P}_n)}(C)=K\frac{\{\sum_{i,j=1,2,\cdots,n;\ i\leq j}p_ip_j-\sum_{i=1,2,\cdots,n}p_i\}C+\{\sum_{i,j=1,2,\cdots,n:\ i<j}p_ip_j\}\alpha}{\sum_{i,j=1,2,\cdots,n;\ i\leq j}p_ip_j}. \tag{42}$$

特に $P_n=\langle 1,1,\cdots,1\rangle$ に対しては

$$u_n=\frac{2n}{n(n+1)}C-\frac{n-1}{n+1}\alpha, \tag{43}$$

$$u_{n-1}=\frac{2(n-1)}{n(n+1)}C-\frac{n-3}{n+1}\alpha, \tag{44}$$

$$\vdots$$

$$u_1=\frac{2}{n(n+1)}C-\frac{n-(2n-1)}{n+1}\alpha, \tag{45}$$

$$\boldsymbol{J}_n^{(P_n)}(C)=k_nK\left\{\frac{2}{n(n+1)}C-\frac{2}{n+1}\alpha\right\}, \tag{46}$$

$$\boldsymbol{R}^{(P_n)}(C)=K\left(\frac{n-1}{n+1}C+\frac{n-1}{n+1}\alpha\right). \tag{47}$$

(1.5)　数値例.

k_N $(N=1,2,\cdots)$ は次式で与えられると仮定する. 次式は, 個々のジョブの領域占有時間に対する CPU 使用時間(計算時間)の割合が平均して 50% であり, N多重処理により個々のジョブへの CPU 割当て時間が平均して単一処理に比して k_N/N の割合に減少し, 減少の仕方は指数的であることを意味する*.

$$k_N=N((1/2)+(1/2)e^{-0.2(N-1)}). \tag{48}$$

式(48)から $k_1=1.000$, $k_2=1.818$, $k_3=2.505$, $k_4=3.096$, $k_5=3.620$, $k_6=4.104$, $k_7=4.550$, $k_8=4.984$, $k_9=5.409$, $k_{10}=5.820$; $k_1/1=1.000$, $k_2/2=0.909$, $k_3/3=0.835$, $k_4/4=0.774$, $k_5/5=0.724$, $k_6/6=0.684$, $k_7/7=0.650$, $k_8/8=0.623$, $k_9/9=0.601$, $k_{10}/10=0.582$.

(a)　$\alpha=0$ の場合.

全ジョブの単一処理時間を 1000 とする.

$P_n=\langle 1, 1, \cdots, 1\rangle$, $Q_n=\langle 2, 1, 1, \cdots, 1\rangle$ とすると, $\boldsymbol{J}^{(P_1)}=1000$, $\boldsymbol{J}^{(P_2)}=939$, $\boldsymbol{J}^{(P_3)}=918$, $\boldsymbol{J}^{(P_4)}=910$, $\boldsymbol{J}^{(P_5)}=908$, $\boldsymbol{J}^{(P_6)}=910$, $\boldsymbol{J}^{(P_7)}=913$, $\boldsymbol{J}^{(P_8)}=916$, $\boldsymbol{J}^{(P_9)}=920$ $\boldsymbol{J}^{(P_{10})}=924$, $\cdots$; $\boldsymbol{J}^{(Q_1)}=955$, $\boldsymbol{J}^{(Q_2)}=929$, $\boldsymbol{J}^{(Q_3)}=918$, $\boldsymbol{J}^{(Q_4)}=914$, $\boldsymbol{J}^{(Q_5)}=914$, $\boldsymbol{J}^{(Q_6)}=916$, $\cdots$.

最小は $\boldsymbol{J}^{(P_5)}=908$, 最適運用形態は $P_5(=\langle 1, 1, 1, 1, 1\rangle)$ 型運用である.

(b)　同じく $\alpha/C=0.1$ の場合.

$\boldsymbol{J}^{(P_1)}=1000$, $\boldsymbol{J}^{(P_2)}=946$, $\boldsymbol{J}^{(P_3)}=936$, $\boldsymbol{J}^{(P_4)}=939$, $\boldsymbol{J}^{(P_5)}=949$, $\boldsymbol{J}^{(P_6)}=959$, $\boldsymbol{J}^{(P_7)}=971$, $\boldsymbol{J}^{(P_8)}=981$, $\boldsymbol{J}^{(P_9)}=991$, $\boldsymbol{J}^{(P_{10})}=1000$; $\boldsymbol{J}^{(Q_1)}=960$, $\boldsymbol{J}^{(Q_2)}=945$, $\boldsymbol{J}^{(Q_3)}=946$, $\boldsymbol{J}^{(Q_4)}=952$, $\cdots$.

最小は $\boldsymbol{J}^{(P_3)}=936$, 最適運用形態は $P_3(=\langle 1,1,1\rangle)$ 型運用である.

いま, 全ジョブの単一処理時間を1作業日（2シフト制 16 時間）としてみると, (a) $\boldsymbol{J}^{(P_5)}\fallingdotseq 14$ 時間32分, (b) $\boldsymbol{J}^{(P_3)}\fallingdotseq 14$ 時間 59 分となり, 多重処理時間帯を設けることによりそれぞれ約1時間 28 分, 1時間1分の処理時間短縮がもたらされる.

上の結果で注目されるのは, α/C の値が最適運用形態および処理時間短縮に鋭い影響を持つことである. この例題の分布型は現実離れしているとはいえ, この事のほかにもいくつか価値ある教訓を引き出すことができよう.

［例題2］ 記憶領域占有時間総計が使用領域量の範囲 $[\alpha, C]$ で第1図のように分布する計算センターでの最適運用形態を決定せよ.

（解） 第1図の分布を式(49)で近似し, 数値計算によって解を求める.

$$\left.\begin{aligned}&f_1(x)=K(x-a)(b-x)^{\mu},\\&\quad x\in[\alpha, C]\subseteq[a,b],\\&K(\text{定数})>0,\ \ \mu>0.\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

数値計算によるときは問題IIの形に正規化して解くとよい. 結局計算量の節約が図れるからである.

$$\left.\begin{aligned}&g_1(x)=f_1(x+\alpha)=K(x-\sigma)(\rho-x)^{\mu},\\&\quad \sigma=a-\alpha,\\&\quad \rho=b-\alpha\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

と置き, γ および p_iu_i $(i=1,2,\cdots)$ は格子点の集合 $\{0, \Delta, 2\Delta, \cdots, t\Delta(=\rho)\}$ の上の変数とする. 関数 $g_1(x)$ の不定積分を求めて置くと

$$\int g_1(x)dx=-\frac{K}{\mu+2}(\rho-x)^{\mu+1}\left\{x+\frac{\rho-(\mu+2)\sigma}{\mu+1}\right\}, \tag{51}$$

$\boldsymbol{L}_n^{(P_n)}(\gamma, u_n)$ をつぎのように定義する. ただし $\bar{u}_0=0$, $0\leq\bar{u}_{n-1}\leq u_n\leq\gamma$.

$$\boldsymbol{L}_n^{(P_n)}(\gamma, u_n)=\frac{1}{p_n}\int_{\bar{u}_{n-1}}^{u_n}g_1(x)dx. \tag{52}$$

式(51), (52)から

$$\boldsymbol{L}_1^{(P_1)}(\gamma, u_1)=\frac{K}{p_1(\mu+2)}\left[\rho^{\mu+1}\cdot\frac{\rho-(\mu+2)\sigma}{\mu+1}-(\rho-u_1)^{\mu+1}\cdot\left\{u_1+\frac{\rho-(\mu+2)\sigma}{\mu+1}\right\}\right], \tag{53}$$

$$\boldsymbol{L}_n^{(P_n)}(\gamma, u_n)=\frac{K}{p_n(\mu+2)}\left[(\rho-\bar{u}_{n-1})^{\mu+1}\cdot\left\{\bar{u}_{n-1}+\frac{\rho-(\mu+2)\sigma}{\mu+1}\right\}-(\rho-u_n)^{\mu+1}\cdot\left\{u_n+\frac{\rho-(\mu+2)\sigma}{\mu+1}\right\}\right],\ (n\geq 2). \tag{54}$$

定義により, $\boldsymbol{J}_n^{(P_n)}(\gamma)=k_{(p_1+p_2+\cdots+p_n)}\boldsymbol{L}_n^{(P_n)}(\gamma, u_n)$ が解に対して成り立つ.

［アルゴリズム］

* k_N/N または k_n に関する議論は文献 7) などを参照するとよい.

表1　計算項目の表

Table 1　Table of items to be computed

	【1】		【2】		…	【n】	
γ	$(1/k_{p_1})J_1^{(P_1)}(\gamma)$	$\bar{u}_1$	$(1/k_{(p_1+p_2)})J_2^{(P_2)}(\gamma)$	$\bar{u}_2$		$(1/k_{(p_1+\cdots+p_n)})J_n^{(P_n)}(\gamma)$	$\bar{u}_n$
0							
Δ							
2Δ							
⋮							
tΔ							

すべての $\gamma\in\{0, \varDelta, 2\varDelta, \cdots, t\varDelta\}$ について，式(53)により $u_1=\gamma/p_1$ に対する $\boldsymbol{L}_1{}^{(P_1)}(\gamma, u_1)$ すなわち $(1/k_{p_1})\boldsymbol{J}_1{}^{(P_1)}(\gamma)$ の値を計算し，第1表【1】の各欄を埋める．$\bar{u}_1$ 欄には γ/p_1 の値を書き込む．

つぎに，第1表が【$m-1$】の各欄まで埋められたとしてつぎの【m】の各欄の値の定め方を述べる．

すべての $\gamma\in\{0, \varDelta, 2\varDelta, \cdots, t\varDelta\}$ について以下に述べる手順を繰り返す．

γ が与えられると，$(1/k_{(p_1+p_2+\cdots+p_m)}\boldsymbol{J}^{(P_m)}(\gamma)$ の計算は，式(54)と第1表【$m-1$】を用いて行う．すなわち $u_m(p_m u_m\in\{0, \varDelta, 2\varDelta, \cdots, t\varDelta\})$ に対し γ 欄の値が $\gamma-p_m u_m$ であるような行（第 i 行と置く）から $\bar{u}_{m-1}$ 欄の値を取り出し，これを式(54)に代入して $\boldsymbol{L}_m{}^{(P_m)}(\gamma, u_m)$ の値を計算する．この $\boldsymbol{L}_m{}^{(P_m)}(\gamma, u_m)$ の値と第 i 行の $(1/k_{(p_1+p_2+\cdots+p_{m-1})})\boldsymbol{J}_{m-1}{}^{(P_{m-1})}(\gamma)$ 欄から得られる値が等しくなるか差が最もゼロに近くなるような場合を u_m について探索する．こうして求めた u_m の値を $\bar{u}_m$ と置くと，$\boldsymbol{L}_m{}^{(P_m)}(\gamma, \bar{u}_m)$ をもって $(1/k_{(p_1+p_2+\cdots+p_m)})\boldsymbol{J}_m{}^{P(m)}(\gamma)$ の値とすることができる．この $\bar{u}_m$ と $\boldsymbol{L}_m{}^{(P_m)}(\gamma, \bar{u}_m)$ を γ の値に対応する行に書き込むことにより順次第1表【m】を埋めて行く．

このようにして第1表が作成されると，これを用いて与えられた α および C に対する解を決定することができる．まず【n】から $\gamma=C-(p_1+p_2+\cdots+p_n)\alpha$ に対する $(1/k_{(p_1+p_2+\cdots+p_n)})\boldsymbol{J}_n{}^{(P_n)}(\gamma)$ と $\bar{u}_n$ が定まる．つぎに【$n-1$】から $\gamma-p_n\bar{u}_n$ に対する $\bar{u}_{n-1}$ が定まる．この過程を繰り返し最後に【1】から $\gamma-p_n\bar{u}_n-p_{n-1}\bar{u}_{n-1}-\cdots-p_2\bar{u}_2$ に対する $\bar{u}_1$ が定まる．こうして得た $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots, \bar{u}_n$ および $(1/k_{(p_1+p_2+\cdots+p_n)})\boldsymbol{J}_n{}^{(P_n)}(\gamma)$ から元の問題の解 $u_1(C), u_2(C), \cdots, u_n(C)$ および $\boldsymbol{J}_n{}^{(P_n)}(C)$ が

$$\left.\begin{aligned} u_1(C)&=\bar{u}_1+\alpha,\\ u_2(C)&=\bar{u}_2+\alpha,\\ &\ \vdots\\ u_n(C)&=\bar{u}_n+\alpha,\end{aligned}\right\}\tag{55}$$

$$\boldsymbol{J}_n{}^{(P_n)}(C)=k_{(p_1+p_2+\cdots+p_n)}\cdot\left[\frac{\boldsymbol{J}_n{}^{(P_n)}(\gamma)}{k_{(p_1+p_2+\cdots+p_n)}}\right]\tag{56}$$

によって算出される．$\boldsymbol{R}^{(P_n)}$ は次式から計算できる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}^{(P_n)}&=\int_{\bar{u}_n}^{C-\alpha} g_1(x)dx\\ &=\frac{K}{(\mu+2)}\left[(\rho-\bar{u}_n)^{\mu+1}\cdot\left\{\bar{u}_n+\frac{\rho-(\mu+2)\sigma}{\mu+1}\right\}\right.\\ &\qquad\left.-(\rho-C+\alpha)^{\mu+1}\cdot\left\{C-\alpha+\frac{\rho-(\mu+2)\sigma}{\mu+1}\right\}\right].\end{aligned}\tag{57}$$

数値例は省略する．

この例解で述べた数値解法は，式(49)の関数に特に依存しないから他の関数であっても適用する点が重要である．$f_1(x)$ の不定積分が解析的に得られないときは，数値積分を用いればよい．$f_1(x)$ の代りに統計データを直接用いることも容易に織り込める．

最後に，本稿の考え方は待ち行列システムの最適化問題にも適用できることを注意して置く．現在，この仕事が進行している．

謝辞　御協力いただいた阪大大型計算機センター助手多喜正城君および同センター技官北本昇一君に感謝します．

参考文献

1) M.A. Auslander and J.F. Jaffe: Functional Structure of IBM Virtual Storage Operating Systems Part 1: Influences of dynamic address translation on operating system technology, IBM Systems Journal, Vol. 12, No. 4, pp. 368～381 (1973).

2) 辻ケ堂信，伊沢喜三男，竜田和彦：FONTAC 8040 MONITOR，情報処理，Vol. 7, No. 5, pp. 256～262 (1966).

3) FACOM 230-60 MONITOR V システム入門編(I)，富士通．

4) NEAC-シリーズ 2200 モデル 700 システム説明書，日本電気．

5) バッチ・システムの処理能力について，東北大学大型計算機センター広報 SENAC, Vol. 6, No. 12, pp. 8～11 (1973).

6) 坂口実：経済分析と動的計画，東洋経済新報社 (1970).

7) D.P. Gaver, Jr.: Probability Models for Multiprogramming Computer Systems, JACM, Vol. 14, No. 3, pp. 423～438 (1967).

(昭和49年1月23日受付)

(昭和49年3月29日再受付)