

グラフにおける辺-辺隣接行列の 完全ユニモジュラ性に対する必要十分条件

松本雄介^{†1,†3} 神山直之^{†2} 今井桂子^{†2}

グラフにおける辺の隣接関係を表した辺-辺隣接行列は、最小辺支配集合問題を整数計画問題として定式化するときに見れる。本稿では、辺-辺隣接行列が完全ユニモジュラであるための必要十分条件を示す。これは、辺-辺隣接行列に対する初めての特徴付けである。さらに完全ユニモジュラでない辺-辺隣接行列を持つグラフに対して上記の問題が線形計画緩和を用いて最適整数解が得られるグラフクラスを紹介する。

On Totally Unimodularity in Edge-Edge Adjacency Relationships

YUSUKE MATSUMOTO,^{†1,†3} NAOYUKI KAMIYAMA^{†2}
and KEIKO IMAI^{†2}

We consider totally unimodularity for edge-edge adjacency matrices which represent a relationship between two edges in a graph. The matrices appear in an integer programming formulation for the edge dominating set problem. We consider a problem of characterizing graphs having totally unimodular matrices as their edge-edge adjacency matrices, and give a necessary and sufficient condition for the characterization. The condition is the first characterization for edge-edge adjacency matrices. Moreover, we introduce graph classes obtained an optimal integer solution using the linear programming relaxation for the above problem.

†1 日本アイ・ビー・エム株式会社
IBM, Japan

†2 中央大学理工学部
Department of Information and System Engineering, Chuo University

†3 中央大学大学院理工学研究科
Graduate School of Science and Engineering, Chuo University

1. はじめに

現実の問題を抽象化し、定式化するとき、組合せ最適化はとても重要な役割をはたすことが多い。ほとんどの組合せ最適化問題は整数計画問題として定式化できるが、現在までのところ、整数計画問題を多項式時間で解く一般的なアルゴリズムは知られていない。もし線形計画問題に緩和して得られた最適解が整数解ならば、元の整数計画問題でも最適解となる。整数計画問題の制約式の係数行列によって、実行可能領域の形状が決まる。行列の特徴付けの1つに、完全ユニモジュラ性がある。ここで、完全ユニモジュラ行列とは、任意の小行列が1, 0, -1のいずれかになる行列のことである。完全ユニモジュラの定義から完全ユニモジュラ行列の各成分は1, 0, -1のいずれかである。係数行列が完全ユニモジュラであるとき、線形計画問題に緩和しても最適整数解が得られることが知られている⁵⁾。したがって、どのような係数行列が完全ユニモジュラであるかを知ることが重要である。例えば、よく知られている行列に、グラフの点と辺の接続関係を表した行列として、接続行列がある。接続行列が完全ユニモジュラであるための必要十分条件は、そのグラフが2部グラフであることである⁵⁾。一方で、最小辺支配集合問題などの辺と辺の関係に制約がある問題を整数計画問題として定式化したときに見れる辺-辺隣接行列が完全ユニモジュラであるための必要十分条件は知られていない。A. Berger, O. Parekh¹⁾によって、木に対応する辺-辺隣接行列は完全ユニモジュラであることが主張された。しかし、この主張の証明に間違いが含まれていた。

本稿では、辺-辺隣接行列が完全ユニモジュラであるための必要十分条件を示す。図1にあるグラフを用いて完全ユニモジュラである辺-辺隣接行列に対応するグラフを特徴付ける。これにより、NP-困難な問題として知られている最小辺支配集合問題などの問題を解く場合に入力されたグラフに対応する辺-辺隣接行列が完全ユニモジュラであるならば、線形計画緩和を用いることで最適整数解が得られることがわかる。

2. 準備

点集合を V とし、辺集合を E としたとき、 $G = (V, E)$ をグラフという。このとき、辺は2点からなる集合とする。 $e, f \in E$ が $e \cap f \neq \emptyset$ のとき、 e と f は隣接するという。 E の各辺 e_i, e_j に対して、辺-辺隣接行列 $\mathbf{M}(G) = (m_{e_i, e_j})$ を

$$m_{e_i, e_j} = \begin{cases} 1 & e_i \cap e_j \neq \emptyset \text{ の場合,} \\ 0 & \text{上記以外の場合,} \end{cases}$$

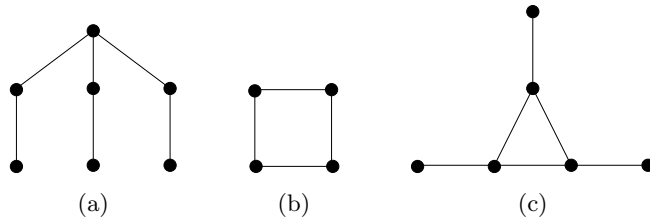


図 1 (a) T_3 , (b) C_4 , (c) G_{TC}

と定義する. 定義から, $m_{e_i, e_i} = 1$ であることに注意されたい.

異なる 2 辺 $e, f \in E$ が $e \cap f \neq \emptyset$ を満たすとき, e は f を支配するという. E の部分集合を D とし, $E \setminus D$ に含まれる任意の辺に対して, その辺を支配する D の辺が存在するとき, D を辺支配集合という. 辺数が最小となる辺支配集合を見つける問題を最小辺支配集合問題という.

\mathbb{Z} を整数の集合とする. 辺 e が辺支配集合に含まれるならば $x(e) = 1$, そうでないならば $x(e) = 0$ となる変数 $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^E$ を用いて, 最小辺支配集合問題は整数計画問題として以下のように定式化できる.

$$\text{minimize} \quad \sum_{e \in E} x(e), \quad (1)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{e' \in \delta(e)} x(e') \geq 1 \quad \forall e \in E, \quad (2)$$

$$x(e) \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E. \quad (3)$$

ここで, $X \subseteq V$ に対して, $\delta(X) = \{e \in E | X \cap e \neq \emptyset\}$ とする. 以下ではこの定式化を (IP) として参照する. (IP) の制約式 (2) に対応する係数行列が辺-辺隣接行列である.

$K_{1,3}$ の全ての辺を 2 本の辺で置き換えた木を T_3 とし (図 1(a)), t 本の辺を持つ閉路を C_t とする (図 1(b)). さらに, C_3 の各点に辺を加えたグラフを G_{TC} とする (図 1(c)).

3. 辺-辺隣接行列が完全ユニモジュラであるための必要十分条件

定理 1 は行列の完全ユニモジュラ性と多面体の関係について述べている.

定理 1. ⁴⁾ 行列 $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{p \times q}$ が完全ユニモジュラであるための必要十分条件は, 任意の整数ベクトル $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^p$ に対して多面体 $\{\mathbf{x} | \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$ の全ての端点の座標が整数となることである.

定理 1 から, 最小辺支配集合問題を解くとき, 入力されたグラフに対応する辺-辺隣接行列が完全ユニモジュラならば, (IP) を線形計画緩和することで最適整数解を得られることがわかる. これより, 辺-辺隣接行列が完全ユニモジュラであるための必要十分条件を示すことは重要である. 本稿では, この必要十分条件を示す.

定理 2. 与えられたグラフの辺-辺隣接行列が完全ユニモジュラであるための必要十分条件は, そのグラフが部分グラフとして $T_3, C_t (t \geq 4), G_{TC}$ を含まないことである.

以下では, $T_3, C_t (t \geq 4), G_{TC}$ をまとめて禁止グラフと呼ぶ. 定理 2 を示すために, まず, 禁止グラフに対応するそれぞれの辺-辺隣接行列が完全ユニモジュラでないことを示す. その後, 禁止グラフを部分グラフとして含まないグラフの辺-辺隣接行列は完全ユニモジュラであることを示す. これらにより, 定理 2 が得られる.

3.1 必要条件

本節では, 禁止グラフの辺-辺隣接行列が完全ユニモジュラでないことを示す. 定理 2 の必要条件を示すために, 以下の定理を用いる.

定理 3. ²⁾ 整数行列 $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ が完全ユニモジュラであるための必要十分条件は, 任意の j に対して, $\sum_{i \in R_1} a_{i,j} - \sum_{i \in R_2} a_{i,j} \in \{-1, 0, 1\}$ となるように \mathbf{A} の行の任意の部分集合 R を R_1 と R_2 に分割できることである.

定理 3 は以下のように書き換えられる.

系 4. グラフ $G = (V, E)$ に対応する辺-辺隣接行列 $\mathbf{M}(G)$ が完全ユニモジュラであるための必要十分条件は, 任意の関数 $\psi_G : E \rightarrow \{0, 1\}$ に対して,

$$-1 \leq \sum_{e_i \in \delta(e_j)} \psi_G(e_i) \pi_G(e_i) \leq 1 \quad (4)$$

を満たす関数 $\pi_G : E \rightarrow \{-1, 1\}$ が, 全ての $e_j \in E$ に対して存在することである.

系 4 より, ある ψ_G に対して式 (4) を満たす π_G が存在しないならば, $\mathbf{M}(G)$ は完全ユニモジュラでない. 以下, 禁止グラフの辺-辺隣接行列が完全ユニモジュラでないことを示す.

補題 5. t が 4 以上の $\mathbf{M}(C_t)$ は完全ユニモジュラではない.

証明. C_3 の各辺はその他の辺と隣接しているため, $\mathbf{M}(C_3)$ の各成分は 1 である. ゆえに, $\mathbf{M}(C_3)$ は完全ユニモジュラである. 次に, C_4 について考える. C_4 の 1 辺を e_1 とし, e_1 から時計回りに各辺を e_2, e_3, e_4 とする (図 2). e_2, e_3, e_4 に 1 を割り当て, e_1 に 0 を割り当てる関数 ψ_{C_4} を考える. 図 2 の中で, a/b は a は $\psi_{C_4}(e)$ を, b は $\pi_{C_4}(e)$ を表している. 一般性を失うことなく, $\pi_{C_4}(e_2) = -1$ とできる. e_2 に対して式 (4) を満たさなければならないので, $\pi_{C_4}(e_3) = 1$ となる. ここで, ψ_{C_4} が 0 を割り当てる辺に対して π_{C_4} が 0 と

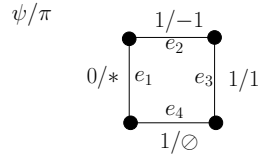


図 2 $\mathbf{M}(C_4)$ が完全ユニモジュラであることの反例 (∅ はその辺に対して 1 または -1 を割り当てることのできないことを表し, * はその辺に 1 と -1 の両方を割り当てることを表す.)

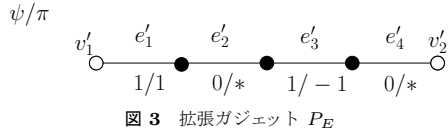


図 3 拡張ガジェット P_E

1 のどちらかを割り当てても式 (4) を満たすことに注意されたい. このとき, 式 (4) を満たす $\pi_{C_4}(e_4)$ の割り当ては存在しない. それゆえ, C_4 に対して式 (4) を満たす π_{C_4} は存在しない. したがって, $\mathbf{M}(C_4)$ は完全ユニモジュラでない.

さらに, $\mathbf{M}(C_8)$ が完全ユニモジュラでないことを示す. これを証明するために, 拡張ガジェットを定義する (図 3). 4 本の辺から構成されるパスを拡張ガジェット P_E とする. P_E に 2 点ある葉を v_1', v_2' とし, v_1' に接続する辺を e_1' とする. そして, P_E の辺を e_1' から v_2' に向かって順に e_2', e_3', e_4' とする. このとき, e_1' と e_3' に対して 1 を割り当て, e_2' と e_4' に対して 0 を割り当てる関数を ψ_{P_E} とする.

C_4 の e_1 と e_4 に接続する点で C_4 を分断し, このときに複製された点で e_1 に接続する点を v_1 , e_4 に接続する点を v_2 としたグラフを C_4' とする. C_4' と P_E を, $v_1 = v_1'$ かつ $v_2 = v_2'$ となるように結合した $C_{4+4} = C_8$ を考える (図 4). C_{4+4} に対して, $\psi_{C_{4+4}}$ を以下のように定義する.

$$\psi_{C_{4+4}}(e) = \begin{cases} \psi_{C_4}(e) & e \text{ が } C_4' \text{ の辺の場合,} \\ \psi_{P_E}(e) & e \text{ が } P_E \text{ の辺の場合.} \end{cases}$$

この $\psi_{C_{4+4}}$ に対して, 一般性を失うことなく, $\pi_{C_{4+4}}(e_2) = -1$ とできる. それゆえ, 式 (4) から π_{P_E} は e_1' に対して 1 を割り当て, e_3' に対して -1 を割り当てる. そのとき, $\pi_{C_{4+4}}$ を

$$\pi_{C_{4+4}}(e) = \begin{cases} \pi_{C_4}(e) & e \text{ が } C_4' \text{ の辺の場合,} \\ \pi_{P_E}(e) & e \text{ が } P_E \text{ の辺の場合,} \end{cases}$$

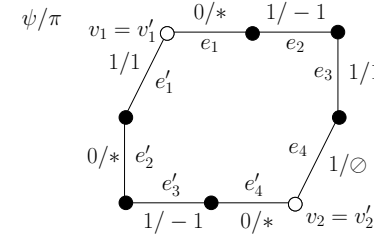


図 4 $\mathbf{M}(C_{4+4})$ が完全ユニモジュラであることの反例

と定義する. このとき, e_4 に対して $\pi_{C_{4+4}}$ は式 (4) を満たすように 1 または -1 を割り当てることのできない. 拡張ガジェットを p 個結合することで $\mathbf{M}(C_{4+4p})$ が完全ユニモジュラでないことも示せる (図 5(a)). ここで, p を正の整数とする.

同様の議論より, $\mathbf{M}(C_{5+4p}), \mathbf{M}(C_{6+4p}), \mathbf{M}(C_{7+4p})$ は完全ユニモジュラでない (図 5(b)-(d)). □

図 6 と 図 7 はそれぞれ補題 6 と補題 7 を示している.

補題 6. $\mathbf{M}(T_S)$ は完全ユニモジュラでない.

補題 7. $\mathbf{M}(G_{TC})$ は完全ユニモジュラでない.

補題 5, 6, 7 より, 以下の命題が示される.

命題 8. G が部分グラフとして禁止グラフを含むとき, $\mathbf{M}(G)$ は完全ユニモジュラでない.

3.2 十分条件

本節では, 禁止グラフを部分グラフとして含まないグラフに対応する辺-辺隣接行列が完全ユニモジュラであることを示す. 証明の簡単な流れとして, まず, T_S を部分グラフとして含まない木に対応する辺-辺隣接行列が完全ユニモジュラであることを示す. 次に, 禁止グラフを含まないグラフに対応する辺-辺隣接行列が完全ユニモジュラであることを示す.

グラフ G が木であり, G の任意の点から距離が 1 であるパス P_C を部分グラフとして含むとき, G をキャタピラという (図 8). そして, P_C を中心パスという. キャタピラは以下のように特徴付けられる.

補題 9. ³⁾ 木がキャタピラであるための必要十分条件は, 木が部分グラフとして T_S を含まないことである.

十分条件を示すために, 以下の補題を用いる.

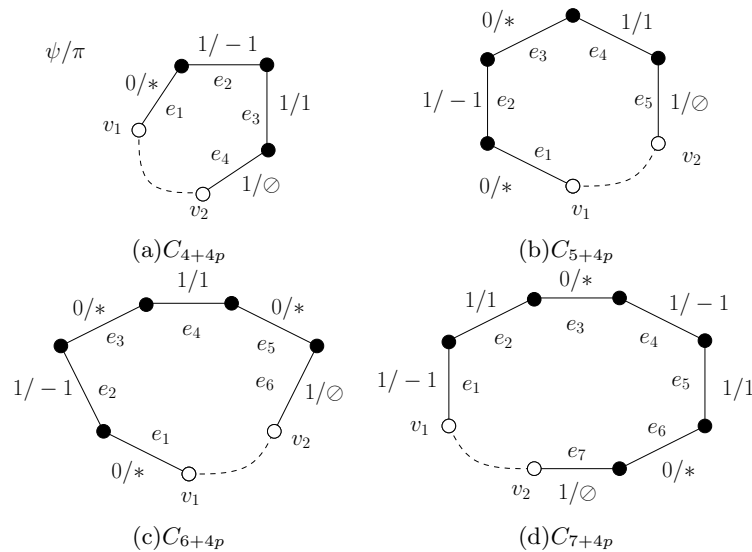


図 5 4 以上の t に対して $\mathbf{M}(C_t)$ が完全ユニモジュラであることの反例

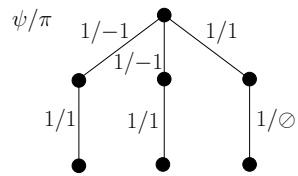


図 6 $\mathbf{M}(T_S)$ が完全ユニモジュラであることの反例

補題 10. ⁶⁾ 行列の各成分が 0 または 1 であり、各行の中で 1 の成分が連続して並んでいるならば、その行列は完全ユニモジュラである。

辺-辺隣接行列の辺 e_i に対応する行を R_{e_i} で表す。

補題 11. キャタピラに対応する辺-辺隣接行列は完全ユニモジュラである。さらに、その行列の各行の中で 1 の成分が連続するように行列を変形することができる。

証明. グラフ G をキャタピラとする。キャタピラの定義より、 G は中心パスを持つ。 G の

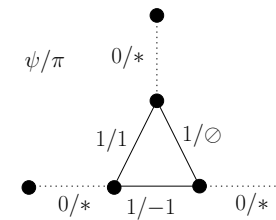


図 7 $\mathbf{M}(G_{TC})$ が完全ユニモジュラであることの反例

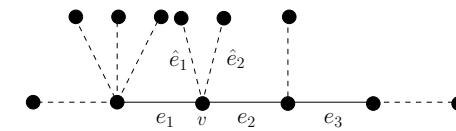


図 8 キャタピラ (中心パスは実線の辺から構成される。)

葉でない点から誘導されるパスを中心パス $P_C = (V_{P_C}, E_{P_C})$ とする。 E_{P_C} に対して、片方の葉から順番に $e_1, \dots, e_{|E_{P_C}|}$ と名付ける (図 8)。 P_C はパスなので、 $\mathbf{M}(P_C)$ は三重対角行列となる。したがって、補題 10 より、 $\mathbf{M}(P_C)$ は完全ユニモジュラである。

各 $v \in V_{P_C}$ に対して、 $e \in E \setminus E_{P_C}$ かつ $e \cap V_{P_C} = \{v\}$ となる辺集合を E_v とする。 v が P_C の葉でないとき、 E_{P_C} の辺で v に接続する辺は 2 辺存在する。この 2 辺を e_i, e_{i+1} とする。任意の $\hat{e} \in E_v$ に対して、 $\delta(\hat{e}) = \delta(e_i) \cap \delta(e_{i+1})$ が成り立つ。これより、 R_{e_i} と $R_{e_{i+1}}$ の間に E_v の全ての辺に対応する行を挿入しても各行の 1 の成分が連続していることがわかる。さらに、列に対しても同じ操作を行う。したがって、補題 10 より、挿入操作後の辺-辺隣接行列も完全ユニモジュラである。次に v は P_C の葉で、接続している P_C の辺が e_1 の場合を考える。そのとき、任意の辺 $\hat{e} \in E_v$ に対して、 $\delta(\hat{e}) \subseteq \delta(e_1)$ が成り立つ。したがって、 E_v の全ての辺に対応する行を R_{e_1} の上側に挿入することで、辺-辺隣接行列は補題 10 を満たす。さらに、 v が P_C の葉で、接続している P_C の辺が $e_{|P_C|}$ の場合も同様に、 E_v の全ての辺に対応する行を $R_{e_{|P_C|}}$ の下側に挿入することで、辺-辺隣接行列は補題 10 を満たす。これより、挿入操作後の辺-辺隣接行列も完全ユニモジュラである。

上記の議論より、 $\mathbf{M}(G)$ の各行の 1 の成分が連続する適当な並びが存在することがわかる。したがって、キャタピラに対応する辺-辺隣接行列は完全ユニモジュラである。 \square

補題 11 を用いて、以下の命題を示す。

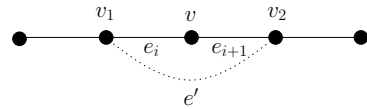


図 9 ケース 1

命題 12. 禁止グラフを含まないグラフの辺-辺隣接行列は完全ユニモジュラである。

証明. G は禁止グラフを含まないグラフとし, G の全域木 $T_G = (V, E_{T_G})$ を考える. G は T_S を含まないので, T_G も T_S を含まない. したがって, 補題 9 より, T_G はキャタピラである. T_G の葉以外の点から誘導されるパスを中心パスとし, $P_C = (V_{P_C}, E_{P_C})$ とする. さらに, P_C の各辺に片方の葉を持つ辺から順に $e_1, \dots, e_{|E_{P_C}|}$ とする. 補題 11 より, $M(T_G)$ の各行の 1 の成分は連続していると仮定できる.

次に, G における T_G の補木 E' を考える. E' を以下のケースに分ける.

- ケース 1: V_{P_C} の点から構成される辺 (図 9)
- ケース 2: T_G の葉と V_{P_C} の点から構成される辺
- ケース 3: T_G の葉から構成される辺

ケース 1: V_{P_C} の v_1 と v_2 に接続する E' の 1 辺を e' とする. G は t が 4 以上の C_t を含まないので, P_C の点 v_1 と v_2 の間にはちょうど 1 点存在する. この点を v とする. $E \setminus E_{P_C}$ の辺が v に接続しているとき, G は G_{T_C} を含むことから, $E \setminus E_{P_C}$ の辺は v に接続していない (図 9). これより, $e_i, e_{i+1} \in \delta(v)$ に対して, $\delta(e') = \delta(e_i) \cup \delta(e_{i+1})$ が成り立つので, 辺-辺隣接行列の R_{e_i} と $R_{e_{i+1}}$ の間に $R_{e'}$ を挿入することで, 補題 10 より, 辺-辺隣接行列は完全ユニモジュラであることがわかる.

ケース 2 と 3 に対しても同様に辺を挿入する操作をするとき, 行列の行と列に適当に辺を挿入することで補題 10 を満たすことができる. 上記の議論の中で, 木の点 v によって定義される位置に補木の辺を加えていて, かつ, 補木の各辺に対応する v は異なることから, 挿入操作は独立に行われていることに注意されたい. これより, 禁止グラフを部分グラフとして含まないグラフに対応する辺-辺隣接行列は完全ユニモジュラであることが示される. □

命題 8 と 12 から 定理 2 が示される.

定理 2. 与えられたグラフに対応する辺-辺隣接行列が完全ユニモジュラであるための必要十分条件は, 部分グラフとしてそのグラフが $T_S, C_t (t \geq 4), G_{T_C}$ を含まないことである.

4. 限定されたグラフクラスに対する線形計画緩和の適用可能性

最小辺支配集合問題の最適整数解を求めたい場合, 定理 2 により, 木や閉路などの基本的なグラフでさえ線形計画緩和を用いることができない. しかし, 各辺に重みがない場合, すなわち目的関数の係数が全て 1 の場合, 線形計画緩和して得られた解を用いて最適整数解を求めることができる. 木の場合, 線形計画緩和して得られた最適解を最適値を変えずに整数解にすることができる. さらに閉路の場合, 線形計画緩和して得られた最適解の最適値以上で最小の整数解を線形時間で見つけることができる. この解は, 最適整数解である. このように, 完全ユニモジュラでない辺-辺隣接行列でも線形計画緩和して得られた解を利用することで最適整数解を見つけることができるグラフクラスが存在する.

5. おわりに

本稿では, グラフにおける辺の隣接関係を表した辺-辺隣接行列に対して, 完全ユニモジュラであるための必要十分条件を示した. 辺-辺隣接行列は, 最小辺支配集合問題を整数計画問題として定式化したときに係数行列として現れる. したがって, この問題では完全ユニモジュラである辺-辺隣接行列を持つグラフに対して, 線形計画緩和を用いて最適整数解を得ることができる. さらに, 各辺に重みがない場合, 完全ユニモジュラでない辺-辺隣接行列を持つグラフでも線形計画緩和を用いて最適整数解が得られることを示した.

参考文献

- 1) Berger, A. and Parekh, O.: Linear time algorithms for generalized edge dominating set problems. *Algorithmica* 50, no. 2, pp.244–254 (2008).
- 2) Ghouila-Houri, A.: Caractérisation des matrices totalement unimodulaires. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences (Paris)* 254, pp.1192–1194 (1962).
- 3) Harary, F. and Schwenk, A.: Trees with Hamiltonian square. *Mathematika* 18, pp.138–140 (1971).
- 4) Hoffman, A. J. and Kruskal, J. B.: Integral boundary points of convex polyhedra. *Linear inequalities and related systems* (H. W. Kuhn and A. W. Tucker, eds.), Princeton University Press, pp.223–246 (1956).
- 5) Korte, B. and Vygen, J.: *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms* (4th edition). Springer-Verlag (2007).
- 6) Schrijver, A.: *Theory of linear and integer programming*. J. Wiley & Sons (1986).