

バイラテラルポアソンディスクサンプリングによる非等方点描画

胡 忠英[†] 井上 光平[†] 原 健二[†] 小野 直樹[†] 浦浜喜一[†]

[†]九州大学芸術工学研究院 〒815-8540 福岡市南区塩原 4-9-1

E-mail: †{hara,k-inoue,ono,urahama}@design.kyushu-u.ac.jp

あらまし ポアソンディスクサンプリング (PDS) による非等方点描画の生成法を提案する．PDS によって点を一様密度で配置して点描主義点描画を生成し，また入力画像の濃淡に応じた密度で点を配置してハーフトーニング点描画を生成する．本提案法が従来の非等方点描画法と異なる点は，従来法の 2 次形式距離に代わってバイラテラル距離を用いることであり，これにより各点を中心とする円が濃淡勾配に沿って歪み，入力画像の構造に即した点描画が得られる．カラー点描画への応用も示す．

キーワード ノンフォトリアリスティックレンダリング，非等方点描，バイラテラルポアソンディスクサンプリング，非等方ポロノイ分割

1. ま え が き

点描画は点描主義点描画とハーフトーニング点描画に大別される．点描主義点描画は，図 1 左 (Paul Signac の “Pink Clouds” の 1 部拡大) のように，ほぼ等サイズの点を隙間なく並べて描画する技法であり，ハーフトーニング点描画は図 1 右のように微小な点で濃淡を表現する手法である．点描主義点描画では点の密度はほぼ一様であるが各点には色が付いており，一方ハーフトーニング点描画では点の密度は場所で異なり，点は 1 色 (通常，白地に黒の点) である．

点描主義点描画を生成する NPR 技法としては，PDS による手法 [1] やポロノイ分割による方法 [2] などが，またハーフトーニング点描画についても同様に PDS による手法 [3] やポロノイ分割による方法 [4] が提案されている．

これらの PDS やポロノイ分割は空間的に等方であるが，非等方 PDS [5] や非等方ポロノイ分割 [6] も提案されており，等方的な PDS やポロノイ分割よりもエッジなどの画像構造の表現性が高い．

点の配置法としては PDS よりもポロノイ分割のほうが一様性が高いが，Lloyd 緩和法などの反復計算を要し，計算量は PDS のほうが少ない．

そこで本稿では，非等方 PDS による点描画の生成法

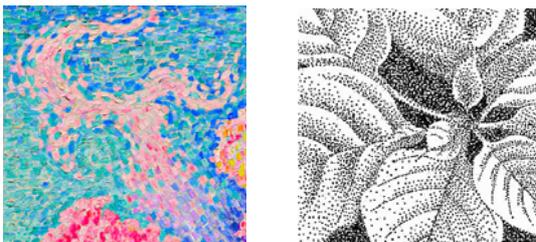


図 1 点 描 画

Fig.1 Stippling images.

を提案する．本稿の手法が従来の非等方点配置法と異なる点は，従来法の非等方距離が 2 次形式距離であるのに対し，本稿ではバイラテラル距離を用いることである．これにより，従来法の非等方手法が楕円の回転だけであったのに対し，本提案法では楕円の回転に加えて非線形な変形も生じ，輪郭の保存性が高い．

なお，点描主義点描画では各点の彩色も重要であるが，本稿では点の配置や形状だけを議論し，彩色は扱わない．

本稿の構成は次の通りである：第 2 節では，本稿で提案する点描画生成法の基礎事項として，バイラテラル距離と PDS を概説し，第 3 節では，基本となる点描主義点描画の作り方を先に示し，その後第 4 節でハーフトーニング点描画の生成法を示す．

2. 基礎事項

次節で提案法を述べる前に，その基礎となるバイラテラル距離と PDS を概説しておく．

2.1 バイラテラル距離

入力画像 (簡単のためモノクロで説明する) の画素値を d_i とする． i は画素に付けた番号であり，画素 i の (x, y) 座標を (x_i, y_i) とする．画素 i と j の間のバイラテラル距離は

$$D_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + \alpha(d_i - d_j)^2} \quad (1)$$

で定義される．これは 3 次元のバイラテラル空間 (x, y, d) での距離であり，従来の非等方点配置法 [5], [6] で用いられる 2 次元 (x, y) 空間での 2 次形式距離 $\{[x_i - x_j, y_i - y_j]G[x_i - x_j, y_i - y_j]^T\}^{1/2}$ とは異なる．2 次形式距離は，どの画素での計量行列を G とするかで不定性があり， i と j について非対称であり，三角不等式も満たさないが，式 (1) は一意で対称であり，三角不等式も満たす．以下の実験では $\alpha = 1$ とする．なお，式

(1) の距離の局所的な 2 次形式近似について付録 1 で触れる。

2.2 ポアソンディスクサンプリング (PDS)

PDS の手順は以下である。画像サイズ (画素数) を n とする。

- step 1) 全ての画素にランダムに順番 k を付ける。
- step 2) $k = 1$ の画素に点を打つ。
- step 3) $k = k + 1$ とする。もし $k = n$ なら終了。 $k < n$ なら次の step 4 へ。
- step 4) もし画素 k に点が打てるなら画素 k に点を打って step 3 へ。打てなければ打たずに step 3 へ。

このなかの「画素 k に点が打てる」というのは「画素 k を中心とする半径 r の円のなかにも、まだ点が 1 個も打たれていない」という意味である。半径 r の値は予め決めておく。

以上の手順で点を配置した後、それらの点を中心とする半径 δr ($0 < \delta < 1$) の円を塗る。そのときの距離も式 (1) を使うので円は歪んだ形になる。2 次形式距離とバイラテラル距離の円の形状の違いを図 2 に示す。図 2(a) は 2 次形式距離を用いる文献 [6] 中の画像の 1 部で、楕円が回転しているだけである。一方、図 2(b) はバイラテラル距離での円の形状であり、回転に加えて非線形な形状歪みも生じている。これは、2 次形式距離の楕円は 2 次元であるのに対し、バイラテラル距離の円は画像表面と 3 次元球との交線を画像平面 (x, y) に投影した閉曲線であることの違いによる。なお画像表面とは 3 次元空間 (x, y, d) 内で画素値 (x_i, y_i, d_i) が成す 2 次元曲面である。

3. 点描主義点描画

まず最初に点の分布状況が分かりやすい例として、図 3 左の画像 (サイズは 500×500) で実験する。但し、図 3

左のままでは画素値が不連続なので半径 20 のガウスフィルタでぼかした図 3 右の画素値を式 (1) の d_i に用いる。

半径 $r = 15$ の PDS で得られた点を図 4(a) に、それらの点を中心とする半径 8 の円を描いたのを (b)、非等方ポロノイセルを (c)、それらのセルに図 3 左の色を付けたのを (d) に示す。但し図 4(d) では、図 3 左の色をそのまま付けるとセルの境界が分からなくなるので、色をランダムに変えている。

図 4(d) は点描主義点描画風ではあるが、図 4(a) のように点の密度がエッジ付近で高く、(c) のようにセルの面積がエッジ付近で小さくなる。図 1 左の手描きの点描主義点描画では、点はエッジに沿って傾いているがサイズはあまり変化していない。

そこで、点の密度が一樣になるように修正することにする。この一樣性は次節への移行でも必要である。すなわち次節のハーフトーン点描画は本節の点描主義点描画の点の密度を入力画像の濃淡に応じて変化させるので、本節の点描主義点描画の点密度は一樣でなければならない。

そのために、上記の PDS では半径 r は全ての画素で同じ値にしていたが、画素 k での半径を

$$r_k = \beta [1 + \alpha (g_{xk}^2 + g_{yk}^2)]^{1/4} \quad (2)$$

に変える。ここで、 α は式 (1) の α と同じもの (本稿の実験では $\alpha = 1$) であり、 $[g_{xk}, g_{yk}]^T$ は画素 k での勾配ベクトルである。勾配ベクトルは図 3 右の画像にソーベルフィルタをかけて求める。半径を式 (2) のようにすれば点の密度が一樣になることは付録 2 に示す。半径を式 (2) にしたときの結果を図 5 に示す。図 5(a) は図 4(a) とは違い、点の密度が画像全体でほぼ一樣である。但し、等方的なハーフトーン点描画とは違い、図 5(a) の点の間隔はエッジ付近ではエッジに沿って長く、エッジに直

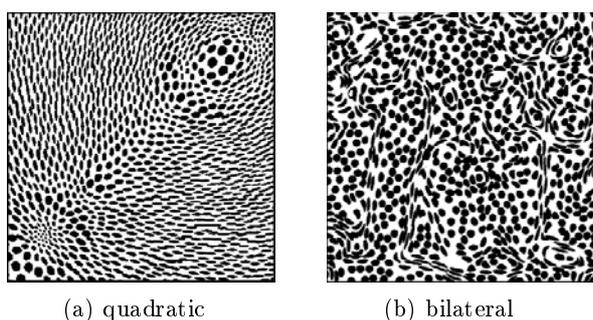


図 2 非一樣円の形状

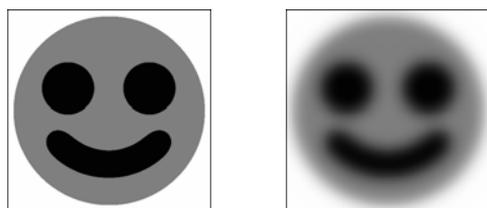


図 3 入力画像例

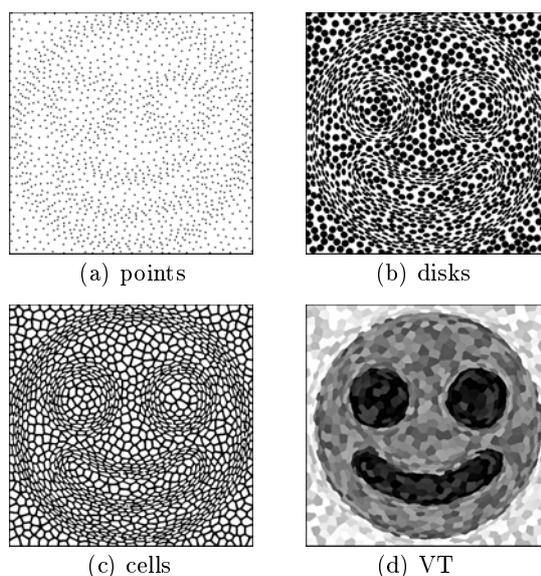


図 4 半径 15 での PDS

交方向には詰まっている．このことは図 5(a) では分かり難いが図 5(b) や (c) から理解できる．図 4(c) や (d) ではエッジ付近のセルの面積は狭いが，図 5(c) や (d) では全てのセルがほぼ等面積である．図 5(d) はタイルモザイク画に近いが，移動平均フィルタをかけると図 6 のようになり，図 1 左の点描主義点描画に少し似てくる．

4. ハーフトーン点描画

以上の点描主義点描画では点の密度は画像全体で一様であった．これらの点密度を入力画像の濃淡に従って変えればハーフトーン点描画が得られる．そのためには式 (2) の半径を

$$r_k = (\beta + \gamma d_i / 255) [1 + \alpha (g_{xk}^2 + g_{yk}^2)]^{1/4} \quad (3)$$

とすればよい．ここで d_i は図 3 左の画素値である．半径を式 (3) にしたときの結果を図 7 に示す．図 7(a) は PDS で得られた点，(b) はそれらの点を中心として半径 $r_k/2$ の円を描いたものである．但し，(b) の円を描くときの半径は式 (3) ではなく，式 (2) の r_k にする．式 (3) の r_k で円を描くと白い (d_k が大きい) 所ほど円の面積が大きくなり，点描画の濃淡が画像全体で一様になり，入力画像の濃淡を表わせない．式 (2) の r_k で円を描けば円の面積は場所によらず一定になり，ハーフトーン点描画

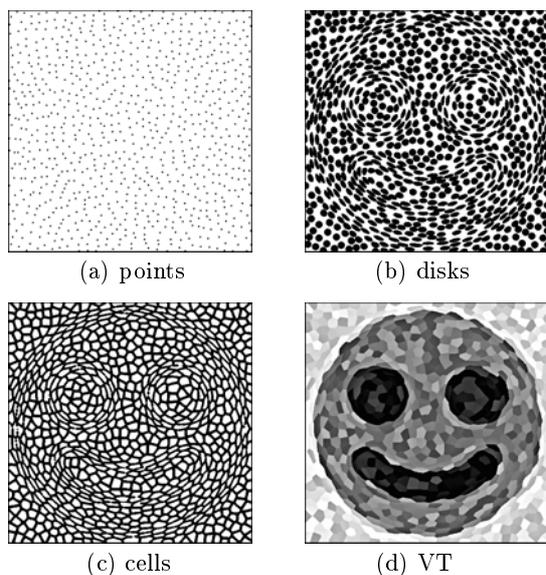


図 5 点密度が一様な PDS

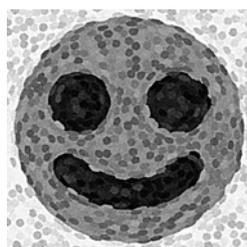


図 6 点描主義点描画風の画像

が得られる (半径が式 (2) のときの円と式 (3) での円の違いを付録 3 に示す)．図 7(b) の 1 部を拡大して (c) に示す．このように (b) ではエッジ付近で円が引き伸ばされて楕円になっている．(d) はポロノイセルである．図 7(d) もハーフトーン画像になっている (図 5(c) はハーフトーン点描画ではない)．

図 7(b) は図 1 右のようなハーフトーン点描画であるが，図 1 右では点は全て同サイズの円であるが，図 7(b) では非等方な楕円である．但し，図 7(b) から分かるように点が密な場所では点が融合してしまうため，点の面積をあまり大きくできず，従って白い所では点が疎らなので楕円形状も分かり難い．

5. 他の画像例

次に図 8 左の画像で同じ実験をする．右はぼかした画像である．

5.1 点描主義点描画

3 節の点描主義点描画を図 9 と図 10 に示す．図 9 は式 (2) の半径 $\beta = 10$ の場合であり，図 10 は $\beta = 3$ と細かくした結果である．また，図 9(d) に移動平均フィルタをかけた結果を図 11 に示す．

5.2 ハーフトーン点描画

4 節のハーフトーン点描画を図 12 に示す．(c) は

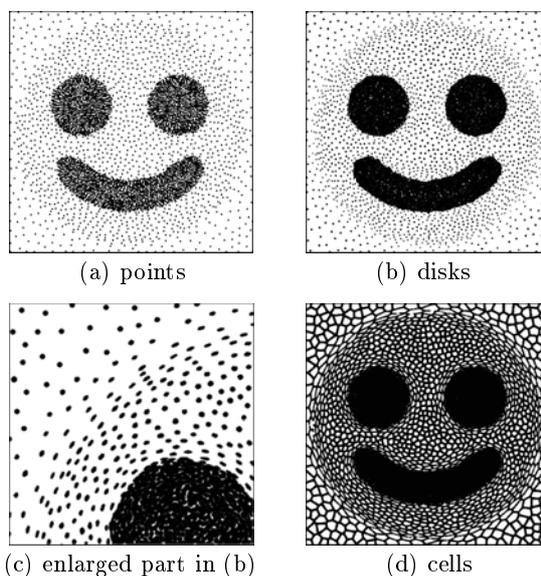


図 7 ハーフトーン点描画



図 8 他の入力画像例

(b) の 1 部を拡大したものであり，楕円が濃淡勾配の直交方向に伸びているのが分かる．

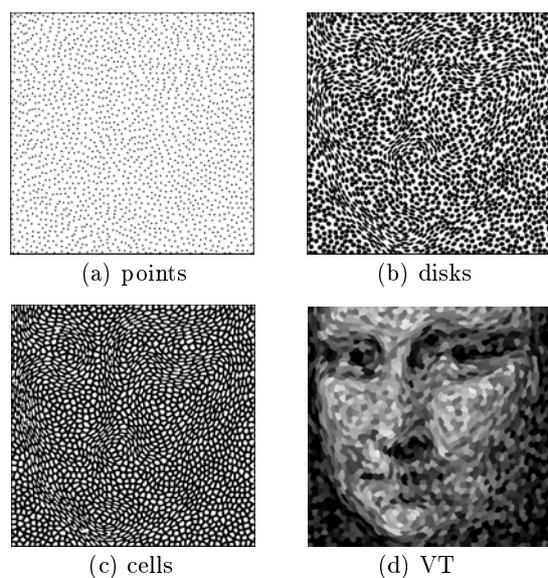


図 9 点描主義点描画 ($\beta = 10$)

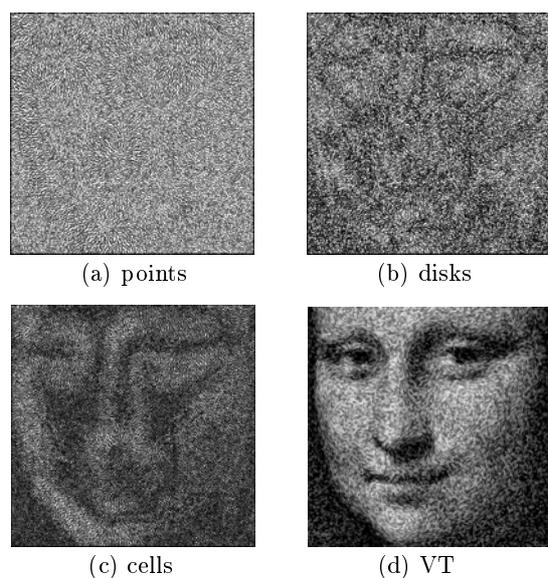


図 10 点描主義点描画 ($\beta = 3$)

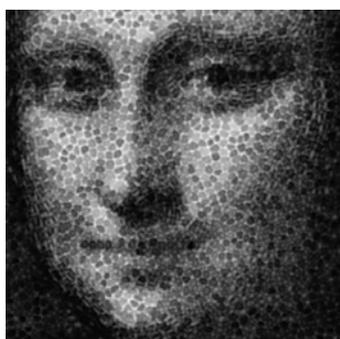


図 11 点描主義点描画風の画像

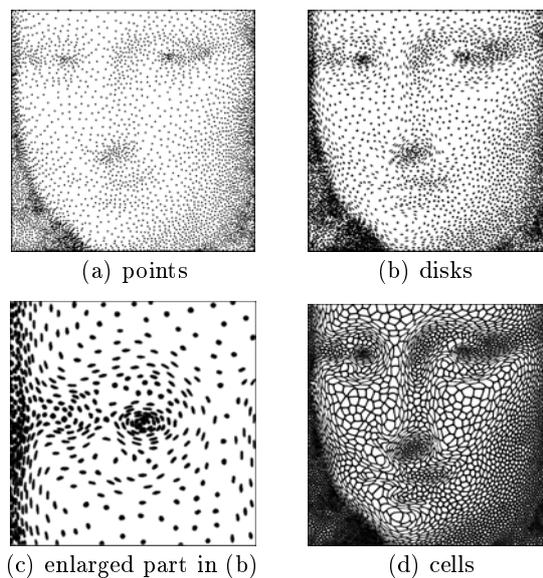


図 12 ハーフトーン点描画



図 13 カラーの入力画像例

6. カラーの点描画

最後に，図 13 左のカラー画像で実験する．右はぼかしたものである．

6.1 点描主義点描画

3 節の点描主義点描画を図 14 に示す (前出の図 2(b) もこの画像の非等方円である ($\beta = 15$))．図 14(d) に移動平均フィルタをかけた結果の点描主義点描画風の画像を図 15 に示す．

6.2 ハーフトーン点描画

4 節のハーフトーン点描画を図 16 に示す．カラーの場合，入力画像を RGB に分解して，R,G,B それぞれで点描画を作る．従って白地にシアン色の楕円とマゼンタの楕円，それと黄色の楕円が描かれ，楕円どうしが重なったところでは減法混色される．

7. むすび

バイラテラル距離に基づく非等方ポアソンディスクサンプリングによる点描主義点描画とハーフトーン点描画の生成法を提案し，カラー画像にも応用した．ポアソンディスクサンプリングでは点密度が局所的にばらつくので，計算量は増えるが Lloyd 緩和法で密度の一様性を高めるのが今後の課題である．

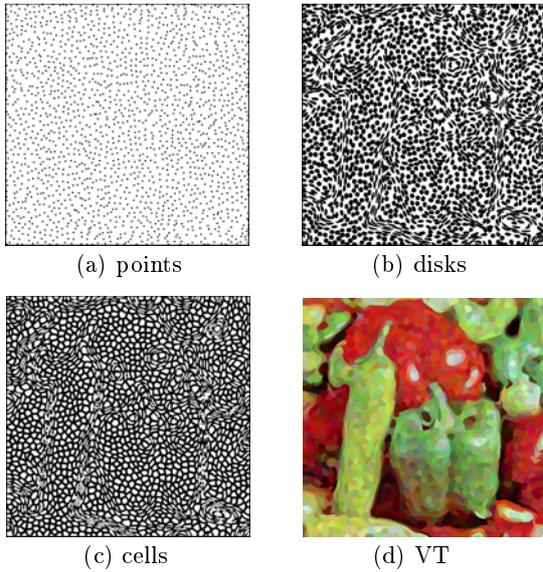


図 14 点描主義点描画 ($\beta = 10$)

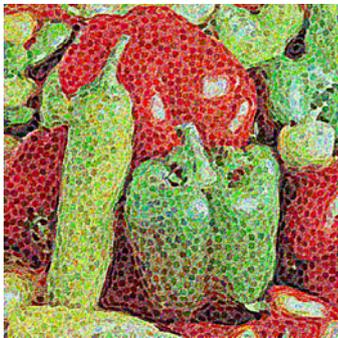


図 15 点描主義点描画風の画像

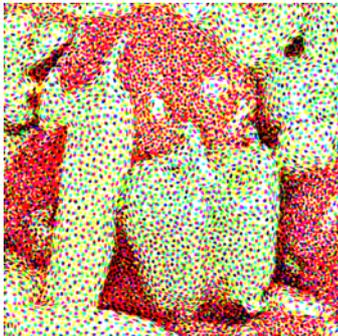


図 16 ハーフトーン点描画

文 献

- [1] 杉田純一, 高橋時一郎, “補色対比を考慮した筆触分割による点描画風画像生成法”, 情処学 研報, CG-126, pp.91-96, 2007.
- [2] A. hausner, “Pointillism halftoning”, Proc. CGI, pp.134-139, 2005.
- [3] I. A. Lopez, O. M. Pastor and H. H. Silva, “Adaptive incremental stippling using Poisson-disk distribution”, J. Graph., 15, 1, pp.29-47, 2010.
- [4] A. Secord, “Weighted Voronoi stippling”, Proc. NPAR, pp.37-43, 2002.
- [5] H. Li, L.Y. Wei, P.V. Sander and C.W. Fu, “Anisotropic Poisson disk sampling”, HKUST Tech.

Report, HKUST-CS09-02, 2009.

- [6] L. Feng, I. Hotz, B. Hamann and K.I. Joy, “Anisotropic noise samples”, IEEE Trans. Vis. Comput. Graph. 14, 2, pp.342-354, 2008.
- [7] C. Tomasi and R. Manduchi, “Bilateral filtering for gray and color images”, Proc.ICCV, pp.839-846, 1998.
- [8] R. Kimmel, R. Malladi and N. A. Sochen, “Images as embedded maps and minimal surfaces: movies, color, texture, and volumetric medical images”, Int. J. of Comput. Vision, 39, 2, pp.111-129, 2000.
- [9] J. Weickert, “Coherence-enhancing diffusion filtering”, Int. J. Comput. Vision, 31, 2-3, pp.111-127, 1999.

付 録

1. バイラテラル距離の局所 2 次形式近似

画素値 d_i の勾配ベクトルを $[g_{xi}, g_{yi}]^T$ とし、1 次のテイラー展開

$$d_j \cong d_i + g_{xi}(x_j - x_i) + g_{yi}(y_j - y_i) \quad (A.1)$$

を式 (1) に代入すると、式 (1) は

$$D_{ij} \cong \{[x_i - x_j, y_i - y_j] G_i [x_i - x_j, y_i - y_j]^T\}^{1/2} \quad (A.2)$$

という 2 次形式距離で近似される。ここで

$$G_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} g_{xi}^2 & g_{xi}g_{yi} \\ g_{xi}g_{yi} & g_{yi}^2 \end{pmatrix} \quad (A.3)$$

である。式 (A.3) の第 2 項は勾配テンソルであり、ランクは 1 である。 G_i は正則化勾配テンソルであり、ランクは 2 である。勾配テンソルだけでは楕円は直線に縮退してしまうので、従来の非等方 PDS [5] や非等方ポロノイ [6] では勾配テンソルを平滑化して G_i としているが、式 (A.3) はそれらとは少し異なる。

なお、式 (1) の距離の指数関数を重み係数とするフィルタがバイラテラルフィルタ [7] であり、式 (A.3) を計量とする非線形拡散法は Beltrami flow と呼ばれる [8] (式 (A.3) は局所的には測地距離である)。これらは非線形フィルタであるが、Weickert らは勾配テンソルを平滑化した行列の固有値分解に基づく線形拡散法による非等方フィルタを提案している [9]。

2. 半径を式 (2) にすると点密度が一様になることの説明

簡単のため図 A.1 のように x 方向にだけ濃淡変化がある画像を考える。すなわち $g_y = 0$ とする。図 A.1 の右側

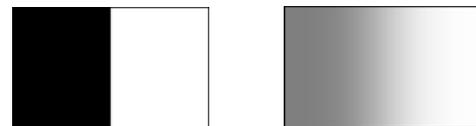


図 A.1 横方向の濃淡変化

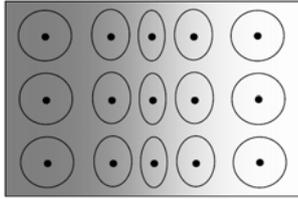


図 A.2 点の配置と楕円

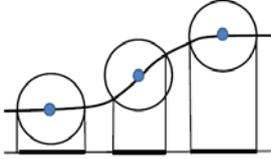


図 A.3 球との交線の射影

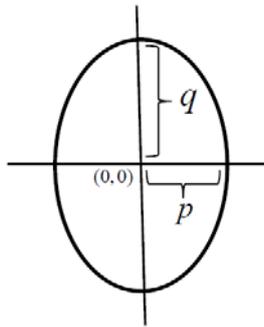


図 A.4 楕円の横幅と高さ

はぼかした画像である．この画像で半径 r を固定して点を配置すると，図 A.2 のように点の間隔がエッジ近傍で狭くなり，楕円も横方向に縮む（縦の長径は不変）．これは図 A.3 のように球と画像表面との交線の射影が図 A.2 の楕円であることによる．

図 A.4 のように楕円の中心を原点 $(0, 0)$ とする．そこを中心とする楕円の x 方向の半径 p と y 方向の半径 q を求める． p は

$$\sqrt{p^2 + \alpha(d_i - d_k)^2} = r_k \quad (\text{A.4})$$

から求められる．ここで d_i は座標 $(p, 0)$ での画素値であり， d_k は中心点すなわち $(0, 0)$ での画素値である．

$$(d_i - d_k)^2 \cong (g_{xk}p)^2 = g_{xk}^2 p^2 \quad (\text{A.5})$$

と近似できる．ここで g_{xk} は点 $(0, 0)$ での g_x である．式 (A.5) を式 (A.4) に代入すると，式 (A.4) は

$$p\sqrt{1 + \alpha g_{xk}^2} \cong r_k \quad (\text{A.6})$$

となり，これから

$$p \cong r_k / \sqrt{1 + \alpha g_{xk}^2} \quad (\text{A.7})$$

となる．次に， y 方向の半径 q は $q = r_k$ となる．

以上のことから， $r_k = \beta$ と固定すると，勾配が 0 の所（図 A.2 の左端と右端）では $p = q = \beta$ となり，勾配が大きい所（中央付近）では $p < \beta, q = \beta$ となり，楕円の横幅

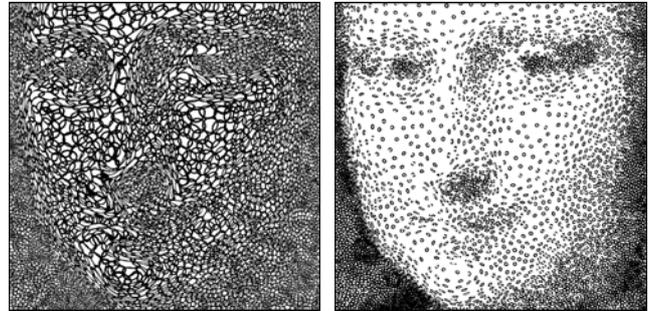
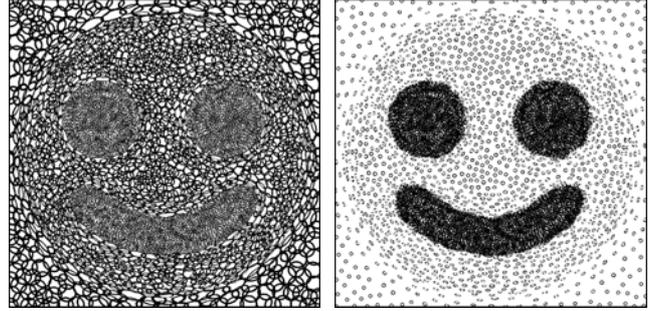


図 A.5 半径の式による円の違い (左:式 (3), 右:式 (2))

が縮む．楕円の面積は

$$pq \cong r_k^2 / \sqrt{1 + \alpha g_{xk}^2} \quad (\text{A.8})$$

となり，勾配が大きい所では縮む．

そこで $r_k = \beta(1 + \alpha g_{xk}^2)^{1/4}$ とすれば， $p = \beta / (1 + \alpha g_{xk}^2)^{1/4}$ ， $q = \beta(1 + \alpha g_{xk}^2)^{1/4}$ となり，勾配が大きい所（図 A.2 の中央付近）では楕円は図 A.2 よりも縦横とも伸びる（勾配が 0 の所（図 A.2 の左端と右端）では図 A.2 の円のままである）．楕円の面積は $pq = \beta^2$ となり，勾配によらず一定になる．

以上は x 方向だけに濃淡が変化する場合であるが，一般には式 (A.3) の G_i の行列式が $1 + \alpha(g_{xi}^2 + g_{yi}^2)$ であることから， r_k を式 (2) のようにすれば楕円の面積は場所によらずほぼ一定になる．

3. 円を描くときの半径が式 (2) のときと式 (3) のときの違い

ハーフトーン点描画では半径を式 (3) にした PDS で点を配置した後，各点を中心とする円を描く．この円を描く際の半径も式 (3) にすると図 A.5 の左のように，点が疎らな所 (d_i が大きい所) では円の半径が大きくなりハーフトーンにはならない．一方，各点を中心にして式 (2) の半径の円を描くと図 A.5 の右のようになり，円の面積は全てほぼ同じになるのでハーフトーンが行える．このことから，ハーフトーン点描画を得るには，点を打つ PDS では半径を式 (3) にして，円を描くときには式 (2) にすべきことが分かる．図 A.5 の右の円を塗り潰したのが図 7(b) と図 12(b) である．