論　文

Aitken の δ^2- 過程について*

井 口　健**

Abustract

This paper is concerned with the Aitken's δ^2-process and similar process. The Aitken's δ^2-process is not always successful for the sequence converging linearly.

We develop the general theory of the Aitken's δ^2-process, and we deriue effective process even when the Aitken's δ^2-process fails.

As an example of these processes, we consider an application to finding the absolutely largest eigenvalue by the power method. Some test matrices aregiuer.

1. 序論

数例 $\{x_i\}$ を漸近的に収束する数例とし，その極限値を x とする．そのとき，x_i は i 番目の数を表わし一般には複素数である．

数列 $\{x_i\}$ は

$$x_p = x + \sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i t_i^p \tag{1}$$

を満たすと仮定する．ここに，p は任意の自然数で，$\bar{c}_i$, $i=1,2,\cdots,n$ は定数である．t_i, $i=1,2,\cdots,n$ は，一般には複素数であって，関係式

$$1>|t_1|>|t_2|\geqq|t_3|\geqq\cdots\geqq|t_n| \tag{2}$$

を満たすものである．

(1)式から，容易に

$$x_{p+1} = x + \sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i t_i^{p+1} \tag{3}$$

を得る．

(1)式と(3)式とから

$$x - x_{p+1} = t_1(x - x_p) + \bar{\varepsilon}_p \tag{4}$$

を得る．ここに，

$$\bar{\varepsilon}_p = \sum_{i=2}^{n} \bar{c}_i (t_1 - t_i) t_i^p \tag{5}$$

である．ここで，(5)式からわかるように，$p\to\infty$ のとき，漸近的に $|\bar{\varepsilon}_p|\to 0$ である．

(4)式は

$$x - x_{p+1} = t(x - x_p) \tag{6}$$

と同値である．ここに，$|t|<1$ で，かつ，$p\to\infty$ のとき，漸近的に $t\to t_1$ である．

(6)式から，数列 $\{x_i\}$ は漸近的に線形収束することがわかる(例えば，[7].)．

そのとき，連続する，3つの近似値，x_p, x_{p+1}, x_{p+2} から，x の近似値 $\bar{x}$ を

$$\bar{x} = x_{p+2} - (x_{p+2} - x_{p+1})^2/(x_{p+2} - 2x_{p+1} + x_p) \tag{7}$$

で計算することが出来る．

(4)式が誤差 $\bar{\varepsilon}_p$ を持っているので，この操作を数回繰り返さなければ，極限値 x に収束しない．

この加速過程は，Aitken の δ^2-過程と呼ばれている．(例えば，[4]，[7]等.)．

さて，

$$t = (x_{p+2} - x_{p+1})/(x_{p+1} - x_p) \tag{8}$$

と置くと，(7)式は

$$\bar{x} = x_{p+2} + (t^2/(1-t^2))(x_{p+2} - x_p) \tag{9}$$

と書き直すことが出来る．

(9)式の表現は，2章で述べるように，t が(8)式で定義されたとき，$\bar{x}$ が数列 $\{x_i\}$ の一つの極限値になっていることを表わしている．

(1)式で，$|t_2|$ が $|t_1|$ に比較して，かなり小さい場合には，従って，$|\bar{\varepsilon}_p|$ が比較的小さい場合には，(6)式の t は t_1 に急速に漸近収束する．そのとき，(7)式を使用すると収束はきわめて速い．しかし，$|t_2|$ が比較的大きい場合には，従って，$|\bar{\varepsilon}_p|$ が比較的大きい場合には，t は t_1 にゆっくり漸近的に収束する．このようなとき，(7)式を使用すると，かえっ

* On the Aitken's σ^2-process, by Ken IGUCHI (Faculty of General Education Toyota Technical College)

** 豊田工業高等専門学校一般学科

て，収束が悪くなることがある．最悪の場合には，極限値 x から遠い所で振動することさえある．

ここでは，Aitken の δ^2-過程の，ある意味での一般論を展開する．そして，$|t_1|$ に比較して，$|t_2|$ がかなり大きい場合，従って，$|\varepsilon_p|$ が比較的大きい場合でも，効果的な加速過程を導く．それらは

$$\bar{x} \simeq x_{p+2} + t^2(x_{p+2} - x_p) \tag{10}$$

$$\bar{x} \simeq x_{p+2} + (t^2 + t^4)(x_{p+2} - x_p) \tag{11}$$

などである．

(9)式の加速係数，$t^2/(1-t^2)$ は級数 $t^2, t^2+t^4, t^2+t^4+t^6, \cdots\cdots,$ の極限値として表わされる．従って，(10)，(11)式の加速係数の極限値になっている．このことについては，2章で述べる．3章では，これらの加速過程の応用例の一つとして，絶対値最大の固有値をベキ乗法 (power method) によって求める問題を考える．4章では3章の方法を用いた実験例を示す．

2. Aitken の δ^2- 過程と類似の加速過程

数列 $\{x_i\}$ は(1)式によって定義された漸近的に収束する数列である．

(3)式から(1)式を辺々引くと

$$x_{p+1} - x_p = c_1 t^{p+1} + \varepsilon_p \tag{12}$$

を得る．ここに，

$$c_i = \bar{c}_i(t_i - 1)/t_i \tag{13}$$

$$\varepsilon_p = \sum_{i=2}^{n} c_i t_i^{p+1} \tag{14}$$

である．

(14)式から，$p \to \infty$ のとき，漸近的に $|\varepsilon_p| \to 0$ である．さらに，(5)式から(14)式を辺々引くと

$$\bar{\varepsilon}_p - \varepsilon_p = \sum_{i=2}^{n} \bar{c}_i(1 - 2t_i + t_1)t_i^p \tag{15}$$

を得る．

(15)式において，$p \to \infty$ とすると $\bar{\varepsilon}_p \to \varepsilon_p$ となる．

さて，(12)式は次のように書き直すことが出来る．

補助定理 1 c_1 をある定数とするとき，任意の自然数 p に対して

$$x_{p+1} = x_p + c_1 t^{p+1} \tag{16}$$

が成立する．ここに，t に p よって変化する数であって，$|t|<1$，かつ $p \to \infty$ のとき，漸近的に $t \to t_1$ である．

補助定理1を繰り返し使うと容易に次の結果を得る

補助定理 2 任意の自然数 m と p とに対して

$$x_{p+m} = x_p + c_1 t^{p+1}\left(\sum_{i=0}^{m-1} t^i\right) \tag{17}$$

$$= x_p + c_1 t^{p+1}((1 - t^{n-m})/(1-t)) \tag{18}$$

が成立する．

補助定理1と補助定理2を使うと，容易に次の結果を得る．

$$x_{p+m} = x_p + c_1 t^{p+1}\left(\sum_{i=0}^{m-1} t^i\right) \tag{19}$$

$$x_{p+m} = x_{p+m-1} + c_1 t^{p+m} \tag{20}$$

同様にして，$n>m$ となる自然数 n に対して

$$x_{p+n} = x_{p+m} + c_1 t^{p+m+1}((1 - t^{n-m})/(1-t)) \tag{21}$$

を得る．

(19)式を(20)式で辺々割って，その結果を c と置くと

$$c = (x_{p+m} - x_p)/(x_{p+m} - x_{p+m-1}) = \sum_{i=0}^{m-1} t^i / t^{m-1} \tag{22}$$

を得る．

(22)式を書き直して

$$(1-c)t^{m-1} + \sum_{i=0}^{m-2} t^i = 0 \tag{23}$$

を得る．

(19)式を使って(21)式の c_1 を消去すると

$$x_{p+n} = x_{p+m} + (t^m(1 - t^{n-m})/(1 - t^m)(x_{p+m} - x_p) \tag{24}$$

を得る．

これらの結果をまとめると次の定理を得る．

定理 $n > m \geqq 2$ となる，任意の自然数 p, m, n に対して

$$x_{p+n} = x_{p+m} + (t^m(1 - t^{n-m})/(1 - t^m))(x_{p+m} - x_p) \tag{25}$$

が成立する．このとき，t は方程式

$$(1-c)t^{m-1} + \sum_{i=0}^{m-2} t^i = 0 \tag{26}$$

の根で，絶対値が1より小さい，唯一の根を取るものとする．

ここに，

$$c = (x_{p+m} - x_p)/(x_{p+m} - x_{p+m-1}) \tag{27}$$

である．

(25)式で $n \to \infty$ とすると

$$\bar{x} = x_{p+m} + (t^m/(1 - t^m))(x_{p+m} - x_p) \tag{28}$$

を得る．

さきに得た定理に，k を2以上の自然数として，$m=1$，$n=2k$ とおくと

$$x_{p+2k} = x_{p+2} + \left(\sum_{i=1}^{k-1} t^{2i}\right)(x_{p+2} - x_p) \tag{29}$$

を得る．

これらの結果をまとめると次のようになる．

系１ $m\geqq 2$ となる，任意の自然数 p, m に対して

$$\bar{x}=x_{p+m}+(t^m/(1-t^m))(x_{p+m}-x_p) \tag{30}$$

が成立する．このとき，t は(26)，(27)式によって定義されるものである．

系２ 任意の自然数 p と $k(\geqq 2)$ に対して

$$x_{p+2k}=x_{p+2}+\left(\sum_{i=1}^{k-1}t^{2i}\right)(x_{p+2}-x_p) \tag{31}$$

が成立する．ここに，

$$t=(x_{p+2}-x_{p+1})/(x_{p+1}-x_p) \tag{32}$$

である．

系１に於いて，$m=2$ とおくと

$$\bar{x}=x_{p+2}+(t^2/(1-t^2))(x_{p+2}-x_p) \tag{33}$$

を得る．

(31)式で $k\to\infty$ とすると

$$\bar{x}=x_{p+2}+(t^2/(1-t^2))(x_{p+2}-x_p) \tag{34}$$

を得る．ここに，t は(32)式によって定義されたものである．従って，Aitken の δ^2- 過程は(31)式の極限値になっていることがわかる．

(31)式に於いて，$k=2$，$k=3$ とおくと，各々，(10)，(11)式を得る．

3. 加速過程の応用例

２章で述べた加速過程の応用例の一つとしてベキ乗法を使用して，行例の絶対値最大の固有値を求める問題を考える．そのとき，絶対値に於いて，２番目に大きい固有値が最大の固有値に接近している場合には，収束がきわめて悪い．このようなとき，Aitken の δ^2-過程を使用して，収束を加速することが出来る（例えば，［２］，［４］，［５］，［８］等.）．

以下，ベキ乗法の収束を加速する方法を述べる．

行列 A は n 次元正方行列であるとし，かつ，実対称であると仮定する．

行列 A の固有値を λ_i，$i=1,2,\cdots,n$ で表わし，それに対応する固有ベクトルを $v_i, i=1,2,\cdots,n$ で表わし，その成分を $v_i^{(j)}, i=1,2,\cdots,n$; $j=1,2,\cdots,n$ で表わす．

そのとき，関係式

$$|\lambda_1|>|\lambda_2|>|\lambda_3|\geqq|\lambda_4|\geqq\cdots\geqq|\lambda_n| \tag{35}$$

が成立するものとする．

さて，初期ベクトルを u_0 とすると

$$u_0=\sum_{i=1}^{n}a_iv_i \tag{36}$$

と表わすことが出来る．

u_0 に A を p 回作用すると

$$A^pu_0=\lambda_1^p\sum_{i=1}^{n}a_i(\lambda_i/\lambda_1)^pv_i \tag{37}$$

を得る．

(37)式を λ_1^p で割って，その結果を u_p で表わし，置換 $\lambda_i/\lambda_1=t_{i-1}$，$i=2,3,\cdots,n$ を行うと

$$u_p=a_1v_1+\sum_{i=2}^{n}(a_iv_i)t_{i-1}^p \tag{38}$$

を得る．そのとき，t_{i-1}，$i=2, 3,\cdots, n$ は実数であって，関係式

$$1>|t_1|>|t_2|\geqq|t_3|\geqq\cdots\geqq|t_{n-1}| \tag{39}$$

が成立する．

従って，２章の定理の条件を満たすから定理が使える．

さて，行列 A を初期ベクトル u_0 に３回作用させると

$$A^ku_0=\lambda_1^k\sum_{i=1}^{n}a_iv_i(\lambda_i/\lambda_1)^k,\quad k=1,2,3 \tag{40}$$

を得る．

(40)式の $k=2,3$ の場合について，Rayley 商を作りその値を $\bar{\lambda}_1$ で表わすと

$$\bar{\lambda}_1=(A^3u_0, A^3u_0)/(A^2u_0, A^3u_0) \tag{41}$$

を得る．

そのとき，$\bar{\lambda}_1-\lambda_1=0((\lambda_2/\lambda_1)^6)$ であるから（例えば，［２］，［５］等.），λ_1 のかわりに，$\bar{\lambda}_1$ を用いても $0((\lambda_2/\lambda_1)^3)$ の精度は保証される．(40)式 $\bar{\lambda}_1^p$ で割ってその結果得られるベクトルを $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ で表わすと

$$\bar{u}_k=\sum_{i=1}^{n}a_iv_i(\lambda_i/\bar{\lambda}_1)^k,\quad k=1,2,3 \tag{42}$$

を得る．

このとき，ベクトル $\bar{u}_k$ の全ての成分に加速過程を適用すればよいのであるが，t の値は，いずれか一つの成分について計算すれば十分である．ここでは

$$t=(\bar{u}_3{}^{(r)}-\bar{u}_2{}^{(r)}/(\bar{u}_2{}^{(r)}-\bar{u}_1{}^{(r)}) \tag{43}$$

とする．ここに，r は r 成分を示し，関係式

$$\bar{u}_3{}^{(r)}\geqq\max(\bar{u}_3{}^{(i)}),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{44}$$

を満たすものである．

次に，全ての成分について，

$$u^{(i)}=\bar{u}_3{}^{(i)}+\omega(\bar{u}_3{}^{(i)}-\bar{u}_1{}^{(i)}),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{45}$$

を計算する．ここに，ω は，0，t^2，t^2+t^4，$t^2/(1-t^2)$ の中のいずれか一つを取るものとする．そのとき，$\omega=0$ は加速過程を適用しなかったときと同じである．(40)式から(45)式までの操作を $u_0{}^{(i)}=u^{(i)}$，$i=1, 2, \cdots, n$ と置いて，欲する精度になるまで繰り返えせば

よい．

この手続を実行する前に，$t_3:=\lambda_3/\lambda_2$ の大きさを何んらかの方法で見積ることによって，ω として，t^2, t^2+t^4, $t^2/(1-t^2)$ のいずれを取るかを決める必要がある．それには次のようにすればよい．

初期ベクトル u_0 に A を4回連続して作用させると

$$A^k u_0=\lambda_1^k \sum_{i=1}^{n} a_i v_i (\lambda_i/\lambda_1)^k, \quad k=1,\ 2,\ 3,\ 4 \qquad (46)$$

を得る．(46)式において $k=3,4$ のときのベクトルから Rayley 商を作りその値を $\bar{\lambda}_1$ とすると

$$\bar{\lambda}_1=(A^4u_0,\ A^4u_0)/(A^3u_0,\ A^4u_0) \qquad (47)$$

を得る．

(46)式を $\bar{\lambda}_1{}^k$ で割ると

$$\bar{u}_k=\sum_{i=1}^{n} a_i v_i (\lambda_i/\bar{\lambda}_1)^k, \quad k=1,2,3,4 \qquad (48)$$

を得る．

これらのベクトルの第 r 成分について次のような比を作り，それらを T_1, T_2, T_3 で表わすと

$$T_k=(\bar{u}_{k+1}{}^{(r)}-\bar{u}_k{}^{(r)})/(\bar{u}_k{}^{(r)}-\bar{u}_{k-1}{}^{(r)}), \quad k=1,2,3 \qquad (49)$$

を得る．

(48)式を(49)式に代入して

$$T_k \simeq (A(\lambda_2/\bar{\lambda}_1)^k+B(\lambda_3/\bar{\lambda}_1)^k)/(A(\lambda_2/\bar{\lambda}_1)^{k-1} + B(\lambda_3/\bar{\lambda}_1)^{k-1}) \simeq (\lambda_2/\bar{\lambda}_1)(1-(B/A)(\lambda_3/\lambda_2)^{k-1}), \quad k=1,2,3 \qquad (50)$$

ここに，$A=-a_1v_1{}^{(r)}(1-\lambda_2/\bar{\lambda}_1)$

$$B=-a_2v_2{}^{(r)}(1-\lambda_3/\bar{\lambda}_1) \qquad (51)$$

である．

いま，

$$T=(T_3-T_2)/(T_2-T_1) \qquad (52)$$

と定義する．

(52)式に(50)式を代入すると容易に

$$T\simeq\lambda_3/\lambda_2$$

を得る．

この T の大きさから ω を決定すればよい．ここでは，筆者の行った実験結果から次のように決める．

$0.9<|T|<1$ のとき $\omega=t^2$,

$0.4\leqq|T|\leqq0.9$ のとき $\omega=t^2+t^4$,

$0<|T|<0.4$ のとき $\omega=t^2/(1-t^2)$

ところで，(52)式は始めに1回計算するだけで十分であることに注意しよう．

4. 実験例

前章で述べた方法を，ω の値をいろいろ変えて，次の5例に対して適用したときの計算効果について比較検討する．計算は全べて有効数字 10 進で 7.8 桁の単精度演算を行った．計算機は名大の FACOM 230-60 を使用した．

全べての例に対して初期ベクトルとして，

$$x_0{}^T=(1,1,\cdots,1)$$

を取った．

例 1 [3].

$$A_1=\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 3 & 12 & -1 \\ 4 & -3 & -5 & -1 & 15 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1\fallingdotseq19.1754203$, $\lambda_2/\lambda_1\fallingdotseq0.824$, $\lambda_3/\lambda_2\fallingdotseq0.592$.

例 2.

$$A_2=\begin{pmatrix} 3.4 & 0.8 & -0.4 & 0.0 \\ 0.8 & 2.2 & 0.0 & 0.4 \\ -0.4 & 0.0 & 2.8 & -0.8 \\ 0.0 & 0.4 & -0.8 & 1.6 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1=4$, $\lambda_2/\lambda_1=0.75$, $\lambda_3/\lambda_2\fallingdotseq0.667$.

例 3 [3].

$$A_3=(a_{ij}),\quad a_{ij}=\begin{cases} 6, & |i=j| \\ 3, & |i-j|=1 \\ 1, & |i-j|=2 \\ 1, & |i-j|=3 \\ 0, & |i-j|>3 \end{cases}$$

$$a_{11}=a_{11,11}=5$$

$$a_{21}=a_{12}=a_{10,11}=a_{11,10}=2$$

$\lambda_1\fallingdotseq14.941819$, $\lambda_2/\lambda_1\fallingdotseq0.816$, $\lambda_3/\lambda_2\fallingdotseq0.724$.

例 4 [6].

$$A_4=\begin{pmatrix} 1.0 & 1.0 & 0.5 \\ 1.0 & 1.0 & 0.25 \\ 0.5 & 0.25 & 2.0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1\fallingdotseq2.5365258$, $\lambda_2/\lambda_1\fallingdotseq0.584$, $\lambda_3/\lambda_2\fallingdotseq-0.0112$.

例 5 [7].

$$A_5=\begin{pmatrix} 0.45 & 0.55 & 0.40 \\ 0.55 & 0.45 & -0.40 \\ 0.40 & -0.40 & 0.50 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1=1.0$, $\lambda_2/\lambda_1=-0.9$, $\lambda_3/\lambda_2\fallingdotseq-0.333$.

Table. 1 The absolutely largest eigenvalue of the matrix A_1 : $\lambda_1=19.1754203$

N.I.	N.A.	O	t^2	t^2+t^4	$t^2/(1-t^2)$
3	0	15.83796	15.83796	15.83796	15.83796
6	2	15.95399	18.38206	18.36523	15.87086
9	9	16.23291	19.15411	19.16870	16.02286
12	3	16.86787	19.17257	19.17508	16.41739
15	4	17.80773	19.17492	19.17503	18.06301

18	5	18.58001	19.17535	19.17538	17.46909
21	6	18.96264	19.17540	19.17541	16.42896
24	7	19.10557	19.17541	19.17542	18.10049
27	8	19.15317	19.17541		17.55771
30	9	19.16840	19.17542		16.54619

Table. 2 The absolutely largest eifenvalue of the matrix A_2: $\lambda_1=4.0$

N.I.	N.A.	O	t^2	t^2+t^4	$t^2/(1-t^2)$
3	0	3.761538	3.761538	3.761538	3.761538
6	1	3.958558	3.991149	3.990926	3.626782
9	2	3.992524	3.999470	3.999983	3.962684
12	3	3.998663	3.999966	3.999996	3.981387
15	4	3.999762	3.999998	3.999999	3.995772
18	5	3.999957	3.999999	4.000000	3.976531
21	6	3.999992	4.000000		3.549005
24	7	3.999998			3.971316
27	8	3.999999			3.999829
30	9	4.000000			3.999881

Table. 3 The absolutely largest eigenvalue of the matrix A_3: $\lambda_1=14.941819$

N.I.	N.A.	O	t^2	t^2+t^4	$t^2/(1-t^2)$
3	0	14.89679	14.89679	14.89679	14.89679
6	1	14.93992	14.94180	14.94109	14.93841
9	2	14.94173	14.94181	14.94172	14.94154
12	3	14.94181		14.94180	14.94178
15	4			14.94181	14.94181

Table. 4 The absolutely largest eigenvalue of the matrix A_4: $\lambda_1=2.5365258$

N.I.	N.A.	O	t^2	t^2+t^4	$t^2/(1-t^2)$
3	0	2.534182	2.534182	2.534182	2.534182
6	1	2.536433	2.536516	2.536525	2.536525
9	2	2.536522	2.536525		
12	3	2.536525			

Table. 5 The absolutely largest eigenvalue of the matrix A_5: $\lambda_1=1.0$

N.I.	N.A.	O	t^2	t^2+t^4	$t^2/(1-t^2)$
3	0	1.465038	1.465038	1.465038	1.465038
6	1	1.221964	1.220619	1.220612	1.220612
9	2	1.111839	1.106536	1.106268	1.106253
12	3	1.057840	1.050494	1.049690	1.049570
15	4	1.030306	1.022933	1.021631	1.021249
18	5	1.015986	1.009880	1.008476	1.007791
21	6	1.008462	1.004036	1.002926	1.002157
24	7	1.004488	1.001573	1.000888	1.000350
27	8	1.002382	1.000591	1.000242	1.000018
30	9	1.001265	1.000216	1.000061	1.000000

上の表で，N.I. は繰り返しの数を，N.A. は加速過程(46)式を使用した回数を表わす．

5. 結論

加速過程を用いて収束を加速するとき，その収束の速さは，比 t_2/t_1: $=\lambda_3/\lambda_2$ の大きさによって決まる．この大きさによって，加速係数 ω を変化させる方が，$\omega=t^2/(1-t^2)$ のみを使うよりはるかに収束が速い．

6. 謝辞

この拙論文に対し，査読者から有益な御助言を頂きましたことに深く感謝致します．

参考文献

1) A.C. Aitken; On Bernoullis numerical solution of algebraic equations. Proc. Royal, Soc. Edinburgh 46, 289–305 (1926).
2) V.N. Faddeeva; Computional Methods of Linear Algebra, Dover Publications, New York, 1959.
3) R.T. Gregory & D.L. Karney; A Collection of Matricese for Testing Computational Algorithms. Wiley-Interscience, New York, 1969.
4) 一松　信；数値解析，税務経理協会，1971.
5) B. Noble; Numerical Method: 1, Olver & Boyd, Edinburgh, 1964.
6) A. Ralston; A. First course in Numerical Analysis. McGraw-Hill, New York, 1965.
7) J.W. Schmidt; Asymptotische Einschliessung bei Konvergenz beschleunigenden Verfahren. Num. Maoh. 8, 105–113 (1966).
8) J.F. Traub; Iteratiue Methods for the Solutior of Equations. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1964.
9) J.H. Wilkinson; The Algebraic Eigenvalue Problem. Oxford University Press, London, 1965.

(昭和 49 年 1 月 9 日受付)
(昭和 49 年 2 月 14 日再受付)