

# 最適抽出可能性に基づく 1 次元低い超平面や超曲面のあてはめ

## ～ ランダムサンプリングは大域的最適解の夢をみるか? ～

藤木 淳<sup>†</sup> 赤穂昭太郎<sup>†</sup> 日野 英逸<sup>††</sup> 村田 昇<sup>††</sup>

<sup>†</sup> 産業技術総合研究所 〒305-8568 茨城県つくば市梅園 1-1-1 つくば中央第 2

<sup>††</sup> 早稲田大学, 〒169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1

E-mail: †{jun-fujiki,s.akaho}@aist.go.jp, ††hideitsu.hino@toki.waseda.jp, †††noboru.murata@eb.waseda.ac.jp

あらまし 本稿では  $N$  次元空間のデータに  $N-1$  次元超平面や  $N-1$  次元超曲面をあてはめる問題について考察する．まず  $N$  次元空間のデータへの  $N-1$  次元超平面あてはめを考える．このあてはめにおいてデータ点と超平面の  $L_p$  距離の最小  $k$  乗偏差推定する基準であてはめた場合,  $0 < p \leq \infty$  かつ  $0 < k \leq 1$  ならば最適抽出可能であることを示す．次に  $N$  次元空間のデータへの  $L_2$  距離に基づく  $N-1$  次元超曲面あてはめを考える．このあてはめは特徴写像を介して  $M$  次元特徴空間における  $M-1$  次元超平面あてはめ問題に帰着させるのが一般的であるが, この特徴写像によって入力空間の  $L_2$  距離は特徴空間における重み付き  $L_2$  距離で局所的に近似できるので, 本稿では特徴空間における  $M$  次元空間のデータへの  $L_2$  距離の最小  $k$  乗偏差推定基準によるあてはめ手法を提案する．これらあてはめ問題が最適抽出可能である場合, 全探索すなわち多項式オーダーの組合せ最適化によって (近似問題の) 大域的最適解が求まる．しかし全探索数は一般に膨大であるため, 本稿では組合せ最適化をランダムサンプリングで近似する．また同様なランダムサンプリングの手法である最小二乗中央値推定を拡張した最小二乗  $\alpha$  百分位点推定も提案し, これら提案手法と, RANSAC との関係について議論する．また実験によって最小  $k$  乗偏差推定と最小二乗  $\alpha$  百分位点推定の有効性を示すために人工データ及び実画像からの直線や 2 次曲線の検出実験を行なった．

キーワード あてはめ,  $L_p$  ノルム, 最小  $k$  乗偏差推定, 最小二乗  $\alpha$  百分位点推定, 大域的最適解, 最適抽出, 組合せ最適化, ランダムサンプリング

## 1. はじめに

次元削減による観測データの構造抽出はデータ解析の基本かつ重要な手順であり, 主成分分析 (principal component analysis; PCA) が頻繁に用いられる．PCA はデータの真値がユークリッド座標枠においてアフィン空間上に分布するという仮定の下で有効な手法であり,  $L_2$  距離に基づく PCA は次元削減後のデータの分散を最大化する部分空間を求めているが, これは三平方の定理から分散を最小化する部分空間を削減することと等価である．この削減する部分空間を決定する手法は劣成分分析 (minor component analysis; MCA) [30] とも呼ばれる． $L_2$  距離に基づく MCA はデータと部分空間の  $L_2$  距離を誤差とみなし, その 2 乗和を最小とする最小 2 乗 (least squares; LS) 基準を用いるが, これは誤差が等方正規分布に従う場合の最尤推定量である．また, データの次元を 1 次元削減することによってデータ構造を捉える回帰 (regression) も頻繁に行なわれる．通常回帰は誤差を含む目的変数が誤差のない説明変数の 1 次関数で表現できると仮定して, 残差から作られる誤差関数を最小化してデータ構造を抽出する．通常は残差の 2 乗和を最小化する LS 回帰が行なわれているが, 残差の絶対値和を最小化する最小絶対偏

差 (least absolute deviations; LAD) 回帰 [4] や残差の最大値の最小化するチェビシェフ (Chebyshev) 回帰 [4], 一般に残差の  $k$  乗和を最小化する最小  $k$  乗偏差 (least  $k$ -th power deviations;  $L_k$ PD) 回帰 が提案されている．なお, これまで  $L_k$ PD は  $1 \leq k \leq 2$  を対象とした [17], [11], [9], [24] が, 本稿では  $0 < k \leq 1$  を対象とする．また近年, 説明変数も誤差を含む測定誤差モデル (measurement error model) も研究されている [3], [20]．ここで全変数の誤差が独立同一の平均 0 の正規分布に従う場合の最尤推定量はデータ点と超平面の  $L_2$  距離に対する LS 回帰と等価となり, この回帰はデミング (Deming) 回帰 [6] または直交 (orthogonal) 回帰と呼ばれ, データ空間よりも 1 次元低い超平面をデミング回帰で求めた結果は  $L_2$  距離に基づく PCA の結果と一致する．つまり通常回帰は単一変数のみに誤差が含まれる場合の MCA であり, デミング回帰は全変数に誤差が含まれる場合の MCA である．これら回帰はデータ空間に対して 1 次元低い超平面をあてはめる問題と等価であるから, 逆に言えば, 1 次元低い超平面や超曲面をあてはめることは一種の回帰である．そこで本稿ではデータ空間に対して 1 次元低い超平面や超曲面をあてはめることを超平面回帰や超曲面回帰と呼び, あてはめられた超平面や超曲面を回帰超平面や回帰超曲面と呼ぶ．

さて、端的に言えば回帰には3つの側面がある。1つ目は主成分を残すか劣成分を除くかのいずれか、2つ目は主成分や劣成分（誤差）から作る評価関数の決め方、そして3つ目はアフィン空間と線型空間のどちらをあてはめるかという側面である。まず第1の側面について主成分を残す手法をPCA、劣成分を除く手法をMCAで明示する。ここで1変数にのみ誤差が含まれる場合のMCA（通常の回帰）は別扱いし、語呂をあわせてRCA（regressive component analysis）と呼ぶ。次に第2の側面について各データのもつ誤差の $p$ 乗ノルムに基づく $L_k$ PD（ $0 < p \leq \infty$ ;  $0 < k \leq \infty$ ）を考察する手法を $L_p^k$ で表現する。ここで $D$ 個の $N$ 次元列ベクトルデータ $\{x_{[d]}\}_{d=1}^D$ を並べてできるデータ行列を $X = (x_{[1]}, \dots, x_{[D]})$ ,  $x_{[d]} = (x_{1[d]}, \dots, x_{N[d]})^T$ とすると、 $L_p^k$ -MCAで考える行列ノルムは

$$\|X\|_{L_p^k} = \left[ \sum_{d=1}^D \left( \sum_{n=1}^N |x_{n[d]}|^p \right)^{\frac{k}{p}} \right]^{\frac{1}{k}}$$

となる。例えばデータとあてはめる超平面との $L_2$ 距離の最大値を最小化する手法は $L_2^\infty$ のように表現する。ここで一般に $\|X\|_{L_p^k} \neq \|X^T\|_{L_p^k}$ である。そして第3の側面について、例えばPCAはデータの共分散行列（covariance matrix）の次元削減なのでアフィン超平面回帰であるが、パターン認識で用いられる部分空間法（subspace method）[23],[28]ではデータの自己相関行列（autocorrelation matrix）の次元削減なので線型超平面回帰である。本稿では、区別の必要がある場合には線型超平面回帰を“linear”で、アフィン超平面回帰を“affine”で表す。これら3つの側面から既存手法を見直すと、まず、RCAは誤差を含む変数が1つであるため $L_1^k$ に基づく回帰である。ここで $L_1^k$ -RCAは各データの誤差を並べてできる誤差ベクトルの $L_k$ ノルムの和を最小化する手法と一致するので、LS回帰は $L_1^2$ -RCA、LAD回帰は $L_1^1$ -RCA、チェビシェフ回帰は $L_1^\infty$ -RCAとなる。次に通常のPCAは $L_2^2$ -affine-PCAまたは $L_2^2$ -affine-MCAである。そして通常の部分空間法では $L_2^2$ -linear-PCAまたは $L_2^2$ -linear-MCAである。 $L_1$ ノルム因子分解[21]は $L_1^1$ -linear-MCAであり、 $R_1$ -PCA[7]は $L_2^1$ -linear-MCAである。なお、PCA-L1[22]は、厳密には本稿で提案する枠組みには入らない、というのもあてはめる超平面への正射影ベクトルのもとの座標系における表現の $L_1$ ノルムの最大化である $L_2^1$ -linear-PCAではなく、あてはめる超平面上の正規直交基底による表現の $L_1$ ノルムの和を最大化するからである。そしてこの違いのため回転不変性を持つことになる。なお、文献[22]で提案されているPCA-L1によってあてはめた1次元空間の直交補空間に対して再度PCA-L1を適用する、という操作の反復によってPCA-L1によってあてはまるべき高次元空間を近似的に求める手法は、通常

のPCAとは違い、高次元空間を一度に抽出したときの最適解とは一致するとは限らず、PCA-L1の場合はその最適性はまだ保証されていない。

このように線型（アフィン）部分空間を利用した次元削減は数多く提案されて広く用いられているが、データの真値や主構造が線型（アフィン）空間上に分布しない場合には線型（アフィン）部分空間を利用した次元削減手法は不向きである。そこで非線型主成分分析（nonlinear PCA; NLPCA）が提案されてきた。NLPCAの考え方は、非線型構造をもつデータをアフィン空間上に分布させるために特徴空間（feature space）と呼ばれる高次元空間に特徴写像（feature map）と呼ばれる写像を行ない、その後通常PCAによる線型（アフィン）部分空間をあてはめる所にある。このときデータの構造は特徴写像によってアフィン空間に写像される空間に限定されるためにデータ構造の理解と特徴写像はほぼ等価であり、データ点にあてはめるべき曲線群や曲面群を決定することと、特徴写像を定めることは等価となる。よって特徴写像が理論的に未知の場合には、写像が先か構造が先かという鶏と卵の問題が生じるが、2次元データに対する2次曲線回帰など、コンピュータビジョンにおけるあてはめ問題の場合には特徴写像が理論的に定まり、鶏と卵の問題は生じないことが多い。ここで、通常のNLPCAは特徴空間における $L_2$ 距離のLS基準によるあてはめ問題であるが、特徴写像は一般に非線型写像であるから、特徴空間における距離の大小は入力空間における距離の大小を反映しないため、例外値（outlier）を含むデータに対するあてはめ結果は一般に悪くなる。そこでコンピュータビジョンでは入力空間における距離のLS基準に基づいた特徴空間におけるあてはめ手法が研究され、入力空間が欧氏空間の場合[27],[1],[19],[26],[5]、球面[13]及び一次元正規分布[15]の場合のあてはめ手法が提案された。またこの手法は核関数で定式化され[12]、ガウス核を用いた曲線あてはめも提案された[14]。これら手法は原則として、入力空間から特徴空間への写像を観測データ附近でヤコビ行列（Jacobian matrix）を用いてアフィン近似することによって入力空間の計量と特徴空間の計量の関係を近似している。そしてこの近似によって入力空間における距離を特徴空間における量で表現している。本稿ではこの手法をヤコビ非線型主成分分析（Jacobian NLPCA; JNLPCA）と呼び、JNLPCAを核関数で表現したものをヤコビ核主成分分析（Jacobian kernel PCA; JKPCA）と呼ぶ[12]。なお結果的にJNLPCAは入力空間のLS基準を特徴空間の重み付きLS基準で近似していることになる。

本稿では、超平面回帰や、入力空間の $L_2$ 距離に基づく超曲面回帰を考えるために、最適抽出（optimal sampling）可能とう概念を導入する。最適抽出可能とは、 $N$ 次元空間のデータへの超平面回帰や超曲面回帰の誤差評価関数の大域的最適解の中に、アフィン回帰の

場合には  $N$  個のデータ点を通るものが、線型回帰の場合には  $N - 1$  個のデータ点（原点とあわせて  $N$  個）を通るものが少なくとも 1 つ存在することである。ある回帰が最適抽出可能である場合、データ点のサンプリングという多項式オーダーの組合せ最適化によって大域的最適解が得られることになるという利点がある。次に  $L_p^k$ -RCA や  $L_p^k$ -MCA に基づく（重み付き）超平面回帰が  $0 < p \leq \infty$  かつ  $0 < k \leq 1$  のときに最適抽出可能であることを示す。なお、 $k = 0$  の場合は超平面や超曲面上の点の数を最大化する回帰となるので最適抽出可能であるが、回帰としては意味があまりないので本稿では割愛する。また、本稿で議論する  $L_1$  等は、誤差を測るノルムのことであり、 $L_1$  正則化などの正則化ではないことに注意しておく。

さて、一般に LS 推定は例外値の影響を強く受けることが知られており、頑健な推定を行なうための M 推定量が提案された [18]。M 推定の基本的な考え方は、誤差分布が正規分布から少々ずれた場合の有効性の低減を抑えるために例外値の影響を制御した推定量を作る所にある。例えば平均の推定において誤差がラプラス分布に従うと仮定すると、最尤推定量は標本平均ではなく標本中央値となり、この推定は LAD 推定によって得られる、というように直感的には誤差分布が M 推定量から導かれる“正規分布関数と似た”確率分布（M 推定量によっては正規化できず確率分布と見做せない場合もある）に従うと仮定した場合の最尤推定と捉えられる。その考えに基づき、M 推定量の 1 つである対数双曲線余弦関数  $\log \cosh$  和に基づいた超曲面回帰手法が提案された [16]。そして本稿で提案する  $L_k$ PD ( $0 < k < 2$ ) もまた M 推定量であり頑健である。また、このような頑健な推定量の 1 つとして、誤差の 2 乗の中央値 (median) を最小にする最小 2 乗中央値推定 (least median of squares; LMedS) [25] が知られている。LMedS 推定は中央値に基づいた推定であるため、その破綻点 (break down point) は 50% であり、例外値が 50% 以上ある場合は有効に機能しない。そこで本稿では、中央値を  $\alpha$ -百分位点 ( $\alpha$ -percentile) に拡張した最小二乗  $\alpha$  百分位点推定 (least  $\alpha$ -percentile of squares;  $L_\alpha$ PS) を提案する。 $L_\alpha$ PS への拡張により、破綻点が  $100(1 - \alpha)\%$  となり、例外値が  $100(1 - \alpha)\%$  以内であれば機能する。

なお、最適抽出可能な  $L_k$ PD はサンプリングで大域的最適解を得ることができるが、一般にその組合せの数は膨大となる。また LMedS やその拡張の  $L_\alpha$ PS は評価関数が微分できない点が多数あり多くの局所最適解があるのが一般的である。そこで、本稿ではランダムサンプリングによって大域的最適解の近似解を求めることにする。同様にランザック (random sample consensus; RANSAC) [10] もランダムサンプリングによって大域的最適解を求める手法である。RANSAC は回帰超平面を、超平面が含む正常値の個数によって定める所にあり、

ランダムサンプリングによって得られたデータ点を通る超平面を多数生成し、正常値の個数が多い超平面を推定値とする。ここで正常値とは図形との距離が与えられた閾値以下のものを指し、検出された図形の精度は閾値の大きさに依存する。

以上を鑑みて、本稿ではランダムサンプリングに基づく超平面や超曲面のあてはめ手法として  $L_k$ PD 及び  $L_\alpha$ PS を提案する。そして  $L_k$ PD や  $L_\alpha$ PS を 2 次元画像上の直線検出及び 2 次曲線検出に応用し、RANSAC と比較する。これら検出は画像処理におけるデータの 1 次元削減手法として重要な問題である。

なお、直線や 2 次曲線の検出手法としてハフ変換 (Hough transformation; HT) [8] が良く知られているので、本稿では用いないが HT に言及しておく。HT の特徴は超平面や超曲面を表現する助変数の値を助変数空間のセルへの投票によって定める所にあり、投票の多いセルに対応する助変数の値を推定値とする。HT において、1 つのデータ点は助変数空間において 1 つの超曲面に対応するため、1 つのデータ点が超曲面が通過する多数のセルに投票されてしまい、一般に計算量が多くなる。そこでランダム化ハフ変換 (randomized Hough transformation; RHT) [29] が提案された。RHT は、超平面や超曲面を決定する最小の点集合をランダムサンプリングし、それから決定される助変数を対応するセルに投票することによって計算量を削減する手法である。HT にしろ RHT にしろ、検出された図形の精度は助変数空間のセルの解像度に依存する。

## 2. 最適抽出可能性

本節では、 $N$  次元空間のデータへの超平面回帰を考える。ここで以下を仮定する。

仮定：線型回帰の場合は全データが同一の原点を通る  $N - 1$  次元超平面上にないとし、アフィン回帰の場合は全データが同一の  $N - 1$  次元超平面上にないとする。

さて、 $N$  個の変数を並べた列ベクトルを  $x \in \mathbb{R}^N$  とする。MCA の場合は全変数が誤差を含み、RCA の場合は第  $N$  変数のみが目的変数として誤差を含むとする。ここで  $D$  個の観測値の組を  $\{x_{[d]}\}_{d=1}^D$  とし、 $x$ ,  $x_{[d]}$  の同次座標をそれぞれ  $\tilde{x} = (1, x^\top)^\top$ ,  $\tilde{x}_{[d]} = (1, x_{[d]}^\top)^\top$  とする。今、求める線型回帰超平面及びアフィン回帰超平面を

$$\begin{cases} p^\top x = 0 & (\text{linear}), \\ p_0 + a^\top x = \tilde{p}^\top \tilde{x} = 0 & (\text{affine}) \\ p \in \mathbb{R}^N, \quad \tilde{p} = (p_0, p^\top)^\top \in \mathbb{R}^{N+1} \end{cases}$$

とする。ここで

$$\begin{cases} n = p, & z_{[d]} = x_{[d]}, & M = N & (\text{linear}), \\ n = \tilde{p}, & z_{[d]} = \tilde{x}_{[d]}, & M = N + 1 & (\text{affine}), \end{cases}$$

と置く。

まず RCA について考える． $n \in \mathbb{R}^M$  の第  $M$  成分を  $n_M$  とし，第  $M$  座標向きの単位ベクトルを  $u_M$  とすると， $d$  番目のデータの誤差  $e_{[d]}$  は

$$\mathbf{n}^\top (z_{[d]} + e_{[d]} \mathbf{u}_M) = \mathbf{n}^\top z_{[d]} + e_{[d]} n_M = 0$$

をみたくので  $e_{[d]} = \frac{|\mathbf{n}^\top z_{[d]}|}{|n_M|}$  となる．

よって，重み付き  $L_1^k$ -RCA は重み  $w_{[d]} > 0$  に対し，

$$\operatorname{argmin}_n \sum_{d=1}^D \left| w_{[d]}^{\frac{1}{k}} \mathbf{n}^\top z_{[d]} \right|^k \quad \text{subject to } n_M = 1$$

を求める問題となる．

次に MCA について考える． $d$  番目のデータの誤差  $e_{[d]}$  は観測値  $z_{[d]}$  と超平面  $\mathbf{n}^\top z = 0$  との  $L_p$  距離

$$e_{[d]} = \min_z \|z_{[d]} - z\|_{L_p} \quad \text{subject to } \mathbf{n}^\top z = 0$$

となる．まず， $1 \leq p \leq \infty$  の場合は，ヘルダーの不等式 (Hölder's inequality) により  $q = \frac{p}{p-1}$  を用いて

$$|\mathbf{n}^\top z_{[d]}| = |\mathbf{n}^\top (z_{[d]} - z)| \leq \|\mathbf{n}\|_{L_q} \cdot \|z_{[d]} - z\|_{L_p}$$

が成立するので， $e_{[d]} = \frac{|\mathbf{n}^\top z_{[d]}|}{\|\mathbf{n}\|_{L_q}}$  となる．

よって，重み付き  $L_p^k$ -MCA は

$$\operatorname{argmin}_n \sum_{d=1}^D \left| w_{[d]}^{\frac{1}{k}} \mathbf{n}^\top z_{[d]} \right|^k \quad \text{subject to } \|\mathbf{n}\|_{L_q} = 1$$

を求める問題となる．次に  $0 < p < 1$  の場合だが， $\|z_{[d]} - z\|_{L_p}$  が一定となる図形は凸ではなく尖点を持ち，尖点において超平面  $\mathbf{n}^\top z = 0$  上の点と  $z_{[d]}$  の  $L_p$  距離は最小値となる．ここで尖点における  $z$  と  $z_{[d]}$  とで異なる成分は高々1つであるから，

$$\|z_{[d]} - z\|_{L_p} = \|z_{[d]} - z\|_{L_1} \quad \text{at cuspidal points}$$

となり，観測値  $z_{[d]}$  と超平面  $\mathbf{n}^\top z = 0$  との  $L_p$  距離は  $L_1$  距離と等しい．よって  $\frac{1}{q} = \max\{0, \frac{p-1}{p}\}$  のように  $q$  を定めれば  $1 \leq p \leq \infty$  の場合と統一できる．

なお，仮定より  $\operatorname{rank} \mathcal{Z} = M$ ， $\mathcal{Z} = (z_{[1]} \cdots z_{[D]})$  である．

以上の議論により， $L_1^k$ -RCA， $L_p^k$ -MCA はいずれも

$$\mathcal{E}_k = \sum_{d=1}^D \left| w_{[d]}^{\frac{1}{k}} \mathbf{n}^\top z_{[d]} \right|^k \quad (1)$$

を最小化する問題であり，違いは  $n$  に対する拘束条件が

$$\begin{cases} n_M = 1 & (L_1^k\text{-RCA}) \\ \|\mathbf{n}\|_{L_q} = 1 & (L_p^k\text{-MCA}) \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{where } \frac{1}{q} = \max\left\{0, \frac{p-1}{p}\right\}$$

となることである．ここで助変数空間における拘束条件

(式(2))の表す図形を  $\mathcal{Q}$  は凸である．式(1)の絶対値を外すために，助変数  $n$  のなす空間を分割する．この助変数空間は  $D$  個の超平面  $\Pi_{[d]} : z_{[d]}^\top n = 0$  によって，複数の凸領域である超角錐に分割される．その超角錐が  $D$  個の超平面それぞれの正領域・負領域のいずれにあるかで

$$s_{[d]} = \begin{cases} -1 & (z_{[d]}^\top n = 0 \text{ の負領域}) \\ 1 & (z_{[d]}^\top n = 0 \text{ の正領域}) \end{cases}$$

と分類し， $s = (s_{[1]}, \dots, s_{[D]})^\top$  を用いて超角錐を  $\mathcal{P}(s)$  と呼ぶ．このとき  $\mathcal{P}(s)$  の境界及び内部で

$$\mathcal{E}_k = \sum_{d=1}^D \left( s_{[d]} w_{[d]}^{\frac{1}{k}} \mathbf{n}^\top z_{[d]} \right)^k \quad \text{subject to } n \in \mathcal{Q} \cap \mathcal{P}(s)$$

となるので各  $s$  に対する  $\mathcal{E}_k$  の最小値の中での最小値が大域的最適解となる．よって任意の  $s$  に対する  $\mathcal{E}_k$  の最小値を与える  $n$  が最適抽出可能であることを示せば良い．

さて，各  $s$  に対し助変数  $n$  のなす空間を  $\mathbb{R}^M$  から  $\mathbb{R}^D$  への線型写像

$$\mathcal{L} = \left( \operatorname{diag} \left\{ s_{[1]} w_{[1]}^{\frac{1}{k}}, \dots, s_{[D]} w_{[D]}^{\frac{1}{k}} \right\} \mathcal{Z} \right)^\top$$

で変換する．このとき  $\chi = (\chi_{[1]}, \dots, \chi_{[D]})^\top = \mathcal{L}n$  とおくと， $\operatorname{rank} \mathcal{L} = M$ ， $D \geq M$  であるから， $n$  と  $\chi$  は一対一に対応する．また，線型写像によって凸は凸に写像されるので  $\mathcal{L}(\mathcal{Q})$  は凸の  $M-1$  次元超曲面を表す．

このとき  $\chi$  の全成分は非負であり，

$$\mathcal{E}_k = \sum_{d=1}^D |\chi_{[d]}|^k = \|\chi\|_{L_k}^k \quad \text{subject to } \chi \in \mathcal{L}(\mathcal{Q} \cap \mathcal{P}(s))$$

が成立する．よって  $\mathcal{E}_k$  は， $\chi$  の  $L_k$  ノルムが最小となる点，つまり  $\mathcal{L}(\mathcal{Q} \cap \mathcal{P}(s))$  上の点で原点との  $L_k$  距離が最小となる点において最小となり，その点に対応する  $n$  を求めれば良い．ここで線型写像によって凸は凸に写像されるので， $\mathcal{L}(\mathcal{Q} \cap \mathcal{P}(s))$  はやはり凸である．また，原点が

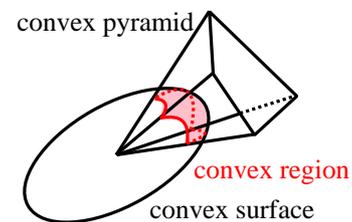


図1 凸超曲面と超角錐の交わり

らの  $L_k$  距離が一定となる点の集合は  $0 < k < 1$ ， $k = 1$ ， $k > 1$  の場合にそれぞれ図2のようになるので，原点からの  $L_k$  距離が必ず  $\mathcal{L}(\mathcal{Q} \cap \mathcal{P}(s))$  の境界  $\partial \mathcal{L}(\mathcal{Q} \cap \mathcal{P}(s))$  で最小となるためには図3のような凹凸関係が成立す

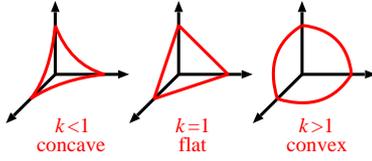


図2 原点から等距離にある点の集合

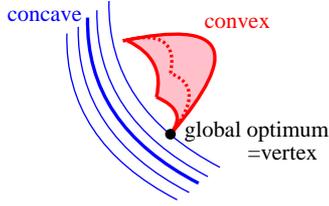


図3 凹凸関係

ることが必要であり、そのためには  $0 < k \leq 1$  であることが必要である。逆にこのとき、原点からの  $L_k$  距離が必ず  $\partial \mathcal{L}(\mathcal{Q} \cap \mathcal{P}(s))$  で最小となる。よって原点からの  $L_k$  距離が最小となる点は超角錐  $\mathcal{L}(\mathcal{P}(s))$  の境界をなす超平面  $\{\mathcal{L}(\Pi_{[d]})\}_{d=1}^D$  うちのどれか1つの上であり、その超平面を  $\mathcal{L}(\Pi)$  とすると、 $\mathcal{L}(\mathcal{Q} \cap \Pi)$  上の点で原点からの  $L_k$  距離が最小となる点を求めれば良い。ここでやはり  $\mathcal{L}(\mathcal{Q} \cap \Pi)$  も凸であるから、最小値を与える点は  $\mathcal{L}(\mathcal{Q} \cap \Pi)$  の境界上の点であり、 $\mathcal{L}(\Pi)$  とは異なる  $\mathcal{L}(\mathcal{P}(s))$  の境界をなす超平面上にある。このことを繰り返すことにより、 $\mathcal{L}(\mathcal{Q} \cap \mathcal{P}(s))$  の頂点うちの少なくとも1つ、すなわち  $\mathcal{L}(\mathcal{Q})$  と  $M-1$  枚の超平面との交点で原点からの  $L_k$  距離が最小となることがわかる。この交点における  $\chi$  に対応する  $n$  は  $\mathcal{P}(s)$  をなす  $M-1$  枚の超平面上にあり、各超平面は回帰超平面が観測点を通る条件であることから、 $\mathcal{E}_k$  の最小値を与える  $n$  は  $M-1$  個（線型回帰の場合は  $N-1$  個、アフィン回帰の場合は  $N$  個）の観測点を通る、つまり最適抽出可能である。以上により、 $0 < p \leq \infty$  かつ  $0 < k \leq 1$  の場合に最適抽出可能である。

### 3. ヤコビ非線型主成分分析

入力空間である  $N$  次元空間  $\mathcal{R}$  の点列への非線型部分空間をあてはめる際、この点列を特徴空間である  $M$  次元リーマン空間  $\mathcal{H}$  に写像し、 $\mathcal{H}$  における線型あてはめに帰着することが多い。通常非線型主成分分析において、最適な線型（アフィン）部分空間はデータと  $\mathcal{H}$  における部分空間の欧氏距離の2乗和を最小化するように推定される。しかし、入力空間に自然な計量が定義されている場合には、 $\mathcal{H}$  における最小2乗推定量は時に悪い推定結果を与えることが知られている [2]。そこで、入力空間  $\mathcal{R}$  における欧氏距離の2乗和を特徴空間  $\mathcal{H}$  における欧氏距離の重み付き2乗和で近似する手法が提案され [1], [5], [19], [26], [27]、その手法は入力空間が計量が定義されたリーマン空間の場合に拡張された [12]。文献 [12] では、ヒルベルト空間におけるあてはめに拡張できるように核関数を用いているが、本稿ではその必要は

ないので、核関数を用いない表現を使用する。

### 3.1 入力空間と特徴空間における計量

入力空間を  $N$  次元リーマン空間  $\mathcal{R}$  とし、 $\mathcal{R}$  上の点  $x$  におけるリーマン計量を  $G_x$  とする。またノイズを含むと考えられる観測されたデータ点を  $\{x_{[d]}\}_{d=1}^D$  とする。JNLPCA では、データ点  $x_{[d]}$  の附近では計量が  $G_{x_{[d]}}$  で一定であると仮定する。つまりリーマン空間は  $x_{[d]}$  の附近で  $x_{[d]}$  の接空間（アフィン空間）で近似されると仮定する。このとき、データ点  $x_{[d]}$  と、その附近にある点  $x = x_{[d]} + \delta x$  との距離は  $r_{[d]} = \sqrt{(\delta x)^\top G_{[d]}(\delta x)}$  と近似できる。超曲面回帰において、入力空間の点  $x$  は特徴空間である  $M$  次元リーマン空間へ、特徴写像  $\phi: x \mapsto \phi(x)$  によって写像される。このとき、特徴写像  $\phi$  のヤコビ行列  $J_\phi$  及び計量テンソル  $G_\phi$  は  $J_\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ 、 $G_\phi = J_\phi^\top J_\phi$  となり、これら量を用いて特徴写像をデータ点  $x_{[d]}$  附近で線型近似すると、 $\delta \phi = J_{[d]} \delta x$  となる。ここで  $J_{[d]} = J_{\phi_{[d]}}$  であり、 $\phi_{[d]} = \phi_{x_{[d]}}$  である。この近似によって、データ点と曲線との距離  $r_{[d]}$  は特徴空間の量を用いて

$$R_{[d]} = \sqrt{(\delta \phi(x))^\top G_{[d]} \delta \phi(x)} \quad (3)$$

と近似できる。ここで  $G_{[d]} = (J_{[d]}^\top)^\top G_{[d]} J_{[d]}$  であり、 $X^+$  は  $X$  のムーア-ペンローズ逆行列である。

### 3.2 特徴空間におけるアフィン空間のあてはめ

本小節では、入力空間におけるデータ点と  $N-1$  次元回帰超曲面との距離を、前小節の線型近似によって近似する。本稿では、 $\mathcal{R}$  における回帰超曲面の集合は、線型助変数  $a$  を用いて  $f(x; a) = a^\top \phi = 0$  のように表現できるものとする。例えば、2次元欧氏空間における点列への2次曲線回帰は、 $x = (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2$  に対して、特徴写像  $x \mapsto \phi$  を  $\phi = (x^2, xy, y^2, x, y, 1)^\top \in \mathbb{R}^6$  のように定めると、6次元空間において  $a^\top \phi = 0$  という超平面回帰となる。つまり、本稿の枠組みでは、 $N$  次元入力空間における超曲面回帰は  $M$  次元特徴空間における超平面回帰に帰着できることとなる。ここで通常のNLPCAでは特徴空間の2点間の距離は、特徴空間の座標をデカルト座標とみなした欧氏距離で測られるが、JNLPCAでは特徴空間の2点間の距離は式 (3) で測られている。

さて、 $\hat{\phi}_{[d]}$  を観測データの特徴空間における表現  $\phi_{[d]}$  の真値とし、真値と観測値のずれである誤差を  $\delta \phi_{[d]} = \hat{\phi}_{[d]} - \phi_{[d]}$  とおく。ここで真値は  $M-1$  次元アフィン空間  $f(x; a) = a^\top \phi = 0$  上になるので、 $a^\top \hat{\phi}_{[d]} = 0$ 、つまり  $a^\top \delta \phi_{[d]} = -a^\top \phi_{[d]}$  が成立する。よって、観測値と  $M-1$  次元アフィン空間の入力空間の計量を反映した距離は

$$R_{[d]}^2 = \operatorname{argmin} (\delta \phi(x))^\top G_{[d]} \delta \phi(x),$$

$$\text{where } a^\top \begin{bmatrix} \delta \phi_{[d]} \delta \phi_{[d]}^\top \end{bmatrix} a = a^\top \begin{bmatrix} \phi_{[d]} \phi_{[d]}^\top \end{bmatrix} a$$

となり，コーシー・シュワルツの不等式によって

$$R_{[d]}^2 = \frac{\mathbf{a}^\top \left[ \phi_{[d]} \phi_{[d]}^\top \right] \mathbf{a}}{\mathbf{a}^\top \mathbf{G}_{[d]}^+ \mathbf{a}}$$

となる．ここで特徴空間における観測データ  $\phi$  をデカルト座標と考えたときの観測値と  $M-1$  次元アフィン空間

の距離  $r_{[d]}$  は  $r_{[d]} = \sqrt{\frac{\mathbf{a}^\top \left[ \phi_{[d]} \phi_{[d]}^\top \right] \mathbf{a}}{\mathbf{a}^\top \mathbf{a}}}$  であるから，

$$R_{[d]} = w_{[d]} r_{[d]}, \quad \text{where} \quad w_{[d]} = \sqrt{\frac{\mathbf{a}^\top \mathbf{a}}{\mathbf{a}^\top \mathbf{G}_{[d]}^+ \mathbf{a}}}$$

が成立する．よって  $L_k$ PD 推定を行なう場合は  $\sum_{d=1}^D w_{[d]}^k r_{[d]}^k$  を最小にすれば良く，これは重み付き  $L_k$ PD 推定である．

ここで，重みは変数  $a$  を含むので，一般には重み再計算法 (reweighting) を用い，反復的に重みを推定しながら，評価関数を最小化することが行なわれているが，本稿では最適抽出可能性を利用して解く手法を提案する．

#### 4. ランダムサンプリングによる近似

超平面回帰が最適抽出可能をみたくする場合，回帰は多項式オーダーの組合せ最適化 (combinatorial optimization) に帰着される．また，超曲面回帰は特徴空間において重み付き超平面回帰に帰着できるため，やはり，回帰は多項式オーダーの組合せ最適化に帰着される．この際，超平面や超曲面の助変数の数が  $M$  個の場合，大域的最適解を求めるための全サンプリング数は  ${}_D C_M$  通りとなる．しかし，例えば平面上の 100 点への直線回帰の場合 ( $D = 100, N = 3$ ) では約 100 万通り，そして例えば平面上の 100 点への 2 次曲線回帰の場合 ( $D = 100, N = 6$ ) では約 1 兆通りの膨大な組合せを考えなければならない．

そこで計算時間の短縮のため，ランダムサンプリングによって得られた組合せの中からの最適解によって大域的最適解を近似することが考えられる．このような全探索をランダムサンプリングで近似する手法として RANSAC や LMedS が知られている．最適な超曲面 (や超平面) を探すために，RANSAC は観測点のランダムサンプリングによって多数の超曲面を生成し，全データがそれぞれの超曲面に対して正常値か例外値を判定する．このとき，正常値とは超曲面との (近似) 距離が与えられた閾値  $e$  以下のものを指し，さもなくば例外値とする．そして正常値の数が最も多い超曲面を最適な超曲面の推定値とする．その一方で，LMedS 推定は観測点と超曲面の (近似) 距離の中央値 (median) が最小となる超曲面を探索する．LMedS 推定には RANSAC で用いる閾値のような予め定める助変数は不要であるが，破綻点が 50%，つまり例外値が 50% 以上ある場合に LMedS 推定は適用できないことが知られている．それ故，例外

値が 50% 以上ある場合も適用できるように LMedS 推定を最小二乗  $\alpha$  百分位点 ( $L_\alpha$ PS; least  $\alpha$ -percentile of squares) 推定に拡張する<sup>(注1)</sup>．この拡張により，破綻点は 50% から  $(100 - \alpha)\%$  となる．この  $L_\alpha$ PS において， $\alpha$  は正常値の割合を規定する助変数と見做すことができる．なお，RANSAC と  $L_\alpha$ PS の一番大きな違いは，RANSAC は与えられた閾値  $e$  以上の誤差をもつデータを無視した推定であり， $L_\alpha$ PS は大きな誤差をもつ順に  $(100 - \alpha)\%$  のデータを無視した推定である，ということである．これら 2 つの手法とは別に，大きな誤差をもつ観測点の影響 (重み) を減少させる推定手法である  $L_k$ PD も適用する． $L_2$  距離に対する  $L_k$ PD は  $0 < k \leq 1$  において最適抽出可能であるから，ランダムサンプリングによって近似解を得ることができ，その中に大域的最適解が含まれる可能性が十分にある．ここで  $k$  を非負の範囲で小さくすることは，RANSAC において閾値  $e$  を小さくすることや， $L_\alpha$ PS において百分位点  $\alpha$  を小さくすることに対応している．これらの関係を明確にするために，次節では実験を行なった．

#### 5. 実験

本稿の実験は全て  $L_2$  ノルムに基づく．まず最小 0.5 乗偏差に基づく直線回帰 (0.5- $L_k$ PD) が 1- $L_k$ PD や LS (2- $L_k$ PD) に比べて頑健であることを示す実験を行なう．一般に 1- $L_k$ PD は LS に比べて頑健であることは知られているが，支点 (leverage point) の影響で推定結果が悪くなる (図 4) ことが知られている [25]．そこで 1- $L_k$ PD における支点の効果をより軽減するために 0.5- $L_k$ PD による超平面回帰を考える．図 4 は，平面上の点列に 0.5- $L_k$ PD (緑実線) 1- $L_k$ PD (青破線)，LS (赤点線) を適用した結果である．図 4 において，左上，右上，左下，右下の順に点を追加しており，(正常値，例外値) の個数は順に (4, 0), (4, 1), (7, 1), (11, 1) である．図 4 から，0.5- $L_k$ PD は 1- $L_k$ PD に比べてより支点の影響を軽減しており，より頑健な推定であることがわかる．本実験により  $k$  の減少に伴いより頑健な推定となることがわかる．しかし 0- $L_k$ PD はどんな小さな誤差も許さないので， $k$  が 0 に近過ぎると一般に推定が悪くなる．

図 5 は人工データへの 2 次曲線回帰結果である．放物線  $y = x^2$  上の点の  $x$  座標を区間  $[-3, 3]$  からの一様分布から生成し，各点に平均 0，分散 0.18 のラプラス分布を曲線の法線方向に添加した人工データに

$$\begin{aligned} & \mathbf{a}^\top (x^2, 2xy, y^2, 2x, 2y, 1)^\top \\ & = (x, y) \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(a_4, a_5) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_6 = 0 \end{aligned}$$

(注1): LMedS 推定は最小二乗 50 百分位点推定 (これを 50- $L_\alpha$ PS のように表すことにする) であり，またミニマックス推定は 100- $L_\alpha$ PS である．

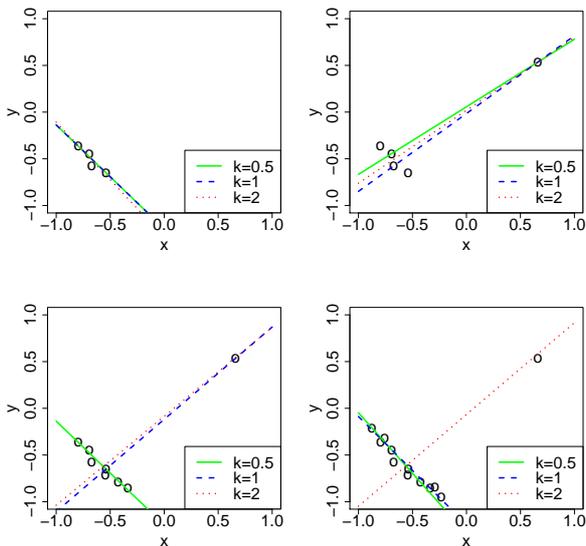


図4  $L_2$  距離に基づく  $0.5-L_k$ PD (緑実線),  $1-L_k$ PD (青破線), LS (赤点線) の比較

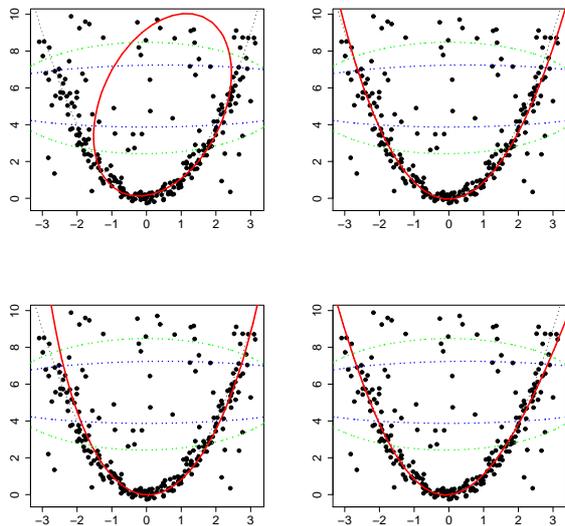


図5 入力空間の  $L_2$  距離に基づく 2 次曲線回帰:  $1-L_k$ PD (左上),  $0.5-L_k$ PD (右上),  $0.25-L_\alpha$ PS (左下), RANSAC (右下)

の型の 2 次曲線を回帰した。生成した点のうち、曲線との最短距離が 0.3 未満のものを正常値、曲線との最短距離が 0.3 以上のものを例外値と決め、正常値 200 点、例外値 50 点に対する回帰を行なった。図 5 における赤実線が回帰結果である。図中の緑点線は特徴空間における LS 推定、青点線は入力空間における LS 推定 ( $2-L_k$ PD) である。図 5 上段から、 $0.5-L_k$ PD は  $1-L_k$ PD に比べてより支点の影響を軽減しており、より頑健な推定であることがわかる。次に、 $L_k$ PD,  $L_\alpha$ PS, RANSAC を比較する。図 5 により、主要な 2 次曲線が単一の場合は、いずれの手法も同等の性能が出ていると考えられる。

最後に実画像からの直線抽出及び 2 次曲線の抽出を

行なった。図 6 は RANSAC,  $5-L_\alpha$ PS,  $0.01-L_k$ PD による直線抽出結果であり、図 7 は RANSAC,  $20-L_\alpha$ PS,  $0.05-L_k$ PD による 2 次曲線抽出結果である。なお、図 7 の下段は 2 次曲線ではなく楕円に限定した場合のあてはめ結果であり、ランダムサンプリングによって得られた 2 次曲線が  $a_1 a_3 - a_2^2 > 0$  の場合にのみ採用したものである。これら実験において、 $640 \times 480$ -pixels の画像をキャニーフィルタ (Canny filter) で変換したエッジ画像から直線抽出では 4769 特徴点、2 次曲線抽出では 2918 特徴点を得た。本実験では直線や 2 次曲線は 20 特徴点以上を含むとし、直線の場合は距離が  $\sqrt{5}$  以下、2 次曲線の場合は近似距離が  $\sqrt{20}$  以下のものを正常値とし、これを RANSAC における閾値として設定した。そして一つ直線や曲線が推定されると、その推定量に属する正常値を全て取り除き、残った特徴点から新たな直線や曲線を推定するという手順を新たな推定量が得られなくなるまで繰り返した。ここで毎回の推定手順において残っている特徴点の個数を  $n$  点としたとき、そこから任意に選んだ  $k$  点 (直線の場合は 2, 2 次曲線の場合は 5) が少なくとも 1 回共に 20 点の正常値から選ばれる確率が  $1 - 10^{-4}$  以上となるように  $\frac{\log(10^{-4})}{\log\left\{1 - \frac{20C_k}{nC_k}\right\}}$  回以上のランダムサンプリングを繰り返した。図 6 は 100 点以上の正常値を含む推定された直線であり、図 7 は 180 点以上の正常値を含む推定された 2 次曲線である。これから  $L_\alpha$ PS は直

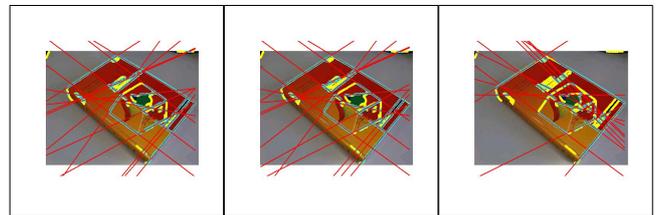


図6 直線抽出法の比較: RANSAC (左),  $5-L_\alpha$ PS (中央),  $0.01-L_k$ PD (右)

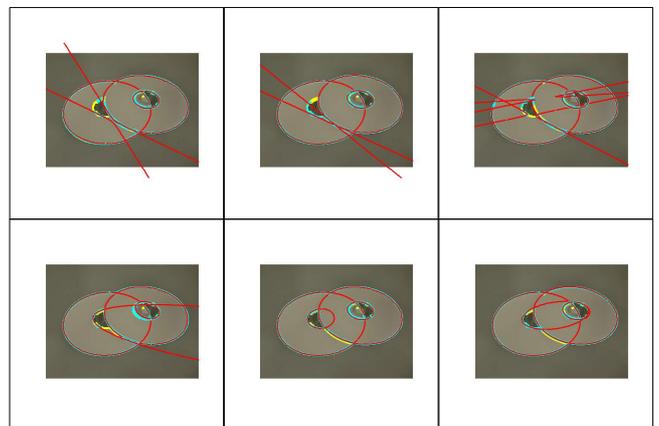


図7 抽出法の比較: 2 次曲線 (上段), 楕円 (下段); RANSAC(左),  $20-L_\alpha$ PS (中央),  $0.05-L_k$ PD (右)

線や2次曲線検出に有効であり, RANSAC と同等の性能をもつと言えるが  $L_k$ PD は本実験における限り有効とは言えない. おそらく RANSAC や  $L_\alpha$ PS が例外値の影響を無視して直線附近の局所的構造のみを捉えるのと比べ,  $L_k$ PD は例外値の影響を低減するだけで無視せずに観測点全体の大域的構造を考慮するためだと考えられる.

## 6. おわりに

本稿では, 1 次元低い超平面や超曲面のあてはめ問題として回帰を捉え, 数多く提案されている回帰を分類し, その結果頑健性の高い MCA の多くは最適抽出可能であることを証明した. また 1 次元低い超平面をあてはめる手法である  $L_\alpha$ PS 及び  $L_k$ PD を提案した. そして  $L_p$  距離に基づく  $L_k$ PD が最適抽出可能である条件を明らかにした. また,  $L_\alpha$ PS 及び  $L_k$ PD に基づくランダムサンプリングに基づく超曲面回帰手法を提案した. そして提案手法の有効性を示すために実験を行なった. 実験により  $L_\alpha$ PS は RANSAC と同様に直線や曲線の検出に有効であることがわかった. しかし  $L_k$ PD の有効性は十分とは言えなかった.  $L_k$ PD が直線検出に有効とは言えない理由は  $L_\alpha$ PS や RANSAC が直線や曲線附近の局所的な構造を考えるのに対して  $L_k$ PD は全データの影響を考慮するからと考えることができ, よって  $L_k$ PD はデータに内在する唯一の主な構造を抽出するのに向いていると考えられる. また, 全般的に特徴点の塊や2つの2次曲線の共通接線の接点附近などの, 局所的に直線状に特徴点が並んでいる場所には交わる2直線と見做せるような双曲線があてはまる傾向にあることがわかった. 現実の環境では直線と2次曲線が混在することが非常に多いので, 直線と2次曲線を同時にうまくあてはめ分ける仕組みを今後考える必要がある.

## 文 献

- [1] S. Akaho, "Curve fitting that minimizes the mean square of perpendicular distances from sample points," SPIE, Vision Geometry II, 1993.
- [2] S. Akaho, "SVM that maximizes the margin in the input space," Chap. 5 of *Artificial Intelligence and Computer Science*, S. Shannon ed.:139-154, 2005.
- [3] S. Amari and M. Kawanabe, "Information geometry of estimating functions in semi-parametric statistical models," *Bernoulli*, **3**(1):29-54, 1997.
- [4] G. Appa and C. Smith, "On  $L_1$  and Chebyshev estimation," *Mathematical Programming*, **5**(1):73-78, 1973.
- [5] W. Chojnacki, M. j. Brooks, A. van den Hangel and D. Gawley, "On the fitting of surface to data with covariances," *IEEE TPAMI*, **22**(11), 2000.
- [6] W. E. Deming, *Statistical adjustment of data*, Wiley, NY, 1943 (Dover Publications edition, 1985).
- [7] C. Ding, D. Zhou, X. He and H. Zha, " $R_1$ -PCA: rotational invariant  $L_1$ -norm principal component analysis for robust subspace factorization," ICML2006.
- [8] R. O. Duda and P. E. Hart, "Use of the Hough transformation to detect lines and curves in pictures," *Comm. ACM*, **15**:11-15, 1972.
- [9] H. Ekblom, " $L_p$ -methods for robust regression," BIT

- NUMERICAL MATHEMATICS, **14**:22-32, 1974.
- [10] M. A. Fischer and R. C. Bolles, "Random sample consensus: A paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography," *Comm. ACM*, **24**:381-395, 1981
- [11] A. B. Forsythe, "Robust estimation of straight line regression coefficients by minimizing  $p$ -th power deviations," *Technometrics*, **14**:159-166, 1972
- [12] 藤木淳, 赤穂昭太郎, "入力空間での計量に基づいた核主成分分析," *信学技報 PRMU*, **108**(327):69-74, 2008.
- [13] J. Fujiki and S. Akaho, "Curve fitting by spherical least squares on two-dimensional sphere," *Subspace 2009 in ICCV2009*.
- [14] 藤木淳, 赤穂昭太郎, "超球面を射影したヒルベルト空間における超平面あてはめ," *信学技報 PRMU*, **109**(182):121-126, 2009.
- [15] 藤木淳, 赤穂昭太郎, "一次元正規分布のなす空間への曲線あてはめ," *IBIS 2009*.
- [16] 藤木淳, 赤穂昭太郎, "頑健なヤコビ核主成分分析を用いた部分空間あてはめ," *情処研報 2010-CVIM-171*(7):1-8, 2010.
- [17] W. M. Gentleman, "Robust estimation of multivariate location by minimizing  $p$ -th power deviations," Thesis at Princeton Univ., and Memorandum MM 65-1215-16, Bell Tel. Labs., 1965.
- [18] P. J. Huber, "Robust estimation of a location parameter," *Ann. Math. Stat.*, **35**:73-101, 1964.
- [19] K. Kanatani and Y. Sugaya, "Unified computation of strict maximum likelihood for geometric fitting," *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, **38**(1):1-13, 2010.
- [20] Y. Iba and S. Akaho, "Gaussian process regression with measurement error," *IEICE Trans. on Info.& Syst.*, **E93-D**(10):2680-2689, 2010.
- [21] Q. Ke and T. Kanade, "Robust  $L_1$  norm factorization in the presence of outlier and missing data by alternative convex programming," *CVPR2004*.
- [22] N. Kwak, "Principal component analysis based on  $L_1$ -norm maximization," *IEEE TPAMI*, **30**(2), 2008.
- [23] E. Oja, *Subspace Methods of Pattern Recognition*, Research Studies Press Ltd., 1986.
- [24] W. Rey, "On least  $p$ -th power methods in multiple regression and location estimations," *BIT NUMERICAL MATHEMATICS*, **15**(2):174-184, 1975.
- [25] R. J. Rousseeuw and A. M. Leroy, *Robust Regression and Outlier Detection*, John Wiley & Sons, NY, 1987.
- [26] P. D. Sampson, "Fitting conic sections to 'very scattered' data: an iterative refinement of the Bookstein algorithm," *Comput. Vision, Graphics, and Image Processing*, **18**:97-108, 1982.
- [27] G. Taubin, "Estimation of planar curves, surfaces, and nonplanar space curves defined by implicit equations with applications to edge and range image segmentation," *IEEE TPAMI*, **13**(11), 1991.
- [28] S. Watanabe, P. F. Lambert, C. A. Kulikowski, J. L. Buxton and R. Walker, "Evaluation and selection of variables in pattern recognition," *Comp. & Info. Sciences II*(Julius Tou, ed.), New York: Academic Press, 91-122, 1967.
- [29] L. Xu, E. Oja and P. Kultanan, "A new curve detection method: Randomized Hough Transform (RHT)," *Pattern Recognition Letters*, **11**(5):331-338, 1990.
- [30] L. Xu, E. Oja and C. Suen, "Modified Hebbian learning for curve and surface fitting," *Neural Networks*, **5**(3):441-457, 1992.