

同一音高の音符の相関を利用した音圧関数の 1/f スペクトルと音高の 1/f ゆらぎ

三谷 尚[†] 井手詩織^{††}

楽曲に関連するフーリエ・スペクトルを求めるために、一旦、相関関数を求め、Wiener-Khinchin の定理でスペクトルを求める方法に利点を見出した。なお、この方法によるスペクトルと、直接的スペクトル計算は比較し、妥当性をチェックしなければならない。

これまでに音圧関数について、この方法を適用したが、近似を用いていた。今回、この近似の妥当性を明らかにし、かつ、音高関数についても、相関関数経由の方法を適用する。音高関数のスペクトルは、いわゆる $1/f$ ゆらぎとして知られるものであり、楽曲構成の点からこの本質に迫り得る。

Spectrum with 1/f of sound pressure and 1/f fluctuation of sound height using correlation with music notes with a same sound height

HISASHI MITANI[†] SHIORI IDE^{††}

We find a benefit that, once obtaining a correlation function, then one obtain spectrum function using Wiener-Khinchin's theorem. Here, we must compare and check results of Fourier spectrum by the method, with the one by direct Fourier transformation.

Since now, we adopt this way to sound pressure function, with an approximation. Now, we clarify a justice of the approximation, and also use a correlation function of sound height function. A spectrum of fluctuation of sound height is just widely known 1/f fluctuation, then we can obtain real reason of the spectrum, so called 1/f fluctuation.

1. はじめに

音の低周波 $1/f$ 型スペクトルについては、1950年代頃からは、電流の熱雑音等と共に注目が集まった。この内容は Voss and Clarke [1] の論文をほぼ出発点とし、日本では、武者等 [2] による議論がさかんに行われた。ここで、スペクトルとは横軸を周波数とするグラフであるが、縦軸に登場するスペクトル関数は一意ではなく、議論を整理しないといけない。表 1 は、主たるスペクトル関数を列挙したものである。

表 1 低周波 $1/f$ 型を提示するスペクトル関数

主たる対象	フーリエ像の形態	注釈	1/f 型の出現理由	
			Intrinsic [b]	Voss et al.[1]
音圧関数 $p(t)$	(a) $p(t)$ の (1 乗の) フーリエ変換 $F\{p(t)\}$	本稿では (a) の絶対値の 2 乗を 'パワースペクトル' と呼ぶ。		
	(b) $p(t)^2$ のフーリエ変換 $F\{p^2(t)\}$	(b) はパワースペクトルとは呼ばない。	Trivial [a]	[1]
音高関数 $h(t)$	(c) Zero level cross 点の密度のフーリエ変換 $F\{h(t)\}$	単旋律の他、多声部にも適用可	$h(t)$ の平均値を引けば、Intrinsic	[1] 武者 [2]

上記に示される様に、スペクトル関数は音の基本量である音圧関数（大気圧からの変化分） $p(t)$ のフーリエ変換と、その性質の 1 つである音高 $h(t)$ に関連するフーリエ像 [1] に大別される。通常「 $1/f$ ゆらぎ」として語られる概念は後者である。本発表では音圧関数および音高関数のスペクトルの両方について扱う。

2. フーリエ・スペクトルと Wiener-Khinchin の定理

上記の音圧関数 $p(t)$ 或いは、音高関数 $h(t)$ のフーリエ・スペクトルを求める方法として、(A) まず相関関数を求め、さらに、相関関数とスペクトルの関係である Wiener-Khinchin の定理 (以下、WK 定理) を利用してスペクトルを求める方法、および、(B) 相関関数を経ずに直接フーリエ変換によって求める方法がある。(図 1 参照) 図 1 では、音圧関数、音高関数の両者の扱いを同時に示すため、「信号関数」

$x(t) = p(t), h(t)$, 相関関数 $C(\tau) = C_p(\tau), C_h(\tau)$ 等を表記する。

[†] 福岡教育大学; Fukuoka University of Education

^{††} 九州大学 芸術工学府; Department of Acoustic Design, Kyushu University

a) Trivial とは、有限区域のフーリエ積分によって被積分関数の定数成分が、 $1/f$ スペクトルを生むこと。

b) Intrinsic では上記以外の理由で $1/f$ スペクトルが登場。

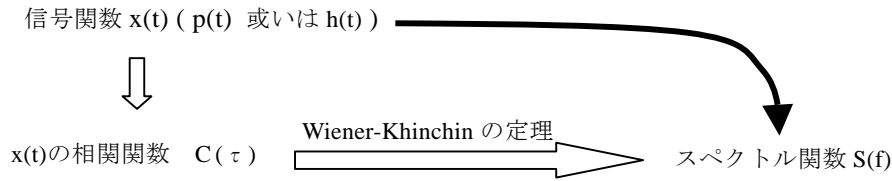


図1 音圧関数のスペクトルを得る2種類の方法

3. 音圧関数のスペクトル

音圧関数のモデルとして、音符に基いて、正弦関数を念頭に置く(図2参照)。

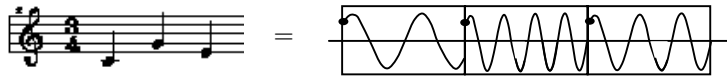


図2 音符に対応する典型的な音圧関数の波形

この音符の音圧は本質的に次の関数で表され、これで構成される音楽を「モデル音楽」と呼ぶ。 $p_n(t) = p_0 \cos(\Omega_n(t - t_n) + \varphi)$, ($t_n < t < t_{n+1}$)。なお少なくとも、同じ音高の音は、 $t = t_n$ における音開始時に、同じ付加位相 φ を有する。またモデル音楽では、すべての音が同一の音量を持つものとする。

3.1 直接、フーリエ変換して求める方法

図2の様な関数を基本とする楽曲、Bachの小品(詳細は図3)を、フーリエ変換する。ここでは、 $1/f$ 型スペクトルが見える低周波領域のみを示す。これにより、べき数 β が求められる。(解析の都合上、一旦パワースペクトルが求められるので 2β も記す。)

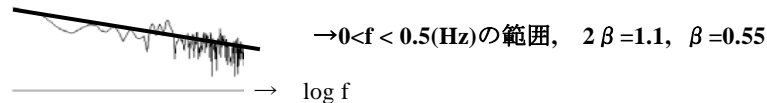


図3 Bach (Piano 小品 March Gdur 高音部) のスペクトル (両対数; one note = 1(sec))

3.2 相関関数を利用する方法

まず、相関関数の導出に使われる以下の式を考える。(なお、時間間隔 τ は、楽曲における音符の単位長さ Δt_1 を単位に持つ。 $\tau = \xi \Delta t_1$ 、ここで ξ は無次元時間。)

$$\langle (p(t+\tau) - p(t))^2 \rangle = 2 \langle p(t)^2 \rangle - 2 \langle p(t+\tau)p(t) \rangle \quad (1)$$

ここで $\langle (p(t+\tau) - p(t))^2 \rangle \equiv D(\tau)$, $\langle p(t)p(t+\tau) \rangle \equiv C(\tau)$ と定義。特に

$$C(\tau) = \langle p(t)^2 \rangle - D(\tau)/2$$

平均操作 $\langle \rangle$ は、特に断らなければ全時間についての平均であるが、次の形が有用。

$$D(\tau) = \sum_m \alpha_m(\tau) D_C^m(\tau) + (1 - \alpha(\tau)) D_{non-c}(\tau) \quad (2)$$

ここで $D_C^m(\tau)$ を、時間間隔 τ を隔てて、 m 番目の同一の音高が一致する場合の $D(\tau)$ の平均値; $D_{non-c}(\tau)$ は音高が一致しない音どうして、値は0。

なお $\alpha_m(\tau)$ は、 τ 隔てた間隔において、音高 m の音符ペアが存在する確率。ここで $\alpha(\tau) \equiv \sum_m \alpha_m(\tau)$ 。特に、

$$D_C^m(\tau) = p_0^2 (1 - \cos(2\pi \Omega \Delta t_1 \xi))$$

よって、 $C(\tau) = (p_0^2/2) \sum_m \alpha_m(\tau) \cos(2\pi \Omega \Delta t_1 \xi)$ 。ここで楽曲 Bach Piano 小品, “March”

G-dur (高音部に限る) に対して $\alpha_m(\tau)$ を求め $C(\tau)$ を得た。(図4A参照)

[なお2011年2月の音情研・音響研究会での発表では、 $\alpha_m(\tau) \approx \alpha(\tau)/M$ と

近似し、この上、さらに $\sum_m \cos(2\pi \Omega \Delta t_1 \xi) \propto \delta(\xi)$ と近似した。($\xi = \xi \bmod 1$)、

これによれば $C(\tau) \propto \alpha(\tau) \delta(\xi)$ 、であり、 $C(\tau)$ は $\alpha(\tau)$ に比例する曲線上の離散点(図4Aの○位置を平滑化したもの)を値に持ち、他は0となる関数とみなされる。

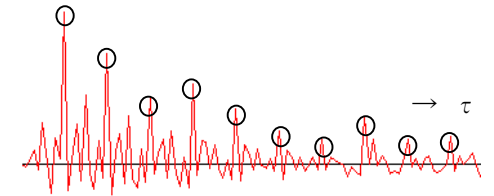


図4A 相関関数 $C(\tau)$ (Bach March, G dur)

この近似によれば、図4Bから $C(\tau) \propto \tau^{-\gamma}$ の関数形を仮定し、 $\tau = n\Delta t_1$ にのみとびとびの値を持つとし、さらに、 $C(\tau)$ から $S(f)$ を得るためWK定理を用いる。但しフーリエ変換は、フーリエ級数に置き換わる。]

再び図4Aに戻り、WK定理を近似なしに用いることにより、 $S(f)$ を得る。これから、べき数 β が求められ、 $2\beta = 0.65$ 、 $\beta = 0.33$ を得る。(図5参照)

再び図4Bに即し、近似に戻る：

$C(\tau) \propto \alpha(\tau) \propto \tau^{-\gamma}$ (連続関数)であれば、 $\tilde{\beta} \equiv 2\beta - 1 - \gamma$ となる。しかし離散的であるため、経験的に $\tilde{\beta} = 1.55 - 1.50\gamma$ と考える。

図4Bによれば $\gamma = 0.60$ 。この「規則」によれば、 $\tilde{\beta} \equiv 2\beta = 0.65$ 。よって $\beta = 0.33$ となる。これは、近似によらない正確な計算と一致している。

以上から、直接のフーリエ変換によるスペクトルでは $\beta = 0.55$ 。相関関数経由では近似による依らないに関わらず $\beta = 0.33$ 。

両べき数どうしの一致は $\alpha_m(\tau)$ のデータ数を増やすことで可能と考えられる。

4. 音高関数のスペクトル

音高関数としては、音符に基づく振動状況に関して、正弦関数の振動数に比例し、単なる高さとなる。(図6参照)。

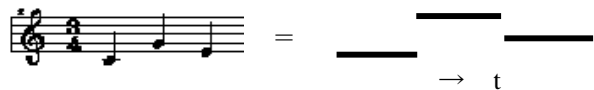


図6 音高関数
= 音符に対応する振動数

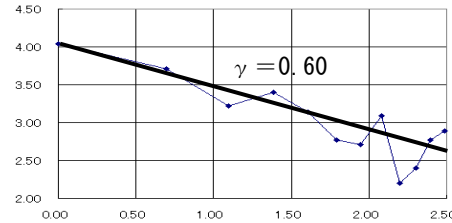


図4B 相関関数 $C(\tau)$ (両対数). 図4Aに現れたピークのみ捉え、 δ 関数的に使用する。

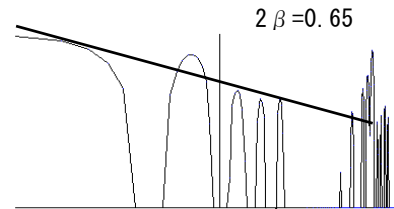


図5 相関関数(図4A)からWK定理により求められたスペクトル $S(f)$ (両対数)

一般的に、音符の音高の定義が問題となる。単旋律音楽の場合、もちろん問題はない。特に問題なのは、複旋律(独奏と伴奏、合奏)の場合で、effectiveな音高について、今後、知見を得ていく必要がある。

4.1 直接、フーリエ変換で求める方法

モデル音楽のパソコン上でのフーリエ変換を、音高関数に対し、直接フーリエ変換によって求めた。両対数グラフの傾斜(図7)から、べき数は $2\beta = 1.64$ 、 $\beta = 0.82$ と求められた。

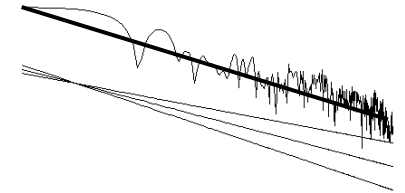


図7 音高関数のフーリエ変換によるスペクトル $S(f)$ 、両対数

4.2 相関関数を利用する方法

相関関数の導出は、音圧関数の場合と基本的に等しい。但し、音圧関数のD関数は p_3 の(2)式が有用だったが、音高関数については、原初の

$D(\tau) = \langle (h(t+\tau) - h(t))^2 \rangle$ の形式を用いるのが妥当で、さらに

$C(\tau) = \langle p(t)^2 \rangle - D(\tau)/2$ を用いる。これによれば、 $C(\tau)$ の $\tau \approx 0$ 近傍ではべき形で、べき数が、 $\gamma = 0.11$ となった。さらにWK定理を用いて、 $C(\tau)$ をフーリエ余弦変換(今回は文字通り、積分変換)することでスペクトル密度関数(パワースペクトル)を得ることができる。これからべきが求められる。 $\tilde{\beta} = 1 - \gamma = 0.40$ 。定義上 $\tilde{\beta} = 2\beta$ であり、 $\beta = 0.20$ となる。

以上から、スペクトル関数のべき数は、直接のフーリエ変換によるものでは、 $\beta = 0.82$ 、相関関数経由では $\beta = 0.20$ であり、両方法によるべき数どうしは一致しない。この考察・改良が求められる。また、長年多くの人によって考えられてきた「実効的な音程ゆらぎの描像」と、一方、本研究の手法の対比が重要である。

参考文献

- 1) R.F.Voss and J.Clarke, J. Acoust. Soc. Am. 63(1), (78) 258
- 2) 武者利光編 ゆらぎの科学3 森北出版 1993年