

巡回セールスマン問題に対するヒューリスティック解法

星野 貴弘*, 浜松 芳夫 (日本大学)

Heuristic Methods for Traveling Salesman Problem
Takahiro Hoshino, Yoshio Hamamatsu (Nihon University)

In this study, we propose an algorithm based on convex hull insertion (CHI) method for the traveling salesman problem (TSP). CHI method and proposed algorithm construct solutions by inserting city to a partial tour. Proposed algorithm is an improvement of insertion procedure in CHI method. This algorithm sets a threshold of the angle between the route from the inserted city to next city and the route from the inserted city to previous city. The city of the maximum angle is inserted, if there are angles being greater than a threshold. Insertion procedure is changed, if there is no angle being greater than a threshold. In order to evaluate the accuracy of solutions obtained using the algorithm, the proposed algorithm and CHI method are applied to 19 benchmark problems: 51-783 city problem in TSPLIB 95. As a result, proposed algorithm finds shorter tours than CHI in 16 problems.

キーワード：巡回セールスマン問題, Convex Hull Insertion 法, しきい値
(traveling salesman problem, convex hull insertion method, threshold)

1. はじめに

本研究では, 巡回セールスマン問題 (Traveling Salesman Problem, 以下, TSP) の近似解法について検討する。TSP とは, いくつかの都市とそれらの間の距離が与えられたとき, すべての都市を一度ずつ通り元の都市まで戻る巡回路のうち, 最短となる巡回路を求める問題である。TSP は, 配送計画問題やプリント基板のドリル穴空け問題など多くの工学的応用例が存在する重要な問題である。

TSP の最適解を得るには, すべての巡回路とその巡回路長を列挙し, その中から最短となる巡回路を解とすればよい。都市 i から j の距離と都市 j から i の距離が等しい対称 TSP における巡回路の総数は, 都市数を N とすると $(N-1)!/2$ となる。したがって, 都市数 N の増加により巡回路の総数は, 指数関数的に増加するため, 上述した方法では現実的な時間内に最適解を得ることは困難である。

このような背景から, 近似解法などの現実的な時間内に準最適解を得る方法が提案されてきた⁽¹⁾⁽²⁾。TSP の近似解法には, 基となる巡回路の無い状態から巡回路を生成する構築法と何らかの巡回路が既に得られているとき, それを巡回路長の短い巡回路に改良していく改善法⁽³⁾が挙げられる。また, 遺伝的アルゴリズムなどのメタヒューリスティクスも TSP に対する有効な近似解法として挙げられる⁽⁴⁾。

構築法の 1 つである Convex Hull Insertion 法 (以下, CHI 法) は, 都市の凸包⁽⁵⁾を初期の巡回路とし, それ以外の都市を最近挿入法により初期巡回路に加えながら巡回路を構築する方法である。凸包とは, 与えられた点の集合に対して, それらをすべて含む最小面積の凸多角形のことである。本研究では, CHI 法における都市の追加方法を改良した解法

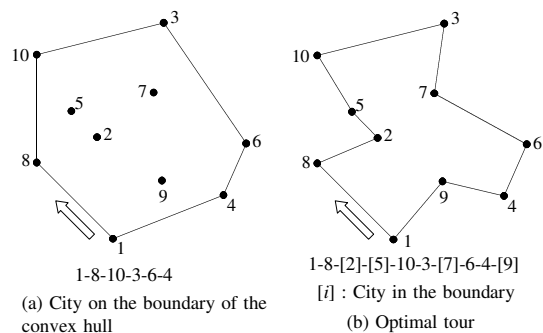


図 1 凸包と最短巡回路

Fig.1. Convex hull and optimal tour

を提案する。また, TSP のベンチマーク問題に対して CHI 法と提案手法の求解精度を比較し, 提案手法の有用性を検討する。

2. TSP と CHI 法について

〈2・1〉 対称 TSP 本研究では, 平面上に配置された N 個の都市が与えられた際の対称 TSP を扱うものとする。都市 i の座標点 (x_i, y_i) , 都市 j の座標点 (x_j, y_j) とすると, 2 都市間の距離として,

$$c_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \dots \dots \dots (1)$$

により表されるユークリッド距離 c_{ij} を用いる。また, 対称 TSP であるため, 都市 i から j の距離と都市 j から i への距離は等しいものとする。すなわち, $c_{ij} = c_{ji}$ の関係が成り立つ。

〈2・2〉 CHI 法 文献(6)において, 凸包の境界上に

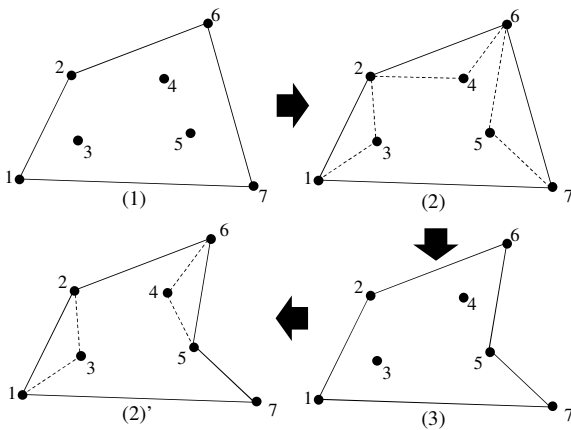


図2 CHI法のアルゴリズム
Fig.2. Algorithm of convex hull insertion

ある都市の順番は、最適解においても維持されることが示されている。例として Fig.1(a) では、凸包の境界上の都市を1から時計回りに列挙すれば、1-8-10-3-6-4となり、この順番は、Fig.1(b)の最短巡回路においても維持されている。すなわち、TSPの最適解は凸包の境界上の都市に対して、内部の都市を追加することで得られる。

この最適解と凸包の関係から、CHI法は凸包の境界上の都市を初期巡回路としている。また、初期巡回路上にない都市の追加方法に関しては、次のアルゴリズムで詳細に述べるが、都市の追加に伴う巡回路長の増加量(追加コスト)が小さくなるように現在までの巡回路に追加していく。

- (1) 都市を頂点とする凸包の境界上の都市を初期巡回路とする (Fig.2 (1))。
- (2) 部分巡回路上の連続した都市を i, j とし、部分巡回路内の都市を k とするとき、各都市 k に対して、追加コスト $(c_{ik} + c_{kj} - c_{ij})$ を計算し、この値を最小とする都市 $i - j$ を求める (Fig.2 (2))。
- (3) (2) で求めた都市と挿入位置の組合せそれぞれについて、追加コスト比 $\{(c_{ik} + c_{kj})/c_{ij}\}$ を計算し、この値を最小とする都市 k を追加する (Fig.2 (3))。
- (4) すべての都市を通過する巡回路ができた場合には処理を終了し、通過していない都市がある場合には、(2) の操作に戻る (Fig.2 (2'))。

CHI法は、凸包の頂点集合を初期巡回路にすることにより、nearest neighbor法やgreedy法などの構築法に比べ求解精度が高いことが知られている⁽¹⁾。

3. 提案手法

〈3・1〉 CHI法からの変更点

CHI法は、追加コストと追加コスト比が小さい都市から順に部分巡回路に加えられるため、部分巡回路上の都市が多くなるにつれて、追加コストや追加コスト比が大きくなりやすい。そこで、提案手法では追加基準に対してしきい値を設け、しきい値によっては都市の追加方法を変更する。

しきい値として追加コストや追加コスト比を用いることが考えられるが、これらの値域は0から ∞ までであるた

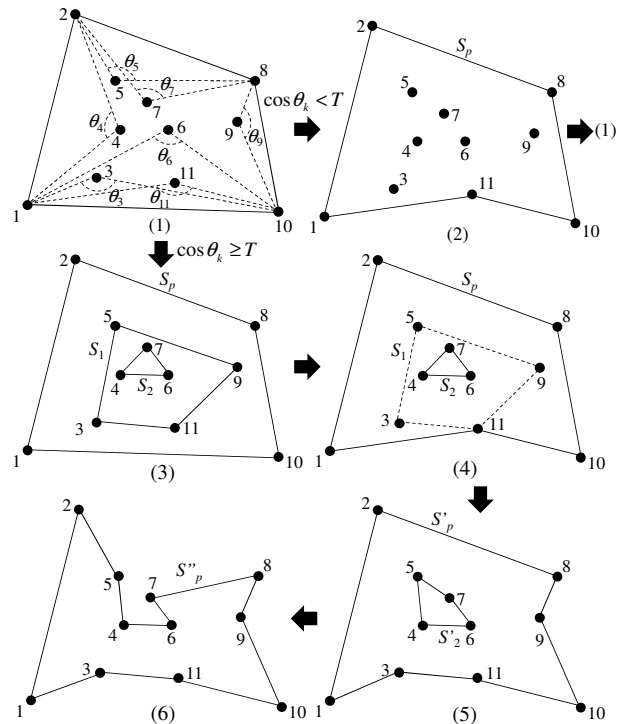


図3 提案手法のアルゴリズム
Fig.3. Algorithm of proposed method

め、適切なしきい値を設定することが難しい。そこで、先ほどのCHI法の手順(3)を次のように変更する。部分巡回路内部の都市と巡回路上の連続した2都市を結ぶ経路がなす角を θ_k とすると、

$$\cos \theta_k = \frac{c_{ik}^2 + c_{kj}^2 - c_{ij}^2}{2c_{ik}c_{kj}} \dots \dots \dots (2)$$

を求め、この余弦の値を最小とする都市を追加する。すなわち、 θ_k が最大となる都市を追加する。今後、この角 θ_k を“追加経路角”と呼ぶことにする。追加される都市は巡回路の内部にあるため、 $\theta_k, \cos \theta_k$ の値域はそれぞれ、 $0 \leq \theta_k \leq \pi[\text{rad}]$, $-1 \leq \cos \theta_k \leq 1$ である。解の探索範囲を限定できることから、追加経路角の余弦の値に対してしきい値を設けるものとする。追加経路角が減少するほど相対的に追加コストは増加する傾向にある。そのため、余弦がしきい値以上となる場合には、都市の追加方法を変更する。具体的な方法は、次節で説明する。

〈3・2〉 アルゴリズム

提案手法においても、CHI法と同様に凸包の境界上の都市を初期巡回路とする。Fig.3に示す11都市問題を例として、提案手法の初期巡回路決定以降のアルゴリズムを以下に示す。

- (1) CHI法の手順(2)と同様の操作により各都市の挿入位置を決定する (Fig.3(1))。
- (2) 追加経路角の余弦がしきい値 T 未満となる巡回路内部の都市が1つでも存在する場合は、余弦の値を最小とする都市を追加し、再び手順(1)に戻る (Fig.3(2))。

- (3) 巡回路内部すべての都市の余弦がしきい値 T 以上となる場合は、部分巡回路 S_p 内の都市の凸包を生成し、その頂点集合を内部巡回路 S_1 とし、さらに内部の凸包の頂点集合を最内部巡回路 S_2 とする。Fig.3(3) では、 $S_p = \{1, 2, 8, 10\}$, $S_1 = \{3, 5, 9, 11\}$, $S_2 = \{4, 7, 6\}$ である。
- (4) 内部巡回路上の都市 k に対して、 S_p および S_2 の連続した 2 都市への最小追加コストをそれぞれ求める。追加コストを最小とする都市 k を最小追加コストを与える巡回路側に追加する。この操作を内部巡回路の都市が S_p または S_2 にすべて追加されるまで繰り返す。Fig.3(4) では、内部巡回路上の都市 11 を最小追加コストを与える S_p 側に追加し、残りの都市 3, 5, 9 に関しても同様の手順により追加する。
- (5) (4) の操作により更新された巡回路を S'_p とし、最内部巡回路を S'_2 とする (Fig.3(5))。
- (6) S'_2 の連続した都市を l, m , S'_p の連続した都市を i, j とするとき、追加コスト $c_{li} + c_{jm} - c_{ij} - c_{lm}$ を最小とする位置に最内部巡回路を部分巡回路に繋げ ($i-j$ と $l-m$ の枝を削除し、 $i-l$ と $j-m$ を繋げる)、新たな部分巡回路 S_p とする。Fig.3(6) では、2-6 と 5-7 の枝を削除し、2-5 と 7-8 の枝を繋ぐことにより最短巡回路が得られた。
- (7) すべての都市を通過する S_p ができた場合には、処理を終了し、残っている都市がある場合には、(1) の操作に戻る。

4. 性能評価および考察

基本の CHI 法と区別するため、3.1 節で述べた追加基準を追加経路角の余弦に変更した CHI 法を LCI (Least Cosine Insertion) 法と呼ぶことにする。また、本研究で提案した手法を HCHI (Hybrid CHI) 法と呼ぶことにする。本章では、CHI 法、LCI 法との比較により、提案手法の有効性を検討する。

〈4・1〉 実験条件 各手法により得られた解 (巡回路) の最適解に対する誤差率を評価基準とするため、TSPLIB 95⁽⁷⁾ のベンチマーク問題を用いる。本実験では、その中の 51 都市問題から 783 都市問題までの計 19 問題を対象とした。また、各手法の近似値から誤差率 [%] は、

$$\text{誤差率 [\%]} = \frac{\text{近似値} - \text{最適値}}{\text{最適値}} \times 100 \dots \dots \dots (3)$$

により求めた。HCHI 法では、しきい値により異なる解が得られる。そこで、しきい値を -1 から 1 まで 0.01 刻みで変化させることにより得られる計 201 個の解を求め、その中の最良解を HCHI 法の近似解とした。

また、各手法の近似解の導出は CPU Core2 Duo 3.33GHz, Memory 3.21GByte の PC により行った。

〈4・2〉 実験結果 各手法により得られた解の精度と計算時間の比較を行う。まず、問題 kroA100 の各手法の解を比較する。

Fig.4 の (a) に CHI 法、(b) に LCI 法、(c) に HCHI 法、

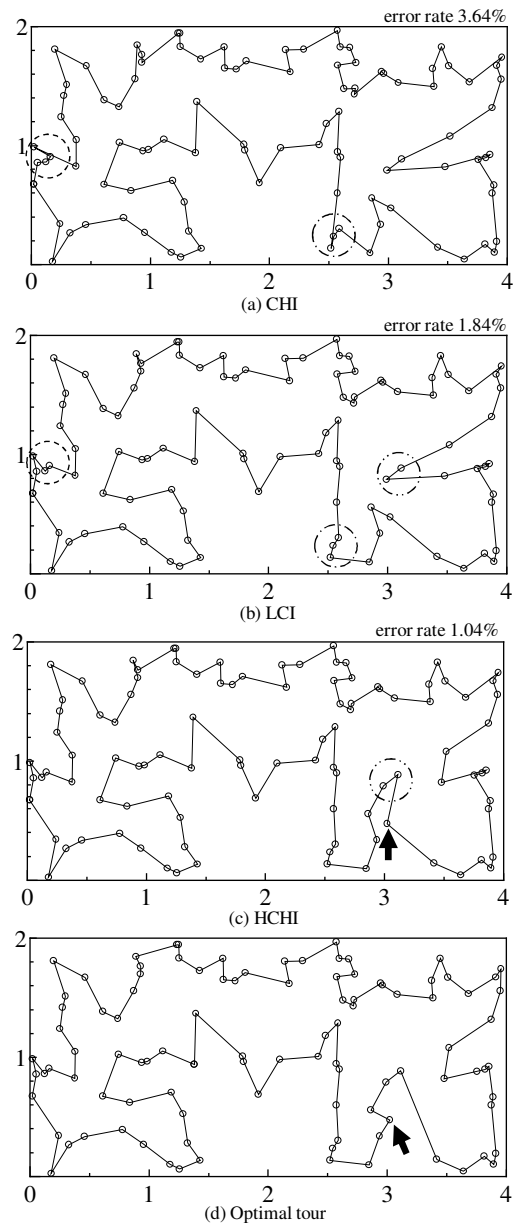


図 4 各手法の解

Fig. 4. Solutions of each method

(d) に最適解をそれぞれ示す。図中の○印は都市、実線は巡回路を示したものである。(a) の CHI 法と (b) の LCI 法を比較すると、破線と一点鎖線で囲まれた箇所それぞれ経路の改善がみられる。これは、追加基準を追加コスト比から、追加経路角に変更することにより追加経路角が急角度となる都市の追加が行われにくくなったためである。また、LCI 法と (c) の HCHI 法を比較すると、2 点鎖線で囲まれた箇所での改善がみられる。これは、しきい値を設けることによって、最内部巡回路上の複数都市を追加することで、追加コストの増加が抑えられたためである。そして、HCHI 法と (d) の最適解では、複数箇所異なる経路が存在するが、特に HCHI 法の解の精度を落とす原因となって

いるのは、矢印で示された都市に対する経路である。

次に、各手法の近似値の誤差率について比較する。Table.1 から 4 に 51 都市問題から 783 都市問題までの 19 問題に対する、CHI 法、LCI 法、HCHI 法の誤差率をそれぞれ示す。表中のアンダーラインが引かれた問題は、CHI 法に比べて HCHI 法の方が精度の悪い問題である。Table.1 に示す 100 都市未満の問題では、berlin52 以外の 4 つの問題において、CHI 法に比べ、HCHI 法は精度の改善がみられる。berlin52 の CHI 法の結果は、同じ CHI 法の結果の中でも比較的、高精度である。

Table.2,3 に示す 100 都市以上 500 都市未満の問題では、すべての問題において、CHI 法に対して HCHI 法は精度が改善された。しかし、lin105, kroA150, rat195 の結果からわかるように LCI 法と HCHI 法は同じ精度であり、しきい値を設けて部分巡回路内の都市の追加方法を変更した効果はみられなかった。

Table.4 に示す 500 都市以上の問題では、rat783 において精度の改善がみられるものの、その改善量は小さく、さらに他の 2 問題では精度が悪くなっている。Table.2,3 の結果と同様にしきい値を設けることによる追加方法の変更は、精度の向上において、有効ではないことがわかる。以上により、500 都市未満の問題においては、HCHI 法は精度向上において、有効な構築法であるが、500 都市以上の問題に対しては、また別の構築法を考える必要がある。

表 1 各手法の誤差率 (1)[%]

Table 1. Error rate of each method (1) [%]

Method	eil51	<u>berlin52</u>	st70	eil76	rat99
CHI	3.36	1.10	4.39	5.74	3.96
LCI	5.34	2.43	5.35	6.64	5.37
HCHI	2.24	2.36	3.86	2.11	3.28

表 2 各手法の誤差率 (2)[%]

Table 2. Error rate of each method (2) [%]

Method	kroA100	eil101	lin105	bier127	ch130	kroA150
CHI	3.64	5.73	5.76	7.08	10.17	7.69
LCI	1.84	4.33	2.40	5.33	6.74	4.16
HCHI	1.04	3.69	2.40	1.43	5.90	4.16

表 3 各手法の誤差率 (3)[%]

Table 3. Error rate of each method (3) [%]

Method	rat195	kroA200	gil262	lin318	rd400
CHI	10.04	5.37	12.24	11.16	10.18
LCI	7.38	4.12	8.13	8.57	8.10
HCHI	7.38	3.64	4.92	8.16	6.86

表 4 各手法の誤差率 (4)[%]

Table 4. Error rate of each method (4) [%]

Method	<u>att532</u>	<u>rat575</u>	rat783
CHI	5.44	9.66	12.33
LCI	5.60	10.05	11.87
HCHI	5.57	10.05	11.87

最後に、CHI 法と HCHI 法の計算時間の比較を行う。各手法の 150 から 532 都市問題に対して、近似解導出までの計算時間を Table.5 に示す。LCI 法の結果は、CHI 法の追加基準を変更しただけで、基本的なアルゴリズムが同じであるため、省略した。Table.5 より、HCHI 法は CHI 法の計算時間に比べ、約 100 倍程度増加している。HCHI 法は、複数のしきい値に対してそれぞれ解が得られ、その中の最良解を近似解としているためであり、本実験では、201 個の解を求めている。しきい値を超えた場合には、最内部凸包の複数の都市が一度に追加されるため、計算時間は 201 倍より短く、約 100 倍程度になったと考えられる。したがって、都市数が 500 都市程度であれば、1 つあたりの解の導出時間は、HCHI 法の方が短時間である。

表 5 計算時間の比較 [ms]

Table 5. Comparison in the calculation time [ms]

Method	kroA150	gil262	lin318	rd400	att532
CHI	47	141	250	438	1063
HCHI	3360	15359	29031	51766	143531

5. むすび

本研究では、CHI 法における都市の追加基準を追加経路角の余弦に変更し、余弦によっては、都市の追加方法変更する TSP の構築法を提案した。

TSPLIB 95 のベンチマーク問題に対し、提案手法を適用した結果、都市数が 500 未満の問題においては、求解精度の改善に有効な手法であることを明らかにした。しかし、500 都市以上の問題に対しては、同程度、または精度を落とす結果となったため、この点に関しては今後の検討課題である。また、提案手法は、しきい値毎に解が得られるため、CHI 法に比べ、計算時間は長くなった。今後は、計算時間をより短くするため、最良解を与えるしきい値の探索方法や選定方法についても検討する必要がある。

参考文献

- (1) E.L.Lawler, J.K.Lenstra, "The Traveling Salesman Problem", John-Wiley and Sons (1985)
- (2) 山本・久保:「巡回セールスマン問題への招待」, 朝倉書店 (1997)
- (3) 村野・松本:「巡回セールスマン問題の近似解法の比較」, 信学技報, NLP2002-93, pp.1-6 (2003)
- (4) 山村・小野・小林,「形質の遺伝を重視した遺伝的アルゴリズムに基づく巡回セールスマン問題の解法」, 人工知能誌, 7, 6, pp.1049-1059 (1992)
- (5) M. ドバーク・M. ファンクリバルド・M. オーバマーズ・O. シュワルツコップ:「コンピュータ・ジオメトリ」, 近代科学社 (2000)
- (6) 竹中・船渡:「巡回セールスマン問題の遺伝的アルゴリズムに対する凸包の応用」, 信学技報 SS97, pp.17-24 (1998)
- (7) G. Reinelt, "TSPLIB 95", Universität Heidelberg, <http://www2.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/>, (1995)