

プログラムのページ (担当 鈴木 誠道)

75-03 だ円型境界値問題解析プログラム

森本義広* 松山公一*

ディリクレおよびノイマン条件の課せられただ円型境界値問題を差分法で数値解法するプログラムを作成した。汎用プログラムを作成する場合に必要な、ポテンシャル領域の記憶と領域の内外にある格子点の識別および、不規則な mesh 上にある格子点（すなわち、境界に隣接した格子点）の処理等について説明する。

1. だ円型偏微分方程式と差分表示

以下、発散が零の2次元場について考える。偏微分方程式 $\operatorname{div}(\epsilon \operatorname{grad} \phi) = 0$ は、ガウスの定理より、

$$\iiint_V \operatorname{div}(\epsilon \operatorname{grad} \phi) dv = \iint_S \epsilon (\operatorname{grad} \phi) \cdot \mathbf{n} ds \\ = \int_I \epsilon (\operatorname{grad} \phi) \cdot \mathbf{n} dl \quad (1)$$

これを、境界条件、 $\phi = f(x, y)$ あるいは $\partial \phi / \partial n = g(x, y)$ のもとに数値的に解く。この場合、領域内にある正方形 mesh で区分して、格子点上のポテンシャル ϕ を隣接の4つの格子点上のポテンシャルで差分近似する。例えば、Fig. 1, Fig. 2 の場合、(1)式の線積分の経路 I として、点線に沿った閉曲線を考えると、それぞれ、次式で与えられる。

$$\phi_{i,j} = \{(\epsilon_1 + \epsilon_8)\phi_{i+1,j} + (\epsilon_2 + \epsilon_3)\phi_{i,j+1} \\ + (\epsilon_4 + \epsilon_5)\phi_{i-1,j} + (\epsilon_6 + \epsilon_7)\phi_{i,j-1}\} / \sum_{k=1}^8 \epsilon_k \quad (2)$$

$$\phi_{i,j} = \left\{ (\epsilon_4 d_N + \epsilon_8 d_S) \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_W \cos \alpha + (\epsilon_2 d_E + \epsilon_3 d_W)$$

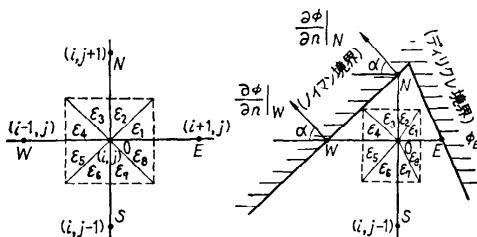


Fig. 1 正方格子点

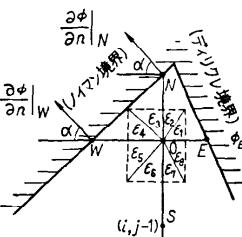


Fig. 2 境界近傍格子点

* 熊本大学工学部電気工学科

$$\times \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_N \sin \alpha + (\epsilon_1 d_N + \epsilon_8 d_S) \frac{\phi_E}{d_E} + (\epsilon_6 d_W \\ + \epsilon_7 d_E) \frac{\phi_{i,j-1}}{d_S} \Bigg/ \left\{ \frac{\epsilon_1 d_N + \epsilon_8 d_S}{d_E} \right. \\ \left. + \frac{\epsilon_6 d_W + \epsilon_7 d_E}{d_S} \right\} \quad \text{ここに, } \begin{cases} \epsilon: \text{媒質定数} \\ d: \text{格子間隔} \end{cases} \quad (3)$$

これらを、S.O.R. 法 $\phi_{i,j}^{(n+1)} = \phi_{i,j}^{(n)} + \omega(\phi_{i,j} - \phi_{i,j}^{(n)})$ で求める。ただし、 n は繰り返し回数を示す。

2. 汎用プログラムの概要

入力情報をできるだけ少なくするという点に主眼を置いたため、取り扱いうるだ円型境界値問題には次に挙げるいくつかの制約を課した。

制約 1. 領域はその境界が直線分によって折れ線近似される単連結なものとする。

制約 2. ディリクレ、およびノイマン条件は境界に沿って直線状に変化するものとする。

制約 3. 領域内に異なる媒質が存在する場合には、媒質相互間の境界線は格子点上を通るものとする。

Fig. 3 (次頁参照) に示す流れ図に従って、主要なサブルーチンの機能を説明する。

入力データ:

ポテンシャル計算に必要な最小限の入力情報を読みこむ。主なデータは以下のようである。

① 境界線の端点座標 (X_i, Y_i) 、端点上のディリクレ条件 $\phi_i = f(X_i, Y_i)$ あるいはノイマン条件 $\partial \phi / \partial n = g(X_i, Y_i)$

② 領域内に異なる媒質が存在する場合には、この媒質相互間を区切る媒質境界線の端点座標 (x_i, y_i)

③ ②の場合、媒質境界線上にある格子点について、DO 命令のスキャン・ニギング順に与えられた媒質定数 $\epsilon_1 \sim \epsilon_8$

④ 等ポテンシャル線を画くための分割数 n

走査領域の設定 (INISET):

領域に外接する長方形形状のアレイ領域を設定し、DO 命令の走査範囲を限定する。

境界線座標リストの作成 (LIST):

各境界線の端点の座標リストを作成する。これは走査領域内の各格子を、ポテンシャル領域内にあるもの

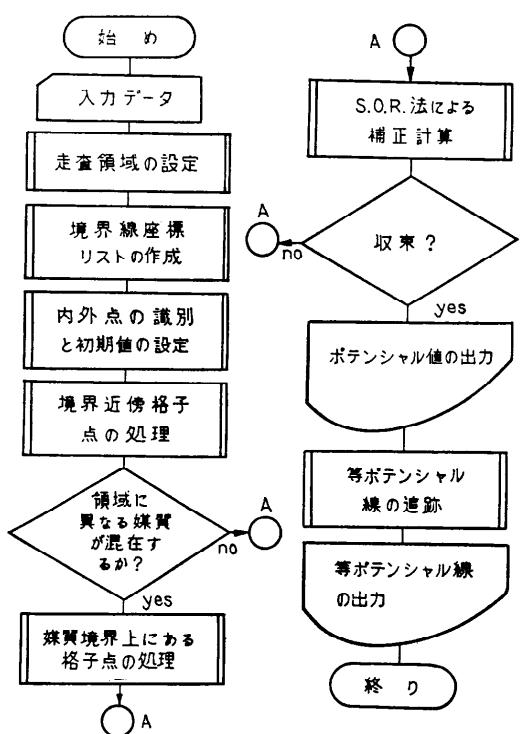


Fig. 3 流れ図

とポテンシャル領域外にあるものとに分けるためのデータとして使用される。

内外点の識別と初期値の設定および境界近傍格子点の処理 (SET 1):

走査領域内のある格子点から、ある一定方向に半直線を引き、この半直線と境界線が交わる回数を、その格子点がポテンシャル領域内であれば、奇数回、外であれば偶数回と計数されるようなアルゴリズムを構成する。このアルゴリズムによって、各格子点の内外点識別を行なう。その結果内点である格子点には初期値を設定する。また外点には、その旨を示す特定の定数を付与し計算の対象から除外できるようにする。この内外点識別が終ると、境界近傍格子点の処理に移る。ここでは、ポテンシャル計算に必要な情報である境界線までの距離定数 d と境界上の境界条件をアレイ領域に格納し、これらを繰返し計算のたびに算出し引用するための時間の浪費をさける。境界近傍格子点には多くのパターンが考えられるが、Fig. 2 の例では、Table 1 のようになる。

Table 1 境界近傍格子点 (Fig. 2) の情報

方 向	N	S	E	W
隣接境界の有無	2	0	1	2
距離定数	d_N		d_S	d_W
ディリクレおよびノイマン条件	$\frac{\partial \phi}{\partial n} _N \sin \alpha$		ϕ_E	$\frac{\partial \phi}{\partial n} _W \cos \alpha$

Table 1 の説明

方向:

$N \sim W$ は境界近傍格子点 (i, j) を中心に持つ4つの格子点を示す。

隣接境界の有無:

上の4つの格子点のうち、領域内にある格子点には指標0、境界上にある格子点には、それがディリクレ条件が与えられている境界上であれば指標1を、ノイマン条件が与えられている境界上であれば指標2を与える。この指標はポテンシャルの繰返し計算時に、境界近傍格子点に遇すると、それがいずれのパターンに属するかを識別し、該当する計算式を選択するために使用される。

距離定数とディリクレおよびノイマン条件:

指標1または2の格子点に対してのみ、計算に必要な情報を格納する。指標0の格子点 (Table 1 の場合は S) には、メモリー節約のため指標が0でない他の境界近傍格子点の情報を格納される。

境界近傍格子点はその旨を示すある特定の値を付与する。

媒質境界上にある格子点の処理 (SET 2):

媒質相互間の境界線上にある格子点にはその旨を示すある特定の定数を付与する。このような格子点のまわりの媒質定数は入力データとして与えられているので特別な操作は必要としない。

その他、S.O.R. 法による補正計算のサブルーチンでは、ポテンシャル計算時に、各格子点のポテンシャルに付与されている特定定数を調べる。これによって、領域外の格子点であることが分かれば、この格子点を計算の対象から除外する。また内点であることが分かれば、これが境界近傍にある格子点あるいは媒質境界上にある格子点かによって、必要な情報を、あらかじめ設けられていたアレイ領域から引き出す。等ポテンシャル線の追跡のサブルーチンでは、入力データで与えられた本数だけの等ポテンシャル線を求める訳だが、これについての基本的な考え方は、他の論文


```

<本文集上の内容の節>
SUBROUTINE NUL1(NU1,I,J,K)
REAL NU1,I,J,K,U1,U2,U3,U4,SU,EU,NU,KH,KS,KE,B,*,K)
COMMON NU1,I,J,K,U1,U2,U3,U4,SU,EU,NU,KH,KS,KE,B,*,K)
I=I+1,L=J+1
COMMUN /N1/I1(150),S1(150),E1(150),W1(150),B1/Y/NU1(150),SU1(150),
I1/U1(150),*U1(150)/K24/I1,K3,K4
      Q: 本プログラム
KS=0 } 指標0,1を持つN,~W点の指標を改めて0と置く。(SUBROUTINE)
KE=0 }
KH=0 }
IF(SW,GE,1000) GO TO 301 —— 本を算入の指標0,1は初期値の割引。
NU=SW,I=ID
NU=0 } 指標0,1が既に初期値。NU=SW,I=ID
      B: NU要計算のDE指標を読み込みE不等
      S1=1,U SUM
      S1=0 } 指定定数。NU!=SW,I=ID
      EUMH
      501 IF(W,GE,100) GO TO 302
      502 IF(W,GE,10) GO TO 303
      503 IF(W,GE,1) GO TO 304
      504 W=0
      W=0
      GO TO 305 } 基本の指標0,1は初期値の割引。
      K1=N1(I1,K1)
      NU=N1(K1), NU=phi or  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ , S1D
      UK=0,K=1000
      IF(W,GE,1000) GO TO 311
      GO TO 501
301 K1=N1(I1,K1)
      NU=N1(K1), NU=phi or  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ , S1D
      UK=0,K=1000
      IF(W,GE,100) GO TO 312
      GO TO 502
302 KS=2
      UK=0,I=100
      GO TO 504
303 E1=E1(I3)
      EU=E1(I3)
      UK=0,I=10
      IF(W,GE,10) GO TO 313
      GO TO 503
313 KE=2
      UK=0,I=13
      GO TO 503
304 KS=K+1
      ==1(*)
      UK=0,I=4
      UK=0,I=1
      IF(W,GE,10) GO TO 314
      GO TO 505
314 KS=2
      RETURN } —— 4分割指標は全て0,2の組合で改められる。
END
    
```

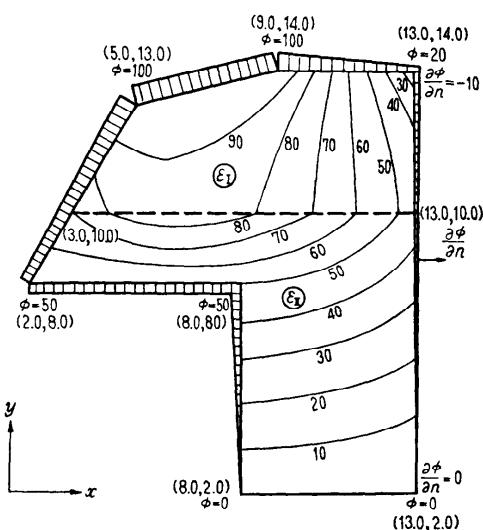
<本文集上の指標0,1が重複するボテンシャルの処理>

```

SUBROUTINE NUL2(I,J,K)
REAL I,J,K,U1,U2,U3,U4,SU,EU,NU,KH,KS,KE,B,*,K)
COMMON NU1,I,J,K,U1,U2,U3,U4,SU,EU,NU,KH,KS,KE,B,*,K)
1 IF(A=U1,I,J,AND,U1,I,J)=LT,A=U1,I,J,AND,U1,I,J,LT,
   IF(F=0,W,F=0,LT,I,J,AND,U1,I,J)=LT,A=U1,I,J,AND,U1,I,J,LT,
   NU=U1,I,J } 特定定数E=0が3回
   GO TO 3
2 IF(A=U1,LT,I,J,AND,U1,I,J)+LT,A=U1,I,J=NU(I,J)-A } 重複指標改め
   IF(F=0,W,F=0,LT,I,J,AND,U1,I,J)+LT,F=U1,I,J=F } 重複指標改め
3 RETURN } 特定定数E=0が3回
END
    
```

Fig. 4-5

Fig. 5に簡単な境界値問題に適用した例を、Table 2にその入力データを示す。



媒質定数: $\epsilon_1 = 100.0$, $\epsilon_{II} = 1.0$ 格子点数: 182 個
 初期値: $JN = 0.0$ 収束判定次数: $\epsilon = 10^{-5}$
 加速係数: $K_0 = 1.45$ 繰り返し回数: $M = 50$ 回

Fig. 5 適用例

Table 2 入力データ

7 ← NN	X	Y	P	G
MODO				
0	5.0	13.0	100.0	*
0	9.0	14.0	100.0	*
1	13.0	14.0	20.0	-10.0
0	13.0	2.0	0.0	0.0
0	8.0	2.0	0.0	*
0	8.0	8.0	50.0	*
0	2.0	8.0	50.0	*
2 ← MM				
XB	YB			
3.0	10.0			
13.0	10.0			
2 ← ME				
100.000	←EM			
1.000				
9 ← MN				
K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅
1	1	1	1	2
1	1	1	1	2
1	1	1	1	2
1	1	1	1	2

*はプログラム中に無視されるので、実数型の数であれば何にでもよい。
(Pの中に*が現われた場合も同様)

以下、等ポテンシャル線のデータ (省略)

(昭和 49 年 12 月 3 日受付)

(昭和 50 年 3 月 3 日再受付)