《論 文》

高速 sine 変換, cosine 変換とその数値積分への応用*

鳥 居 達 生**

Abstract

We will show algorithms of the fast Fourier sine and cosine transforms based on the midpoint rule.

Our algorithms can be applied to a successive approximation of a periodic function by a Fourier series, increasing the order with power of 2. By integration of the series term by term, we have a method of numerical integration of the periodic function, which can be extended to the non-periodic function by a suitable variable transformation.

1. はじめに

周期 2π の複素数値関数 $X(t)$ の離散型フーリエ係数

$$C_k=\frac{1}{N}\sum_{0\leq j<N}X_j\overline{W}(j)^k, \qquad (1)$$

$$X_j=X(2\pi j/N),\quad W(j)=e^{2\pi ij/N},$$

は, $X(t)$ の周期性に注意すれば, このフーリエ係数

$$a_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}X(t)e^{-ikt}dt, \qquad (2)$$

を閉区間 $[0,2\pi]$ における台形公式によって求めたものにほかならない. これを開区間 $(0,2\pi)$ における中点公式によって求めれば

$$B_k=\frac{1}{N}\sum_{0\leq j<N}X_{j+1/2}\overline{W}\left(j+\frac{1}{2}\right)^k, \qquad (3)$$

$$X_{j+1/2}=X\left(2\pi\left(j+\frac{1}{2}\right)\Big/N\right),$$

$$W\left(j+\frac{1}{2}\right)=e^{2\pi i(j+1/2)/N},$$

となる. ここで $W(k/2)$ B_k は, (1)の算法で求められるので, ことさら(3)の算法を考える必要はないように思われる. しかしながら, 入力データ $\{X_{j+1/2}\}$ が対称 (定義は3節) のとき, 台形公式による高速 sine 変換, cosine 変換の算法[1]は使用できない. したがって $\{X_{j+1/2}\}$ の対称性を生かすためには, 中点公式による高速 sine 変換, cosine 変換の算法が必要となる.

標本数 $2N$ の台形公式は, それぞれ標本数 N の台形公式と中点公式に分解されるという周知の事実を関数近似および数値積分に応用する. すなわち関数 $X(t)$ の標本点の個数 N を2倍に増しつつ, 中点公式により高速フーリエ変換を繰返し用い, $X(t)$ のフーリエ係数を“高速に”求めるだけでなく, 所要の精度に応じて展開項数 $N=2^n$ をも機械的に決定する. この場合, 2^n項の中点公式による高速フーリエ変換が重要な役割りを果す.

本論文では, 上述の方法を逐次近似方式による関数 $X(t)$ の高速フーリエ変換あるいは単に逐次近似とよんで, 他の高速フーリエ変換法と区別した.

$X(t)$ が解析的周期関数ならば, 離散型フーリエ級数の収束は速い.

求めた離散型フーリエ級数を項別積分することによって, 一つの“自動積分法”が得られる.

解析的周期関数の積分の一例として第1種楕円積分の計算を行なった.

上述の方法は, 適当な変数変換を併用することにより, 非周期関数に対して拡張できる.

例えば閉区間 $[-1,1]$ で解析的関数 $f(x)$ の Chebyshev 級数展開は, 逐次近似方式による $f(\cos\theta)$ の高速 cosine 変換によって求まる. chebyshev 級数を項別積分すれば, $f(x)$ の積分が得られるが, この方法は, Clenshaw-Curtis 積分法[2~5]を“高速化”したものといってよい.

なお, 以下で用いる記号 $N_l, \tilde{N}_l$ は拙論文[1]の定義と同じである. すなわち $N=r_1r_2\cdots r_n$ と因数分解さ

* Fast Fourier sine and cosine Transforms Based on the Midpoint Rule, by Tatsuo TORII (Faculty of Engineering, Osaka University)

** 大阪大学工学部応用物理学科

れるとき

$N_0=\tilde{N}_n=1$

$N_{l+1}=r_l N_l,\ \tilde{N}_l=N/N_l,\ l=0,1,\cdots,n-1,$

とする．

2. 入力データによる FFT テーブルの表現

半開区間 $[0,2\pi)$ に N 個の点 $2\pi(j+\alpha)/N$, $0\leq j<N$ をとる．α は1より小なる非負の定数とする．これらの点上で $X(t)$ の三角補間多項式をつくる．

補間係数を A_k とすれば

$$\sum_{0\leq k<N} A_k W(j+\alpha)^k = X_{j+\alpha},\quad j=0,1,\cdots,N-1$$

$$\left.\begin{array}{l} X_{j+\alpha}=X(2\pi(j+\alpha)/N), \\ W(j+\alpha)=e^{2\pi i(j+\alpha)/N}. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

一方，三角関数は次の選点直交性をもつ．

$$\frac{1}{N}\sum_{0\leq j<N} W(j+\alpha)^m \overline{W}(j+\alpha)^n = \begin{cases} 0, & m\neq n \mod N, \\ W(\alpha(m-n)), & m=n \mod N. \end{cases} \qquad (5)$$

これより

$$A_k=\frac{1}{N}\sum_{j<N} X_{j+\alpha}\overline{W}(j+\alpha)^k,\quad 0\leq k<N. \qquad (6)$$

明らかに $\alpha=0$ ならば補間係数 A_k は台形公式によるフーリエ係数 C_k に，$\alpha=1/2$ ならば中点公式によるフーリエ係数 B_k に一致する．すなわち(6)は離散型フーリエ変換の拡張になっている．

N 個の係数 A_k を高々 $N(r_1+r_2+\cdots+r_n)$ 回の複素数乗算で求める算法を高速フーリエ変換法と総称する．

高速フーリエ変換の算法は一通りではない．なるべく簡潔な定式化が望ましい．

いま記法の便宜上 $X(j+\alpha)=X_{j+\alpha}$, $A(k)=A_k$ として

$$X^l(j+\alpha,k) = \sum_{0\leq p<\tilde{N}_l} A(k+pN_l)W(j+\alpha)^{pN_l}, \qquad (7)$$

$0\leq j<\tilde{N}_l,\ 0\leq k<N_l,$

を定義すれば，これは次の漸化式にしたがう．

$X^n(\alpha,k)=A(k),$

$$X^{l-1}(j+t\tilde{N}_l+\alpha,k) = \sum_{0\leq s<r_l} X^l(j+\alpha,k+sN_{l-1})W(j+\alpha)^{sN_{l-1}} \times W\left(\frac{Nst}{r_l}\right), \qquad (8)$$

$0\leq t<r_l,\ 0\leq j<\tilde{N}_l,\ 0\leq k<N_{l-1},$

$l=n,n-1,\cdots,1,$

$X(j+\alpha)=X^0(j+\alpha,0).$

すなわち初期値を $A(k)$ として演算回数 $N(r_1+r_2+\cdots r_n)$ によって結果 $X(j+\alpha)$ を得る．

上式において $X^{l-1}(\cdot,\cdot)$ を与えて $X^l(\cdot,\cdot)$ に関して解けば

$X^0(j+\alpha,0)=X(j+\alpha),$

$$X^l(j+\alpha,k+sN_{l-1}) = \overline{W}(j+\alpha)^{sN_{l-1}}\sum_{0\leq t<r_l} X^{l-1}(j+t\tilde{N}_l+\alpha,k) \times\overline{W}\left(\frac{Nst}{r_l}\right), \qquad (9)$$

$0<s\leq r_l,\ 0\leq j<\tilde{N}_l,\ 0\leq k<N_{l-1},$

$l=1,2,\cdots,n,$

$A(k)=X^n(\alpha,k)/N,$

となる．ただし $X^l(\cdot,\cdot)$ に定数 $1/r_l$ をかけることは省略した．

(9), (8) は，それぞれ $\{X(j+\alpha)\}$ の離散型フーリエ変換，逆変換を与える．

FFT テーブル $\{X^l(j+\alpha,k)\}$ の元を入力データを用いて表現すれば

$$X^l(j+\alpha,k)=\sum_{0\leq q<N_l} X(j+q\tilde{N}_l+\alpha) \times\overline{W}(j+q\tilde{N}_l+\alpha)^k, \qquad (10)$$

$0\leq j<\tilde{N}_l,\ 0\leq k<N_l,$

となる．

証明はすべて略したが，三角関数の周期性に注意すればできる．

3. 入力データの性質と FFT テーブル

入力データの性質が FFT テーブルにどのように保存されているかをみることにする．

入力データが実数ならば

$X^l(j+\alpha,0)$; 実数,

$$X^l(j+\alpha,N_l-k) = \overline{X}^l(j+\alpha,k)\overline{W}(j+\alpha)^{N_l},\ k>0, \qquad (11)$$

が成り立つ．

以下では，入力データの対称性を考えるので，添字の集合 $\{j+\alpha\}$ は，$j+\alpha$ と $N-(j+\alpha)$ を同時に含むものとする．したがって $\alpha=0$ あるいは 1/2 でなければならない．入力データが Hermite 対称，すなわち

$X(N-j-\alpha)=\overline{X}(j+\alpha),$

ならば

$$X^l(\tilde{N}_l-j-\alpha,k)=\overline{X}^l(j+\alpha,k), \qquad (12)$$

が成り立つ．

入力データが Hermite 歪対称，すなわち

$$X(N-j-\alpha)=-\bar{X}(j+\alpha),$$

ならば

$$X^l(\tilde{N}_l-j-\alpha,k)=-\bar{X}^l(j+\alpha,k). \qquad (13)$$

いずれも(10)を用いて証明できる．

入力データが実数かつ Hermite 対称ならば (11), (12) が同時に成り立つ．実数かつ Hermite 歪対称ならば (11), (13) が成り立つことはいうまでもない．このように FFT テーブルに対称性がある場合高速フーリエ変換法(9)において添字 j,k の動く範囲を，それぞれ半分にできる．

4. 中点公式による高速フーリエ変換

$N=2^n$ の場合についてだけ述べる．

a) 入力データが複素数の場合

$$X^0\left(j+\frac{1}{2},0\right)=X\left(j+\frac{1}{2}\right),$$

$$X^l\left(j+\frac{1}{2},k\right)=X^{l-1}\left(j+\frac{1}{2},k\right)+X^{l-1}\left(j+\tilde{N}_l+\frac{1}{2},k\right),$$

$$X^l\left(j+\frac{1}{2},k+N_{l-1}\right)=\bar{W}\left(j+\frac{1}{2}\right)^{N_{l-1}}\left\{X^{l-1}\left(j+\frac{1}{2},k\right)-X^{l-1}\left(j+\tilde{N}_l+\frac{1}{2},k\right)\right\},$$

$$0\leq j<\tilde{N}_l,\quad 0\leq k<N_{l-1},\quad l=1,2,\cdots,n,$$

$$B(k)=X^n\left(\frac{1}{2},k\right)\Big/N,$$

複素数乗算回数は $\dfrac{N}{2}\log_2 N$.

b) 実数の場合

$$X^2\left(j+\frac{1}{2},0\right)=X\left(j+\frac{1}{2}\right)+X\left(j+\frac{N}{4}+\frac{1}{2}\right)+X\left(j+\frac{N}{2}+\frac{1}{2}\right)+X\left(j+\frac{3}{4}N+\frac{1}{2}\right),$$

$$X^2\left(j+\frac{1}{2},2\right)W\left(j+\frac{1}{2}\right)^2=X\left(j+\frac{1}{2}\right)-X\left(j+\frac{N}{4}+\frac{1}{2}\right)+X\left(j+\frac{N}{2}+\frac{1}{2}\right)-X\left(j+\frac{3}{4}N+\frac{1}{2}\right),$$

$$X^2\left(j+\frac{1}{2},1\right)=\bar{W}\left(j+\frac{1}{2}\right)\left\{X\left(j+\frac{1}{2}\right)-X\left(j+\frac{N}{2}+\frac{1}{2}\right)+\bar{W}\left(\frac{N}{4}\right)\left(X\left(j+\frac{N}{4}+\frac{1}{2}\right)-X\left(j+\frac{3}{4}N+\frac{1}{2}\right)\right)\right\},$$

$$X^l\left(j+\frac{1}{2},0\right)=X^{l-1}\left(j+\frac{1}{2},0\right)+X^{l-1}\left(j+\tilde{N}_l+\frac{1}{2},0\right),$$

$$X^l\left(j+\frac{1}{2},N_{l-1}\right)W\left(j+\frac{1}{2}\right)^{N_{l-1}}=X^{l-1}\left(j+\frac{1}{2},0\right)-X^{l-1}\left(j+\tilde{N}_l+\frac{1}{2},0\right),$$

$$X^l\left(j+\frac{1}{2},k\right)=X^{l-1}\left(j+\frac{1}{2},k\right)+X^{l-1}\left(j+\tilde{N}_l+\frac{1}{2},k\right),$$

$$X^l\left(j+\frac{1}{2},N_{l-1}-k\right)=\bar{W}\left(j+\frac{1}{2}\right)^{N_{l-1}}\left\{\bar{X}^{l-1}\left(j+\frac{1}{2},k\right)-\bar{X}^{l-1}\left(j+\tilde{N}_l+\frac{1}{2},k\right)\right\},$$

$$X^l\left(j+\frac{1}{2},\frac{N_{l-1}}{2}\right)=\bar{W}\left(j+\frac{1}{2}\right)^{\frac{N_{l-1}}{2}}\left\{X^{l-1}\left(j+\frac{1}{2},\frac{N_{l-1}}{2}\right)\times W\left(j+\frac{1}{2}\right)^{\frac{N_{l-1}}{2}}+\widetilde{W}\left(\frac{N}{4}\right)\times X^{l-1}\left(j+\tilde{N}_l+\frac{1}{2},\frac{N_{l-1}}{2}\right)\times W\left(j+\tilde{N}_l+\frac{1}{2}\right)^{\frac{N_{l-1}}{2}}\right\},$$

$$0\leq j<\tilde{N}_l,\quad 0<2k<N_{l-1},\quad l=3,4,\cdots,n,$$

$$B(k)=X^n\left(\frac{1}{2},k\right)\Big/N.$$

$l=3$ から始めたので初期値の設定が少し複雑になったが次の利点がある．

演算回数を $N(\log_2 N-1)/4$ とできる．

$l=1$ から始めると最初だけ $N_{l-1}/2$ を含む式を用いてはならない．$l=2$ から始めると $0<2k<N_1$ をみたす k は存在しない．l を3から始めると，これらの条件をプログラムにおいて，いちいち判定する必要がないからである．

c）Hermite 対称の場合

$$X^0\left(j+\frac{1}{2},0\right)=X\left(j+\frac{1}{2}\right),$$

$$X^l\left(j+\frac{1}{2},k\right)=X^{l-1}\left(j+\frac{1}{2},k\right)+\bar{X}^{l-1}\left(\tilde{N}_l-j-\frac{1}{2},k\right),$$

$$X^l\left(j+\frac{1}{2},k+N_{l-1}\right)=\bar{W}\left(j+\frac{1}{2}\right)^{N_{l-1}}\left\{X^{l-1}\left(j+\frac{1}{2},k\right)-\bar{X}^{l-1}\left(\tilde{N}_l-j-\frac{1}{2},k\right)\right\},$$

$$0\le 2j<\tilde{N}_l,\ 0\le k<N_{l-1},\ l=1,2,\cdots,n-1,$$

$$B(k)=2\,\mathrm{Re}\,X^{n-1}\left(\frac{1}{2},k\right)\Big/N,$$

$$B\left(\frac{N}{2}+k\right)=2\,\mathrm{Im}\,X^{n-1}\left(\frac{1}{2},k\right)\Big/N.$$

d）Hermite 歪対称の場合

$$X^0\left(j+\frac{1}{2},0\right)=X\left(j+\frac{1}{2}\right),$$

$$X^l\left(j+\frac{1}{2},k\right)=X^{l-1}\left(j+\frac{1}{2},k\right)-\bar{X}^{l-1}\left(\tilde{N}_l-j-\frac{1}{2},k\right),$$

$$X^l\left(j+\frac{1}{2},k+N_{l-1}\right)=\bar{W}\left(j+\frac{1}{2}\right)^{N_{l-1}}\left\{X^{l-1}\left(j+\frac{1}{2},k\right)+\bar{X}^{l-1}\left(\tilde{N}_l-j-\frac{1}{2},k\right)\right\},$$

$$0\le 2j<\tilde{N}_l,\ 0\le k<N_{l-1},\ l=1,2,\cdots,n-1.$$

結果は虚数であるので $iB(k)$ の形で表わす.

$$iB(k)=2i\,\mathrm{Im}\,X^{n-1}\left(\frac{1}{2},k\right),$$

$$iB\left(\frac{N}{2}+k\right)=-2i\,\mathrm{Re}\,X^{n-1}\left(\frac{1}{2},k\right).$$

演算回数は b), c), d) いずれも同じである.

e）実数かつHermite 対称の場合（cosine 変換）

$$X^2\left(j+\frac{1}{2},0\right)=\left\{X\left(j+\frac{1}{2}\right)+X\left(\frac{N}{2}-j-\frac{1}{2}\right)\right\}+\left\{X\left(\frac{N}{4}+j+\frac{1}{2}\right)+X\left(\frac{N}{4}-j-\frac{1}{2}\right)\right\},$$

$$X^2\left(j+\frac{1}{2},2\right)W\left(j+\frac{1}{2}\right)^2=\left\{X\left(j+\frac{1}{2}\right)+X\left(\frac{N}{2}-j-\frac{1}{2}\right)\right\}-\left\{X\left(\frac{N}{4}+j+\frac{1}{2}\right)+X\left(\frac{N}{4}-j-\frac{1}{2}\right)\right\},$$

$$X^2\left(j+\frac{1}{2},1\right)=\bar{W}\left(j+\frac{1}{2}\right)\left\{X\left(j+\frac{1}{2}\right)-X\left(\frac{N}{2}-j-\frac{1}{2}\right)+\bar{W}\left(\frac{N}{4}\right)\left(X\left(\frac{N}{4}+j+\frac{1}{2}\right)-X\left(\frac{N}{4}-j-\frac{1}{2}\right)\right)\right\},$$

$$X^l\left(j+\frac{1}{2},0\right)=X^{l-1}\left(j+\frac{1}{2},0\right)+X^{l-1}\left(\tilde{N}_l-j-\frac{1}{2},0\right),$$

$$X^l\left(j+\frac{1}{2},N_{l-1}\right)W\left(j+\frac{1}{2}\right)^{N_{l-1}}=X^{l-1}\left(j+\frac{1}{2},0\right)-X^{l-1}\left(\tilde{N}_l-j-\frac{1}{2},0\right),$$

$$X^l\left(j+\frac{1}{2},k\right)=X^{l-1}\left(j+\frac{1}{2},k\right)+\bar{X}^{l-1}\left(\tilde{N}_l-j-\frac{1}{2},k\right),$$

$$X^l\left(j+\frac{1}{2},N_{l-1}-k\right)=\bar{W}\left(j+\frac{1}{2}\right)^{N_{l-1}}\left\{\bar{X}^{l-1}\left(j+\frac{1}{2},k\right)-X^{l-1}\left(\tilde{N}_l-j-\frac{1}{2},k\right)\right\},$$

$$X^l\left(j+\frac{1}{2},\frac{N_{l-1}}{2}\right)=\bar{W}\left(j+\frac{1}{2}\right)^{\frac{N_{l-1}}{2}}\left\{X^{l-1}\left(j+\frac{1}{2},\frac{N_{l-1}}{2}\right)\times W\left(j+\frac{1}{2}\right)^{\frac{N_{l-1}}{2}}-\bar{W}\left(\frac{N}{4}\right)X^{l-1}\left(\tilde{N}_l-j-\frac{1}{2},\frac{N_{l-1}}{2}\right)\times W\left(\tilde{N}_l-j-\frac{1}{2}\right)^{\frac{N_{l-1}}{2}}\right\},$$

$$0\le 2j<\tilde{N}_l,\ 0<2k<N_{l-1},\ l=3,4,\cdots,n-1,$$

$$B(0)=2X^{n-1}\left(\frac{1}{2},0\right)\Big/N,$$

$$B(k)=2\,\mathrm{Re}\,X^{n-1}\left(\frac{1}{2},k\right)\Big/N,$$

$$B\left(\frac{N}{2}-k\right)=-2\,\mathrm{Im}\,X^{n-1}\left(\frac{1}{2},k\right)\Big/N,$$

$$B\left(\frac{N}{4}\right)=\sqrt{2}\,X^{n-1}\left(\frac{1}{2},\frac{N}{4}\right)W\left(\frac{N}{8}\right)\Big/N,$$

$$B\left(\frac{N}{2}\right)=0.$$

f）実数かつ Hermite 歪対称の場合（sine 変換）

$$X^2\left(j+\frac{1}{2},0\right)$$
$$=\left\{X\left(j+\frac{1}{2}\right)-X\left(\frac{N}{2}-j-\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$+\left\{X\left(\frac{N}{4}+j+\frac{1}{2}\right)-X\left(\frac{N}{4}-j-\frac{1}{2}\right)\right\},$$

$$X^2\left(j+\frac{1}{2},2\right)W\left(j+\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=\left\{X\left(j+\frac{1}{2}\right)-X\left(\frac{N}{2}-j-\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$-\left\{X\left(\frac{N}{4}+j+\frac{1}{2}\right)-X\left(\frac{N}{4}-j-\frac{1}{2}\right)\right\},$$

$$X^2\left(j+\frac{1}{2},1\right)$$
$$=\overline{W}\left(j+\frac{1}{2}\right)\left\{X\left(j+\frac{1}{2}\right)+X\left(\frac{N}{2}-j-\frac{1}{2}\right)\right.$$
$$+\overline{W}\left(\frac{N}{4}\right)\left(X\left(\frac{N}{4}+j+\frac{1}{2}\right)\right.$$
$$\left.\left.+X\left(\frac{N}{4}-j-\frac{1}{2}\right)\right)\right\},$$

$$X^l\left(j+\frac{1}{2},0\right)=X^{l-1}\left(j+\frac{1}{2},0\right)$$
$$-X^{l-1}\left(\tilde{N}_l-j-\frac{1}{2},0\right),$$

$$X^l\left(j+\frac{1}{2},N_{l-1}\right)W\left(j+\frac{1}{2}\right)^{N_{l-1}}$$
$$=X^{l-1}\left(j+\frac{1}{2},0\right)+X^{l-1}\left(\tilde{N}_l-j-\frac{1}{2},0\right),$$

$$X^l\left(j+\frac{1}{2},k\right)=X^{l-1}\left(j+\frac{1}{2},k\right)$$
$$-\overline{X}^{l-1}\left(\tilde{N}_l-j-\frac{1}{2},k\right),$$

$$X^l\left(j+\frac{1}{2},N_{l-1}-k\right)$$
$$=\overline{W}\left(j+\frac{1}{2}\right)^{N_{l-1}}\left\{\overline{X}^{l-1}\left(j+\frac{1}{2},k\right)\right.$$
$$\left.+X^{l-1}\left(\tilde{N}_l-j-\frac{1}{2},k\right)\right\},$$

$$X^l\left(j+\frac{1}{2},\frac{N_{l-1}}{2}\right)$$
$$=\overline{W}\left(j+\frac{1}{2}\right)^{\frac{N_{l-1}}{2}}\left\{X^{l-1}\left(j+\frac{1}{2},\frac{N_{l-1}}{2}\right)\right.$$
$$\times W\left(j+\frac{1}{2}\right)^{\frac{N_{l-1}}{2}}$$
$$+\overline{W}\left(\frac{N}{4}\right)X^{l-1}\left(\tilde{N}_l-j-\frac{1}{2},\frac{N_{l-1}}{2}\right)$$
$$\left.\times W\left(\tilde{N}_l-j-\frac{1}{2}\right)^{\frac{N_{l-1}}{2}}\right\},$$

$0\leq 2j<\tilde{N}_l$, $0<2k<N_{l-1}$, $l=3,4,\cdots,n-1$,

$B(0)=0$,

$$iB(k)=2i\,\mathrm{Im}\,X^{n-1}\left(\frac{1}{2},k\right)\Big/N,$$

$$iB\left(\frac{N}{2}-k\right)=-2i\,\mathrm{Re}\,X^{n-1}\left(\frac{1}{2},k\right)\Big/N.$$

$$iB\left(\frac{N}{4}\right)=-\sqrt{2}\,i\,X^{n-1}\left(\frac{1}{2},\frac{N}{4}\right)W\left(\frac{N}{8}\right)\Big/N,$$

$$iB\left(\frac{N}{2}\right)=-2i\,X^{n-1}\left(\frac{1}{2},0\right)\Big/N.$$

e), f) の演算回数は $(N/8)\times(\log_2 N-2)$, $(\log_2 N\geq 4)$ である．

プログラム上の若干の注意について述べる．

三角関数表 $\{W(\cdot)\}$ の索引の回数を少なくするため添字を動かす順序は，内側のループから k, j, l とする．こうすれば k を動かすときにいちいち表を引く必要がないからである．

高速 sine 変換，cosine 変換の場合についてだけデータの記憶法について述べる．入力データは実数かつ対称だから独立な標本の個数は $N/2$ である．$N/2$ 語を用いて FFT テーブルを表わす．

$$X^l\left(j+\frac{1}{2},0\right)=X^l(j+1),$$

$$\mathrm{Re}\,X^l\left(j+\frac{1}{2},k\right)=X^l(k\tilde{N}_l+j+1),$$

$$\mathrm{Im}\,X^l\left(j+\frac{1}{2},k\right)=X^l(k\tilde{N}_l-j),$$

$$X^l\left(j+\frac{1}{2},\frac{N_l}{2}\right)W\left(j+\frac{1}{2}\right)^{N_l/2}=X^l\left(\frac{N}{2}-j\right),$$

$0\leq j<\tilde{N}_l/2$, $0<k<N_l/2$, $2\leq l<n-1$.

$X^{l-1}(\cdot,\cdot)$ の上に $X^l(\cdot,\cdot)$ を記憶することはできないから，さらに $N/2$ 語の場所をとって中間結果を記憶する．これによってプログラムを作成した[6]．

フーリエ逆変換の算法に関する記述は省略する．

5. 逐次近似方式の高速フーリエ変換

前節まで正整数 N と補間点を与えて，周期関数 $X(t)$ の $N-1$ 次の三角補間多項式をつくることにつ

いて述べた．ここでは，あらかじめ誤差限界 $\varepsilon>0$ を与えて補間式の列をつくり項数 $N(\varepsilon)$ をも機械的に決定したい．そのために $X(t)$ の解析的性質と算法が問題となる．

高速フーリエ変換の算法はいろいろあり得るので，目的に適した算法を見出すことが必要である．これには Romberg 積分の考え方が役立つ．すなわち標本点の個数を2倍に増しつつ台形公式による積分値の列をつくり出し，これを加速する方法である．実際には台形公式を用いるのは最初の一回だけで，後は繰返し中点公式を用いる．

関数 $X(t)$ の性質とフーリエ係数の収束の速さについては多くの結果が知られている．

いま解析的周期関数 $X(t)$ を変数変換して

$$f(z)=X(t),\quad z=e^{it},$$

とおき，$f(z)$ の定義域を複素平面上の単位円周 $|z|=1$ を含むある円環領域で正則となるよう拡張する．原点を中心とする $f(z)$ の Laurent 展開を

$$f(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m z^m,$$

とする．各 a_m は $f(z)$ のフーリエ係数でもあるが，離散型フーリエ係数との関係はよく知られている（たとえば文献 7)）．中点公式あるいは台形公式によるフーリエ係数の定義（1），（3）と三角関数の選点直交式（5）から直接

$$B_k=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m a_{k+mN}, \tag{14}$$

$$C_k=\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{k+mN}, \tag{15}$$

を得る．いま便宜上 N を偶数とする．$C_{N-k}=C_{-k}$ に注意しつつ $f(z)$ を

$$p(z)=\sum_{k=-N/2}^{N/2}{}'' C_k z^k, \tag{16}$$

で近似すれば，誤差は

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-N/2}^{N/2}{}'' a_{k+mN}(z^{k+mN}-z^k), \tag{17}$$

となる．ここで Σ'' は初項と最後の項だけ 1/2 倍して和をとることを意味する．したがって単位円周上における $p(z)$ の絶対誤差は，次式で評価される．

$$|f(z)-p(z)|\le|a_{N/2}|+|a_{-N/2}| +2\sum_{k>N/2}(|a_k|+|a_{-k}|). \tag{18}$$

いま考えている円環領域で $f(z)$ が有界ならば，$\{a_k\}$ は等比数列の速さで0に収束するので N さえ大きくとれば $f(z)$ を $p(z)$ で，いかほどでも精密に近似できる．

近似度は (18) の最初から2項程とれば，通常十分であろう．われわれは $\{C_k\}$ しか知り得ないので $p(z)$ の近似度を

$$2\left\{|C_{N/2-1}|+|C_{N/2+1}|+\frac{1}{2}|C_{N/2}|\right\},$$

によって評価する．

誤差限界 $\varepsilon>0$ に対し，項数 $N(\varepsilon)$ を定めるための機械的収束の判定法として

$$2\left\{|C_{N/2-1}|+|C_{N/2+1}|+\frac{1}{2}|C_{N/2}|\right\}<\varepsilon, \tag{19}$$

を用いる．

つぎに単位円周上で $f(z)$ を補間式の列で逐次近似する算法について述べる．

$N=2^n$ のとき，（1）および（3）で定義される離散型フーリエ係数を，あらためて C_k^n, B_k^n とおけば

$$C_0^1=\frac{1}{2}(f(1)+f(-1)),$$

$$C_1^1=\frac{1}{2}(f(1)-f(-1)),$$

$$C_k^{n+1}=\frac{1}{2}(C_k^n+B_k^n),$$

$$C_{2^n+k}^{n+1}=\frac{1}{2}(C_k^n-B_k^n), \tag{20}$$

$$0\le k<2^n,\quad n=1,2,\cdots,$$

が成り立つ．これは $\{C_k^n\}$ に関する漸化式である．

収束の判定条件 (19) が満たされるまで n を増加する．

各段階においては，中点公式によるフーリエ変換が行なわれる．したがって $\{C_k^n\}$ を求めるために必要な複素数乗算回数は

$$\sum_{l=2}^{n-1} l2^{l-1}=N(\log_2 N-2)/2.$$

すなわち，この算法も一つの（台形公式による）高速フーリエ変換である．しかも $2^l(l=1,2,\cdots)$ を項数とする $X(t)$ の離散型フーリエ級数の列が得られることから，(20)を逐次近似方式による高速フーリエ変換あるいは単に逐似近似とよぶことにする．

$X(t)$ が実数値関数ならば，算法は省略するが，演算回数は半分となる．

高速 sine 変換，cosine 変換においては

$$\sum_{l=3}^{n-1} 2^l(l-2)/8=N(\log_2 N-4)/8+1,$$

の演算回数でよい．

6. 周期関数の積分

解析的周期関数 $f(\theta)$ のフーリエ級数は一様収束するので項別積分できる．$f(\theta)$ は実数値をとるものとする．

台形公式によるフーリエ変換によって

$$f(\theta)\simeq\sum_{k=0}^{N/2}{}''(\bar{C}_k e^{-ik\theta}+C_k e^{ik\theta}),$$

これを項別積分することによって

$$\int f(\theta)\,d\theta\simeq C_0\theta-\sum_{k=1}^{N/2-1}\frac{i}{k}(C_k e^{ik\theta}-\bar{C}_k e^{-ik\theta})+\frac{2}{N}C_{N/2}\sin\frac{N}{2}\theta. \qquad (21)$$

$[0,2\pi]$ における $f(\theta)$ の積分の収束の判定条件として

$$\frac{4}{N}\{2|C_{N/2-1}|+|C_{N/2}|\}<\varepsilon, \qquad (22)$$

を用いる．

これを満たすまで前節の逐次近似の手法によって N を増せば，約 $N/4\log_2 N$ の演算回数で実数値関数 $f(\theta)$ の積分が所要の精度で得られる．偶（奇）関数ならば $N/8\log_2 N$．半周期積分ならば奇数番目の係数だけ求めればよいので演算回数はさらに半分でよい．

解析的周期関数の積分の一例として楕円積分

$$F(\varphi,\alpha)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}},$$

の計算を行なった．被積分関数は偶関数だから cosine 級数に展開できる．被積分関数の基本周期は π だから cosine 級数は偶数次の項だけからなる．演算桁数は 10 桁（10 進法）で収束の判定定数 ε は $0.5\times10^{-8}\times\Sigma\,|C_k|$ とした．

被積分関数の cosine 級数は収束が速い（表 1）．そして精度もよい（表 2）．

以上のことから，楕円積分の計算法として，古典的な級数展開法も，逐次近似方式の高速 cosine 変換を用いれば再評価できるであろう．

7. 非周期関数の積分

開区間 (a,b) で定義された非周期関数 $f(x)$ の積分

$$\int_a^x w(x)f(x)\,dx, \qquad (23)$$

に前述の方法を応用する．ここで $w(x)$ は重み関数とよばれ (a,b) で正値かつ積分可能とする．

表 1 被積分関数の cosine 展開係数*

k	$\alpha=\pi/6$	$\alpha=\pi/3$
0	1.18034 0599	1.37288 0501
2	−0.20327 0793	−0.46436 3202
4	0.02618 9440	0.11666 4559
6	−0.00374 6838	−0.03248 7569
⋮	⋮	⋮
16	0.00000 0350	0.00008 4369
18	−0.00000 0057	−0.00002 6570
⋮	⋮	⋮
30	0.0	−0.00000 0031
32	0.0	0.00000 0018

* Coefficients of cosine series of the integrand

表 2 第 1 種楕円積分 (Elliptic integral of the first kind)

	$F(\varphi,\pi/6)$		$F(\varphi,\pi/3)$	
φ	computed	true	computed	true
$\pi/12$	0.26329 7086		0.26406 3548	
$\pi/6$	0.53562 2733	0.53562 273	0.54222 9109	0.54222 911
$\pi/4$	0.82601 7876		0.85122 3749	
$\pi/3$	1.14242 9058	1.14242 906	1.21259 6614	1.21259 661
$5\pi/12$	1.48788 4719		1.64917 8664	
$\pi/2$	1.85407 4677	1.85407 468	2.15651 5645	2.15651 565

あらかじめ $w(x)$ を

$$\int_a^b w(x)\,dx=\pi,$$

となるよう正規化し

$$\mu(x)=\int_a^x w(x)\,dx, \qquad (24)$$

を定義する．明らかに $\mu(a)=0$，$\mu(b)=\pi$ で $\mu(x)$ は単調増加だから，この逆関数は $(0,\pi)$ で一意的に定まる．これを

$$x=\phi(\theta),\quad(\theta=\mu(x)),$$

とおけば $\phi(\theta)$ は $(0,\pi)$ で単調増加であって

$$\lim_{\theta\to+0}\phi(\theta)=a,\quad \lim_{\theta\to\pi-0}\phi(\theta)=b$$

となる．

$\phi(\theta)$ の値域が (a,b) で，かつその基本周期が 2π となるよう定義域の拡張を考える．

可能ならば $\phi(\theta)$ の解析接続によって周期関数への拡張を行なう．例えば $\mu(x)$ が逆三角関数の主値となっているような場合である．$\phi(\theta)$ として，この三角関数そのものをとればよい．ただし $\phi(\theta)$ の基本周期が π ならば $\phi(\theta/2)$ を $\phi(\theta)$ と再定義し，つねに 2π が $\phi(\theta)$ の基本周期となるようにする．

ここでは，周期関数に拡張する一般的方法の記述にとどめる．

$\psi(\theta)$ が偶関数となるよう

$$\psi(\theta)=\psi(-\theta),\quad \theta\in(-\pi,0),$$

とした後，任意の θ に対し

$$\psi(\theta)=\psi(\theta-2\pi[(\theta+\pi)/2\pi]),$$

と $\psi(\theta)$ の定義域を拡張する．[・] は Gauss 記号．

$\psi(\theta)$ は，$f(x)$ の定義域を値域とし基本周期 2π の偶関数である．

そこで $f(x)$ に対し変数変換

$$x=\psi(\theta), \tag{25}$$

を行ない

$$F(\theta)=f(\psi(\theta)), \tag{26}$$

とおく．$\phi(\theta)$ が π の整数倍の点を除き，いたるところで定義されていることから，これらの点における $F(\theta)$ の値は極限値によって定義する．すなわち $F(\theta)$ は $(-\infty,\infty)$ における周期 2π の関数である．さらに，$F(\theta)$ が解析的周期関数ならば，離散型フーリエ展開が効果的に使える．求める積分は

$$\int_a^x w(x)f(x)dx=\int_0^\theta F(\theta)d\theta,\quad \theta=\mu(x) \tag{27}$$

と書けるから，偶関数 $F(\theta)$ を cosine 級数に展開し，その項別積分をすればよい．

以上において重み関数は固定して考えたが，$f(x)$ のある積分に対して形式的には重み関数は幾通りでも導入できる．なぜならば

$$\int_a^x f(x)dx=\int_a^x w(x)\left(\frac{f(x)}{w(x)}\right)dx$$
$$=\int_0^\theta F(\theta)\psi'(\theta)d\theta \tag{28}$$

と表わされるからである．$\psi(\theta)$ が偶関数ならば，この導関数 $\psi'(\theta)$ は奇関数だから $F(\theta)\psi'(\theta)$ に対して高速 sine 変換をほどこせばよい．

いずれにしても被積分関数のフーリエ級数の収束の速さは，その微分可能性に依存するもので $f(x)$ の解析的性質に応じて，いかなる重み関数（変数変換）を導入するかが問題である[8-10]．換言すれば (a,b) 上の補間点の極限分布 $\mu(x)/\pi$ をいかにとるかが，ここで述べた方法の成否を決定するといえる．

簡単ではあるが重要な例を二三あげる．もちろん考える積分は，すべて存在するものとする．また変数変換 $x=\psi(\theta)$ の代りに，便宜上 $x=\psi(\pi-\theta)$ を使うこともある．

例 1. $[-1,1]$ で解析的な関数 $f(x)$ の積分

$$\int_{-1}^x \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

を求める，重み関数は Chebyshev 多項式のそれと同じである．

まず

$$\mu(x)=\int_{-1}^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi-\mathrm{Cos}^{-1}x$$

を定める．$\mathrm{Cos}^{-1}x$ は $\cos^{-1}x$ の主値である．$\theta=\mu(x)$ とおき $\mathrm{Cos}^{-1}x=\pi-\theta$ の逆関数から $(0,\pi)$ で $-\cos\theta$ を得る．これを $(-\infty,\infty)$ に拡張して

$$\psi(\theta)=-\cos\theta.$$

$f(x)$ において，変数変換 $x=\psi(\pi-\theta)=\cos\theta$ を行なえば

$$F(\theta)=f(\cos\theta)$$

したがって

$$\int_{-1}^x \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_\theta^\pi F(\theta)d\theta.$$

被積分関数 $F(\theta)$ は解析的周期関数で偶関数であるから高速 cosine 変換と項別積分を行なえばよい．

例 2. $f(x)$ に関する仮定は上と同じとして

$$\int_{-1}^x f(x)dx$$

を求める．これを

$$\int_{-1}^x f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(\sqrt{1-x^2}f(x))=dx$$

と変形する．例 1 と同様にして

$$\int_{-1}^x f(x)dx=\int_\theta^\pi \sin\theta f(\cos\theta)d\theta$$

を得る．

被積分関数は奇関数だから sine 級数に展開される．

逐次近似方式による高速 sine 変換と項別積分を用いるわれわれの方法は Clenshaw と Curtis の方法[2]を“高速化”したものといってよいであろう．

例 3. $f(x)$ は無限遠点を含め，無限区間で解析的として

$$\int_{-\infty}^x \frac{f(x)}{1+x^2}dx$$

を求めよう．まず $\mu(x)$ を定める．

$$\mu(x)=\int_{-\infty}^x \frac{dx}{1+x^2}=\mathrm{Tan}^{-1}x+\frac{\pi}{2}.$$

ここで $\mathrm{Tan}^{-1}x$ は $\tan^{-1}x$ の主値とする．右辺を θ とおけば $(0,\pi)$ で $-\cot\theta$ が定義される．これを $(-\infty,\infty)$ に解析接続すればよい．ところで $\cot\theta$ の基本周期は π だから

$$\phi(\theta)=-\cot\frac{\theta}{2}$$

とする．変数変換 $x=\phi(\pi-\theta)=\tan\theta/2$ を用いれば，求める積分は

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\theta} f\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$

となる．無限遠点における $f(x)$ の正則性から被積分関数は解析的周期関数となる．

実際 $x=\tan\dfrac{\theta}{2}$ によって

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}=2.2214\ 41469\ 07918$$

の計算を行なったところ，前述の ε に対し被積分関数の cosine 級数の項数は 32 となり，この項別積分によって 2.2214 41468 を得た．

被積分関数に関する同一の仮定の下で，$x=\tan\theta$ の変数変換を行なうとき，台形公式が効果的であることは明らかにされている[10]．

例 4. 半無限区間において解析的な関数 $f(x)$ の積分

$$\int_0^x f(x)dx$$

を求める．端点 0, ∞ でも $f(x)$ は正則とする．

いま

$$x=\tan^2\frac{\theta}{2}$$

の変数変換を行なえば

$$\int_0^x f(x)dx=\int_0^{\theta} f\left(\tan^2\frac{\theta}{2}\right)\tan\frac{\theta}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}d\theta$$

となる．被積分関数は，周期 2π の奇関数だから sine 級数に展開される．

上述の例題によって，閉区間 $[a,b]$ で解析的な関数の積分は，容易に解析的周期関数の積分に帰着されることがわかった．

おわりに，開区間 (a,b) (a,b は，±∞ をとってもよい) で $f(x)$ が解析的で，端点 a,b が $f(x)$ の代数的特異点となっている場合について述べる．

例 5. $f(x)$ は $(0,1)$ で解析的で，端点は $f(x)$ の有限位の分岐点とする．積分

$$\int_0^x f(x)dx$$

を解析的周期関数の積分に変形できることを示す．

$x=0$ が $f(x)$ の $m-1$ 位の分岐点ならば，$x=0$ の近傍で，$f(x)$ は

$$f(x)=a_0+a_1\sqrt[m]{x}+a_2(\sqrt[m]{x})^2+\cdots\cdots,$$

と展開される．ただし $\sqrt[m]{x}$ は，正の実軸上で正となる分枝をとるものとする．

いま，変数変換

$$x=\sin^{2m}\frac{\theta}{2}$$

を行なえば，$\theta=0$ の近傍で $f(\sin^{2m}\theta/2)$ は解析的となる．$x=1$ の場合も同様なことがいえる．すなわち $f(\sin^{2m}\theta/2)$ は，周期 2π の解析関数である．

したがって求める積分は

$$\frac{m}{2}\int_0^{\theta} f\left(\sin^{2m}\frac{\theta}{2}\right)\sin^{2(m-1)}\frac{\theta}{2}\sin\theta\, d\theta$$

と表わされる．いうまでもなく，被積分関数は解析的周期関数で奇関数だから sine 級数に展開される．

逐次近似方式の高速 sine 変換を用いて，定積分

$$\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}+x^{-\alpha}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi},\quad 0<\alpha<1,$$

の数値計算を行なった（表 3）．展開項数は $N/2$．

ただし $x=0$ を代数的特異点としたので，α は有理数でなければならない．とくに $\alpha=1/m$ ならば，

$$x=\sin^{2m}\frac{\theta}{2}$$

の変数変換を用いる．

表 3　例 5 の計算結果*

α	$N/2$	Computed	true
1/2	16	3.14159 2654	3.14159 2654
1/3	16	3.62759 8728	3.62759 8728
1/4	32	4.44288 2940	4.44288 2938

* Computation of the integration $\int_0^1\frac{x^{\alpha-1}+x^{-\alpha}}{1+x}dx$

例 6. $f(x)$ は $(0,\infty)$ で解析的で，端点の少なくとも一方を有限位の分岐点とする．積分

$$\int_0^x f(x)dx$$

において，変数変換

$$x=\tan^{2m}\frac{\theta}{2}$$

を行なえば，例 5 の場合と同様な議論によって，解析的周期関数の積分

$$m\int_0^{\theta} f\left(\tan^{2m}\frac{\theta}{2}\right)\tan^{2m-1}\frac{\theta}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}d\theta$$

に変形できる．

本論文を城　憲三先生の古稀の祝に捧げる．

参考文献

1) 鳥居達生：入力データの対称性を用いた高速フーリエ変換法，情報処理 15, pp. 516～523 (1974).
2) Clenshaw, C. W. and Curtis, A. R.: A Method for Numerical Integration on an Automatic Computer, Numer. Math. 2, pp. 197～205 (1960).
3) Imhof, J. P.: On the Method for Numerical Integration of Clenshaw and Curtis, Numer. Math. 5, pp. 138～141 (1963).
4) Oliver, J.: A Practical Strategy for the Clenshaw-Curtis Quadrature Method, J. Inst. Maths. Applics. 8, pp. 53～56 (1971).
5) 鳥居達生，牧之内三郎：チエビシェフ補間多項項式による関数の逐次近似，情報処理，9, pp. 143～147 (1968).
6) 鳥居達生，入沢 実：中点公式による高速 sine 変換，cosine 変換，情報処理，15, pp. 717～718 (1974).
7) 吉沢 正：数値解析 II，第 4 章，岩波講座，基礎工学 4 (1968).
8) Oliveira-Pinto, F.: Generalised Chebyshev Polynomials and their Use in Numerical Approximation, The Computer Journal, 16, pp. 375～379 (1973).
9) 森 正武：数値解析，第 4, 5 章，共立数学講座 (1973).
10) Takahasi, H. and Mori, M.: Quadrature Formulas Obtained by Variable Transformation, Numer. Math. 21, pp. 206～219 (1973).

(昭和 49 年 3 月 16 日受付)
(昭和 49 年 7 月 22 日再受付)