Vol.2011-MPS-85 No.20
2011/9/16

外れ値の影響を緩和したリスク最小化ポートフォリオモデル

吉 井 芳 樹[†1] 宮 崎 浩 一[†1]

過去のポートフォリオの平均実現リターンを将来の期待リターンの予測値として用いる場合に，過去のリターンデータに外れ値が含まれていると，精度の高い予測値が得られないことがある．先行研究では，この問題に対処するため，ロバスト推定法 (M 推定法) を最小分散モデルに応用して外れ値の影響を緩和している．しかし，極端な外れ値に関しては，緩和するよりも除去する方が望ましいことが考えられ，本研究ではこのような外れ値を除去して最小分散ポートフォリオや M ロバストポートフォリオを推定する手法を示し，日本株式市場を対象としてその有効性を検討する．

Risk-Minimizing Portfolio Model with Reduced Outlier Influence

Yoshiki Yoshii[†1] and Koichi Miyazaki[†1]

When we adopt past portfolio average return estimated in the minimization of the portfolio variance as a forecast of future portfolio expected return, the forecasted return is often not robust due to outliers included in the past sample data of the portfolio return. Utilizing the robust estimation technique in the minimization of the portfolio variance is one way to reduce the influence of the outliers in the estimation. However, regarding the extreme outlier, it sometimes had better be removed rather than used with reduced influence. This study provides the method to remove the outliers in the estimation of the minimum-variance or the M-robust portfolios and empirically examines the effect of the method in the Japanese equity market.

1. はじめに

金融市場におけるポートフォリオ最適化問題とは，投資対象となる複数の金融資産に対し，資産配分を決定する問題である．ポートフォリオ最適化問題として最初に数理的なモデルを示したのが，Markowitz[1)] である．Markowitz は，ポートフォリオのリターンとリスクを，各々の資産のリターンの平均値と分散共分散行列を用いて表現し，所与のリターンを制約条件としてリスクを最小化することで最適資産配分を推定する，リスク最小化ポートフォリオモデル (平均分散モデル) を提案した．しかし，平均分散モデルを用いた場合のアウトサンプルでのパフォーマンスは必ずしも芳しくない．

平均分散モデルのアウトサンプルのパフォーマンスが芳しくない結果となる要因の 1 つに，想定分布 (通常正規分布) に従わない外れ値による推定誤差の影響が考えられることから，DeMigiuel and Nogales[2)] は，アウトサンプルにおける分散共分散行列の推定誤差の影響を低減するために，ロバスト推定の 1 つである M 推定を用いて，外れ値の影響を緩和したリスク最小化ポートフォリオを構築する手法を提案した．M 推定とは，推定値からの残差が所与の閾値より大きい場合に，その残差を小さく評価するような損失関数を用いることで外れ値が推定値に及ぼす影響を緩和する推定法である．彼らは，この M 推定を用いたリスク最小化ポートフォリオモデル (M-ポートフォリオモデル) を，米国株式市場に利用した場合のアウトサンプルのパフォーマンスに関して詳細に検討し，その有用性を示した．しかし，このモデルに用いられている M 推定法は外れ値の影響を緩和する手法であるため，残差が極めて大きな標本を含むような場合，外れ値による影響が相応に残るという課題がある．

本研究では，最適資産配分の推定において，極めて大きな残差の標本を除いて推定する手法を適用したポートフォリオモデルを提案し，その有効性を示す．具体的には，インサンプルにおけるリスクの最小化において，各時点の標本を，残差の大きさによって順位付け，ある一定順位以上の残差の標本を除くことにより，外れ値の除去を試みる．また，提案手法を M 推定と合わせて適用するモデルについても分析し，各々のモデルを用いた場合の，日本株式市場におけるアウトサンプルのパフォーマンスについても検討する．

本論文の構成は，以下の通りである．次章では，既存の最小分散ポートフォリオモデルと M-ポートフォリオモデル，および本研究で提案する外れ値を除去する形のリスク最小化ポートフォリオモデルについて示す．第 3 章では，実証分析を行う．最終章では，まとめと結語を付す．

†1 電気通信大学
The University of Electro-Communications

Vol.2011-MPS-85 No.20
2011/9/16

2. ポートフォリオモデル

2.1 最小分散ポートフォリオモデル

最小分散ポートフォリオモデルとは，投資時点までの T 期間におけるポートフォリオの超過リターンの分散を最小化するように，各資産のウェイトを推定するモデルである．最小分散ポートフォリオモデルは，各資産のウェイトベクトルを $\mathbf{w}$，時点 $t-1$ から時点 t における各資産のインサンプルの超過リターンベクトルを $\mathbf{r}_{t-1,t}$，ポートフォリオの超過リターンの平均を m とすると，以下の数理計画として表現できる．

$$\min_{\mathbf{w},m}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\rho_{MV}\left(\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_{t-1,t}-m\right) \tag{1}$$

$$s.t.\,\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}=1 \tag{2}$$

$$\rho_{MV}(x)=x^2/2 \tag{3}$$

2.2 M-ポートフォリオモデル

M-ポートフォリオモデルは，ロバスト推定 (M 推定) を応用したポートフォリオモデルである．M 推定とは，モデルの残差を評価する際に用いる損失関数に閾値 c を設け，残差が閾値 c より大きい場合にその損失を小さく評価するような損失関数を用いることで外れ値の影響を緩和する推定法である．本研究では，Huber の損失関数を用いた，M-ポートフォリオモデルに焦点を当てる．Huber の損失関数とは，残差が閾値 c より小さい範囲では最小二乗法と同様に二乗関数を採用し，残差が閾値 c を上回る範囲では線形関数を採用するような損失関数である．閾値 c を大きく設定すれば M 推定は最小二乗法に近くなり，特に $c=\infty$ では最小二乗法に等しくなる．M 推定を最小分散ポートフォリオモデルに適用した，DeMiguel and Nogales の M-ポートフォリオモデルは，次の数理計画法によって与えられる．なお，本節においても，節 2.1. の最小分散ポートフォリオモデルと同様，各資産のウェイトベクトルを $\mathbf{w}$，時点 $t-1$ から時点 t における各資産のインサンプルの超過リターンベクトルを $\mathbf{r}_{t-1,t}$，ポートフォリオの超過リターンの平均を m とおく．

$$\min_{\mathbf{w},m}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\rho_{Hub}\left(\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_{t-1,t}-m\right) \tag{4}$$

$$s.t.\ \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}=1 \tag{5}$$

$$\rho_{Hub}(x)=\begin{cases}x^2/2 & (|x|<c)\\ c(|x|-c/2) & (|x|\geq c)\end{cases} \tag{6}$$

2.3 本研究のポートフォリオモデル

本研究では，インサンプルのポートフォリオリターンに，推定値からの残差が極めて大きい外れ値を含む場合において，この外れ値の影響を除去した最適資産配分を推定できるポートフォリオモデルを提案する．具体的には，インサンプルでの各時点のポートフォリオリターンとその平均値との乖離が大きい順に，各時点におけるポートフォリオのインサンプルリターンを順位付けし，上位 α 個の時点の超過リターンを外れ値とみなし，その損失関数における評価値を 0 とおいて推定値への影響を除去するモデルを提案する．$Rank(|x|)$ を，残差の絶対値 $|x|$ が大きいデータから順位付けする関数，$\rho^y_{MV}(x)$，$\rho^y_{Hub}(x)$ を，それぞれ，提案手法を適用した最小分散モデル，M ポートフォリオモデルを与える損失関数とすると，提案モデルは次の数理計画法で表現できる．なお，$\mathbf{w}$，$\mathbf{r}_{t-1,t}$，および m は節 2.1, 節 2.2. と同様においた．

$$\min_{\mathbf{w},m}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\rho\left(\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_{t-1,t}-m\right) \tag{7}$$

$$s.t.\ \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}=1 \tag{8}$$

$$\rho^y_{MV}(x)=\begin{cases}x^2/2 & (Rank(|x|)>\alpha)\\ 0 & (Rank(|x|)\leq\alpha)\end{cases} \tag{9}$$

$$\rho^y_{Hub}(x)=\begin{cases}x^2/2 & (Rank(|x|)>\alpha,|x|<c)\\ c(|x|-c/2) & (Rank(|x|)>\alpha,|x|\geq c)\\ 0 & (Rank(|x|)\leq\alpha)\end{cases} \tag{10}$$

3. 実証分析

3.1 データ

本研究では，1992 年 1 月から 2009 年 12 月までの 216 か月間の，日本銀行が公表している無担保コールレート翌日物と TOPIX33 業種別指数の月次データを用いる．

3.2 分析手法

実証分析には，投資戦略としてロール戦略を用いた．ロール戦略とは，時点 τ までの T 期間のデータを用いて推定された最適資産配分で翌期 $(\tau+1)$ まで運用することを，時点 L まで毎期繰り返す戦略である．本研究では，最適資産配分の推定に，その時点までの 72 か月の月次データを用いた $(T=72)$．検証するポートフォリオ戦略は，最小分散ポートフォリオ，DeMiguel and Nogales の M-ポートフォリオ，及び，両ポートフォリオに本研究で提案する外れ値を除去する手法を適用したポートフォリオである．M ポートフォリオを構築する際の閾値 c として，0.10,0.05,0.01 の 3 種類，提案手法において，除くべき外れ値とみなし取り除く標本数として 0,1,2,3 の 4 種類を設定し，計 16 種類のポートフォリオモデルについて，空売りを認める場合と認めない場合の双方において実証分析を行った．また，ポートフォリオモデルの評価指標として，以下の 6 つの指標を用いる．なお，ここで，時点 t における各資産の最適資産配分ベクトルを $\hat{\mathbf{w}}_t$，資産 j の最適資産配分を $\hat{w}_{j,t}$ とし，時点 t から時点 $t+1$ までの各資産の超過リターンベクトルを $\mathbf{r}_{t.t+1}$ とおいた．また，本研究では，ポートフォリオの予測リターン $m_{t,t+1}$ として，最適資産配分と同時に得られるポートフォリオのインサンプルの平均超過リターンを採用した．

$$\mu\,(Err) = (1/L-\tau)\sum\nolimits_{t=\tau}^{L-1}\left(\hat{\mathbf{w}}_t^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_{t,t+1} - m_{t,t+1}\right) \tag{11}$$

$$\sigma^2\,(Err) = (1/L-\tau-1)\sum\nolimits_{t=\tau}^{L-1}\left(\hat{\mathbf{w}}_t^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_{t,t+1} - m_{t,t+1} - \mu\,(Err)\right)^2 \tag{12}$$

$$\mu\,(Ret) = (1/L-\tau)\sum\nolimits_{t=\tau}^{L-1}\hat{\mathbf{w}}_t^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_{t.t+1} \tag{13}$$

$$\sigma^2\,(Ret) = (1/L-\tau-1)\sum\nolimits_{t=\tau}^{L-1}\left(\hat{\mathbf{w}}_t^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_{t,t+1} - \mu(Ret)\right)^2 \tag{14}$$

$$SR = \mu\,(Ret)/\sigma\,(Ret) \tag{15}$$

$$Turnover = \{1/(L-\tau-1)\}\sum\nolimits_{t=\tau}^{L-1}\sum\nolimits_{j=1}^{N}\left(|\hat{w}_{j,t+1} - \hat{w}_{j,t}|\right) \tag{16}$$

$\mu\,(Err)$ とは，ポートフォリオの予測リターンと実現リターンとの誤差の平均であり，この値が 0 に近いほど，アウトサンプルにおいてバイアスをもたない予測リターンの推定が行えたことを表す．$\sigma^2\,(Err)$ はその分散であり，小さいほど各時点における予測リターンの推定誤差も小さくなる傾向にあることを示す．また，$\mu\,(Ret)$ は，アウトサンプルにおけるポートフォリオの無リスク金利に対する月次超過リターンの平均値であり，値が大きいほど，高いリターンが得られる傾向にあることを示す．$\sigma^2\,(Ret)$ は実現リターンの分散であり，この値が小さいほど毎期に得られるリターンが安定していることを意味する．また，SR(シャープレシオ) は，ポートフォリオモデルのアウトサンプルでの運用の効率性を評価する指標であり，値が大きいほど，効率的な資産配分が行えたことを表す．また，$Turnover$ は，アウトサンプル期間における資産の組み替えの平均を表し，一般的に，この値が小さいほど，資産を組み替える際の手数料や作業が低減するため，良いとされる．なお，本研究では，無リスク金利として無担保コールレート，市場ベンチマークとして TOPIX を用いた．

なお，分析結果と考察においては,「1. はじめに」において述べた通り，M 推定のように所与の閾値より大きい残差は小さく評価するような損失関数を導入することによる外れ値の影響の緩和と，本研究において提案するポートフォリオの分散を導く損失関数を採用したままで残差の大きな標本を除去することによる外れ値の影響の緩和の比較に焦点をあてる．

4. 実証分析結果とその考察

ポートフォリオの予測リターンと，実現リターンの誤差の平均と標準偏差を，空売りを認める場合と認めない場合に分けて，表 1 に示す．表 1 の 1 列目はポートフォリオモデルの評価指標であり，2 列目は，外れ値とみなして切り捨てる標本数 α である．すなわち，$\alpha=0$ の行は，外れ値を除去する提案手法を適用しない，既存の最小分散ポートフォリオや M-ポートフォリオのパフォーマンスを意味し，$\alpha=1,2,3$ の行は提案手法を適用した場合のパフォーマンスを意味する．また，4 列目から 6 列目は，M-ポートフォリオにおいて予め設定する閾値 c の大きさを変化させた場合の値である．また，同様に，各ポートフォリオモデルのアウトサンプルにおける月次超過リターンの平均，および，標準偏差，シャープレシオ，組み替え比率について，空売りを認める場合と認めない場合に分けて，表 2 に示す．

表 1 各ポートフォリオモデルの予測リターンと実現リターンとの誤差の平均と標準偏差
Table 1 Mean and standard deviation of forecasting error for portfolio return

		空売りを認める戦略				空売りを認めない戦略			
		最小分散	M-ポートフォリオ			最小分散	M-ポートフォリオ		
指標	除去数		c=0.10	c=0.05	c=0.01		c=0.1	c=0.05	c=0.01
誤差の平均	α=0	-0.0019	-0.0019	-0.0016	0.0011	-0.0014	-0.0014	-0.0013	-0.0020
	α=1	-0.0007	-0.0007	-0.0006	0.0037	-0.0015	-0.0013	-0.0013	-0.0020
	α=2	0.0010	0.0013	0.0013	0.0023	-0.0012	-0.0011	-0.0009	-0.0014
	α=3	0.0032	0.0032	0.0031	0.0038	-0.0012	-0.0014	-0.0011	-0.0013
誤差の標準偏差	α=0	0.0443	0.0443	0.0445	0.0477	0.0335	0.0335	0.0338	0.0344
	α=1	0.0458	0.0458	0.0462	0.0575	0.0340	0.0342	0.0344	0.0347
	α=2	0.0508	0.0509	0.0509	0.0527	0.0352	0.0352	0.0343	0.0355
	α=3	0.0530	0.0527	0.0524	0.0521	0.0360	0.0357	0.0344	0.0359

表 2 各ポートフォリオ戦略のパフォーマンス
Table 2 Performance of each portfolio

		空売りを認める戦略				空売りを認めない戦略			
		最小分散	M-ポートフォリオ			最小分散	M-ポートフォリオ		
指標	除去数		c=0.10	c=0.05	c=0.01		c=0.1	c=0.05	c=0.01
平均	α=0	-0.00184	-0.00184	-0.00135	0.00173	-0.00011	-0.00011	-0.00013	-0.00011
	α=1	0.00102	0.00102	0.00111	0.00257	-0.00013	-0.00015	-0.00038	-0.00033
	α=2	0.00317	0.00348	0.00346	0.00378	-0.00069	-0.00060	-0.00046	0.00018
	α=3	0.00528	0.00530	0.00525	0.00568	-0.00021	-0.00024	-0.00010	0.00052
標準偏差	α=0	0.0019	0.0019	0.0019	0.0022	0.0011	0.0011	0.0011	0.0011
	α=1	0.0021	0.0021	0.0021	0.0025	0.0011	0.0011	0.0011	0.0012
	α=2	0.0025	0.0025	0.0025	0.0027	0.0012	0.0012	0.0011	0.0012
	α=3	0.0027	0.0027	0.0027	0.0027	0.0012	0.0012	0.0011	0.0012
シャープレシオ	α=0	-0.042	-0.042	-0.031	0.037	-0.003	-0.003	-0.004	-0.003
	α=1	0.023	0.023	0.024	0.052	-0.004	-0.005	-0.011	-0.010
	α=2	0.063	0.069	0.069	0.073	-0.020	-0.018	-0.014	0.005
	α=3	0.101	0.102	0.101	0.110	-0.006	-0.007	-0.003	0.015
組み替え比率	α=0	0.878	0.877	0.893	1.116	0.108	0.108	0.108	0.108
	α=1	1.179	1.179	1.142	1.319	0.124	0.135	0.133	0.134
	α=2	1.271	1.340	1.330	1.705	0.163	0.161	0.154	0.146
	α=3	1.374	1.303	1.280	1.538	0.183	0.164	0.172	0.152

4.1 日本株式市場における M-ポートフォリオモデルの有効性 (空売りを認める場合)

最小分散ポートフォリオを用いた場合の予測リターンと実現リターンとの誤差の平均と標準偏差はそれぞれ，-0.0019，0.0443 であった．これに対して，閾値 c に 0.05，0.01 と設定した M-ポートフォリオモデルを用いて外れ値の影響を緩和した場合，予測リターンと実現リターンとの誤差の標準偏差は，0.0445，0.0477 と，最小分散ポートフォリオを用いた場合の標準偏差と大きく変わらないにもかかわらず，誤差の平均が，-0.0016，0.0011 と 0 からの乖離が小さくなり，最小分散ポートフォリオよりも，アウトサンプルにおいてバイアスの小さな推定が行えたことがうかがえる．また，誤差の標準偏差は最小分散ポートフォリオよりも 0.0477 と大きな値となったものの，実現リターンに対する誤差の平均値が最小分散ポートフォリオを用いた場合に比べ，4 割程度小さい値が得られた．したがって，先行研究で提案された M-ポートフォリオモデルを用いて外れ値の影響を緩和することにより，予測リターンの推定精度が相応に改善されることがわかった．

一方，閾値 c の値に 0.10 や 0.05 を採用した場合に比べ，閾値 c の値に 0.01 を採用した場合，誤差の標準偏差の値が微小ではあるが増加した．その要因として，閾値 c に小さな値を採用したことが考えられる．ポートフォリオのリターンの平均値から 1%以上乖離した標本を外れ値とみなしたことにより，リスクの大きな資産を織り込みやすくなり，アウトサンプルにおいてリスクが大きく，リターンの大きい資産を多く保有した結果，0.0011 と正のバイアスが生じ，リターンの平均値が 0.00173 と上振れしたと思われる．

4.2 日本株式市場における提案手法の有効性 (空売りを認める場合)

まず，従来の最小分散ポートフォリオと提案手法を適用した最小分散ポートフォリオについて比較する．従来の最小分散ポートフォリオを用いた場合の，予測リターンと実現リターンとの誤差の平均値が-0.0019 であるのに対し，提案手法 ($\alpha = 1$) を適用した最小分散ポートフォリオを用いた場合は-0.0007 と，0 からの乖離が半分以下に改善された．これより，72 時点中，残差の大きな 1 時点の標本を除いて最適資産配分を推定するという提案手法を用いたことにより，アウトサンプルにおいて，よりバイアスの小さな推定が可能になったと考えられる．また，提案手法において除く時点を，2 時点 ($\alpha = 2$)，3 時点 ($\alpha = 3$) とさらに増やした場合，誤差の標準偏差が著しく増加した．これより，日本株式市場で空売りを認める戦略を行う場合において，極めて大きな外れ値は 72 時点中 1 時点程度であることが示唆される．そのため，以下では 1 時点を除く提案手法に焦点をあて報告する．

従来の最小分散ポートフォリオ ($\alpha = 0$) と提案手法を適用したバイアスの小さな最小分散ポートフォリオ ($\alpha = 1$) に関して，各時点の予測リターンと，累積実現リターンの推移を，それぞれ，図 1，図 2 に示した．提案手法を用いることにより，精度の高い予測では，2000 年の後半から，2005 年にかけて，予測リターンは，従来の最小分散ポートフォリオによる推定値よりも大きく推定されている (図 1 参照)．これを反映して，同期間において，提案手法を用いた最小分散ポートフォリオの累積実現リターンは，従来の最小分散ポートフォリオのものよりも大きく上回る事が確認される (図 2 参照)．このことから，残差の大きな 1 時点を除いたことにより，予測リターンの推定精度が高まり，また，予測リターンが正と推

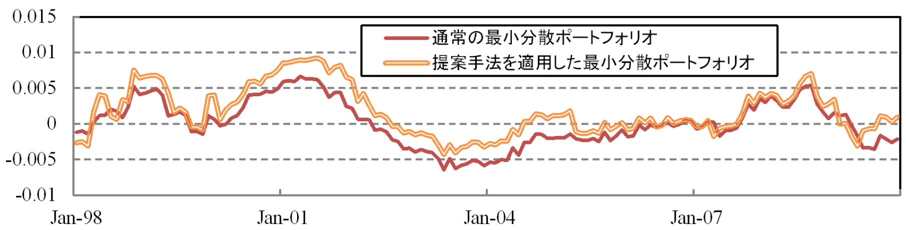

図 1　予測リターンの推移 (1998/01-2009/12)
Fig. 1　Times series of predicted returns(1998/01-2009/12)

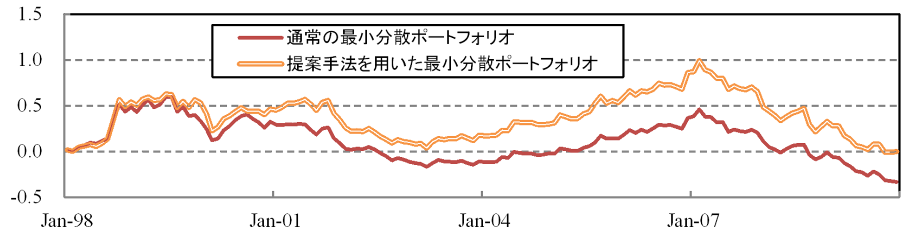

図 2　累積実現リターンの推移 (1998/01-2009/12)
Fig. 2　Times series of cumulative returns(1998/01-2009/12)

定されているため，アウトサンプルにおいて大きな実現リターンが得られたと考えられる．事実，従来の最小分散ポートフォリオのリターンの平均値が-0.00184 であったのに対し，1 時点の標本を除いた場合の最小分散ポートフォリオのリターンの平均値は 0.00102 と負から正の値になり，収益性が大きく改善されていることがわかる．これらの結果より，提案手法を用いることにより推定精度が改善された結果，より最適な資産配分が可能になったことがうかがえる．また，このとき，M-ポートフォリオ ($c = 0.01$, $\alpha = 0$) を用いた場合と比較しても，提案手法 ($\alpha = 1$) を用いた最小分散ポートフォリオの方が誤差の標準偏差が小さく，さらに誤差の平均値の 0 からの乖離も小さい．したがって，日本株式市場には，M-ポートフォリオモデルでは緩和しきれない大きな外れ値が存在し，かつ 1% 程度存在することがうかがえる．そのため，提案手法 ($\alpha = 1$) を用いることにより，外れ値の影響を的確に除いた結果，日本株式市場における予測リターンの推定精度が向上したと考えられる．

ここで，提案手法を用いた場合と用いなかった場合の最小分散ポートフォリオにおける資産構成の差異から，収益性が向上した要因を確認するために，図 3(a) に，各資産 (TOPIX

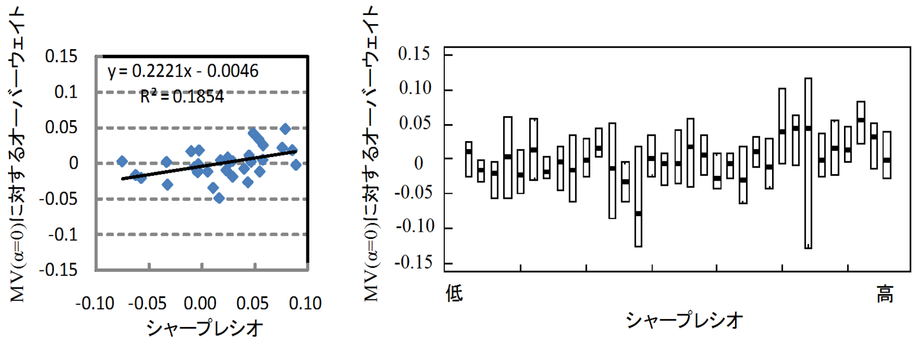

図 3　MV($\alpha = 1$) の MV($\alpha = 0$) に対するオーバーウェイト (TOPIX33 業種)
(a) 散布図 (左) (b) 箱髭図 (4 分位のみ)(右)
Fig. 3　Overweight of MV($\alpha = 1$) than MV($\alpha = 0$) in TOPIX33)
(a)Plot of Overweight(left) (b)Boxplot of Overweight(quartile only)(right)

の 33 業種別指数) のアウトサンプルにおけるシャープレシオの平均値と，提案手法を適用した最小分散ポートフォリオ ($\alpha = 1$) の最小分散ポートフォリオに対する，各資産のオーバーウェイト (基準ポートフォリオに対して上回っている資産配分) の平均値の散布図を示した．図 3(a) から，両者の間には正の相関が確認され，提案手法を適用した場合，リスクリターンの優れた資産により多く投資していたことが裏付けられる．さらに，そのオーバーウェイトの変動の概略を見るために，アウトサンプルにおける各資産のオーバーウェイトの 4 分位をシャープレシオが低い資産から順に，図 3(b) にプロットした．図 3(b) に見られるように，提案手法 ($\alpha = 1$) を用いた最小分散ポートフォリオでは，提案手法を用いない場合に比べ，大きく異なる資産配分がなされていることが確認できた．また，外れ値の影響を緩和することで，各々の時点で，リスクリターンの優れた資産に的確にポートフォリオのウェイトを振り分けた結果，提案手法を適用した最小分散ポートフォリオの組み替え比率は 1.179 と，最小分散ポートフォリオを用いた場合より少し大きくなるが，取引コストの増加を懸念するほどのものではなかった．したがって，72 時点中 1 時点を外れ値として除き，予測リターンに関してバイアスの小さな推定が行えた結果，最適なポートフォリオを構成できたことが示唆される．

次に，提案手法を適用した M-ポートフォリオを用いた場合について述べる，M ポートフォリオモデル ($c = 0.05$) に提案手法 ($\alpha = 1$) を適用した場合，予測リターンと実現リター

ンの誤差は少し 0 に近づいた一方で，M-ポートフォリオ ($c = 0.01$) に提案手法 ($\alpha = 1$) を適用した場合，誤差の平均値が 0.0037 と 0 から大きく乖離した．これより，提案手法を用いる場合も，M-ポートフォリオモデルの有効性は閾値 c の設定に大きく依存することがわかる．さらに，外れ値の頻度や大きさは時点によって大きく異なると考えられるため，最適な閾値 c の決定は極めて困難であることがうかがえる．これに比べ，提案手法では，72 時点中であれば 1 時点を外れ値とみなし除く，という非常に簡易な手法ではあるが，予測リターンの推定精度が向上するなど，日本株式市場において有効であることがわかった．

4.3 空売りを認めない場合のモデルの有効性

空売りを認めない場合，最小分散ポートフォリオモデルと M-ポートフォリオモデル ($c = 0.05$) の，ポートフォリオの予測リターンと実現リターンとの誤差の平均値は，それぞれ-0.0014，-0.0013 となり，誤差の値が，実現リターンに比べ，非常に大きいことがわかる．これは，空売りを認める場合において有効であった提案手法 ($\alpha = 1$) を用いた場合でも同様であり，実現リターンの平均値が-0.00013 であるのに対し，誤差の平均値は，-0.0015 であった．これらより，空売りを認めない戦略は，外れ値による影響の緩和を試みても，実現リターンに対する誤差が極めて大きくなることがわかった．また，図 4 に示す通り，提案手法 ($\alpha = 1$) を適用し，外れ値による影響の除去を試みた場合においても，空売りを認める場合に比べ，最小分散ポートフォリオのウェイトとの差異は極めて小さかった．したがって，空売りを認めない場合，非負条件によるウェイトの制約が厳しく，各資産間の相関を用いたリスク最小化に制限があるため，ロバスト推定をポートフォリオモデルに応用し，外れ値による影響の除去を試みても，推定精度やパフォーマンスの改善が得られにくいことがうかがえる．

5. まとめと結語

本研究では，ポートフォリオのリターンの外れ値となる標本を除去するような手法を提案し，日本株式市場において有効性を検証した．空売りを認めるポートフォリオ戦略において，提案手法を最小分散ポートフォリオに適用したリスク最小化ポートフォリオの予測リターンの推定精度は，M-ポートフォリオより大幅に改善した．また，本研究において，日本株式市場における M-ポートフォリオの有効性が，閾値 c の決定に大きく依存することがわかった．さらに，各時点において，外れ値の大きさや頻度が大きく異なると考えられるため，最適な閾値 c の決定がきわめて困難であることがうかがえた．それに対し，残差の大きな時点の標本を外れ値として除くという提案手法は，簡易な方法でありながら，72 時点中 1 時点の標本を外れ値として除いた場合，空売りを認める戦略において予測リターンの推定精度が大幅に改善されるなど，有効性が確認できた．また，その外れ値の影響を提案手法により除くことで，バイアスの小さな予測リターンの推定が可能になり，得られた推定値と実現リターンの分布との整合性が高まったと思われる．一方，空売りを認めない場合は，ロバスト推定の有効性をあまり確認できなかった．提案手法を適用したポートフォリオモデルは，各資産間の相関を最大限活用できる空売りを認める場合に有効なモデルであると考えられる．今後の課題は，外れ値の大きさや頻度が異なる海外株式市場や，その他の資産市場において，提案手法がどの程度まで有効であるか検証することである．また，ポートフォリオのリターンの予測がある程度可能であるならば，予測リターンの正負に対して，そのポートフォリオの購入と売却の意思決定を行うことで収益の拡大を試みるというより実用的な投資戦略についても同様に検証していきたい．

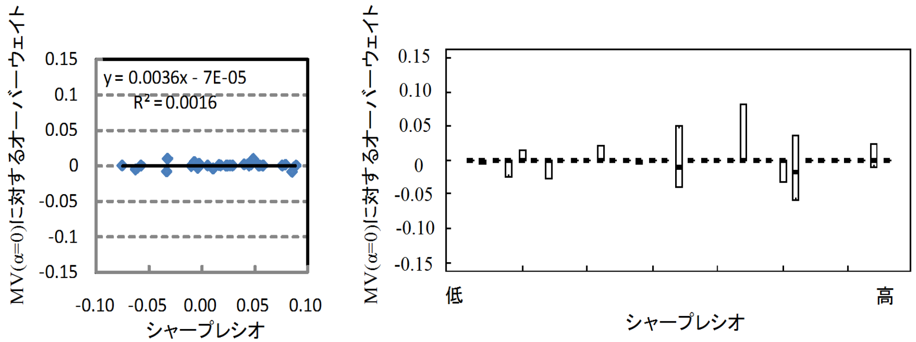

図 4 MV($\alpha = 1$) の MV($\alpha = 0$) に対するオーバーウェイト (TOPIX33 業種)
(a) 散布図 (左) (b) 箱髭図 (4 分位のみ)(右)
Fig. 4 Overweight of MV($\alpha = 1$) than MV($\alpha = 0$) in TOPIX33)
(a)Plot of Overweight(left) (b)Boxplot of Overweight(quartile only)(right)

参 考 文 献

1) Markowitz, Harry M.: Mean-variance analysis in portfolio choice and capital markets, *Journal of Finance*, 7, pp.77–91 (1952).
2) DeMiguel,V. and Nogales, F. J.: Portfolio Selection with robust estimation, *Operations Research*, Vol.57, No.3, pp.560-577 (2009).