



LSI アートワークパタンの最小分割*

小山田 哲治**

Abstract

This paper is concerned with the problem of partitioning a plane figure, which is bounded by horizontal and vertical lines, into a set of rectangles. A simple formula which gives the minimum number of rectangles to partition a plane figure is presented. A computer algorithm for obtaining such a partition is also presented. As an application to the artwork generation of LSI, this algorithm provides a simple procedure to expose a desired figure using a photo-head pattern generator.

1. まえがき

パタンジェネレータは、集積回路のマスク原図を作成する機械で、感光フィルムは小さな長方形の窓を通して光をあてることによって露光される。長方形の窓の大きさ、形状、位置を適当に変えて露光することにより、フィルム上に望みの図形を描くことができる。当然この場合にはできるだけ少ない手間で図形を描く、いいかえれば、図形を最小個数の長方形の和で表わしたいという要求が起る。さらに、長方形は互いに重さなってはならない、という条件がつけ加えられる。フィルムの同じ部分に2度、3度と光をあてることは、マスク原図の精度を落すことになるからである。

集積回路のマスク原図に現われる図形は、水平と垂直の直線で囲まれ、内部には中空部分も含むようなものである (Fig. 1 参照)。

本論文では、このような図形を長方形で分割する問題を考察し、必要な長方形の個数の本質的な意味での最小値を与える公式を導き、さらにそのような分割を実現するためのアルゴリズムを提案している。なおここに示されている二つの定理は、筆者が以前に証明を省略して結果だけを発表したものである¹⁾。

2. 長方形セル複体とその分割

先ず対象とする問題を以下のように定式化する²⁾。

平面全体を埋めつくしているような長方形領域の集合を考える。これらの長方形がその境界だけで重さなっており、平面内の有限な領域には有限個しか存在しないとき、これを長方形モザイクという (Fig. 2 次頁参照)。

長方形モザイクを構成する個々の長方形をセルといい、有限個のセルの集合で平面内において連結なものを長方形セル複体という。

集積回路のマスク原図に表われる図形は、長方形セル複体の構造を無視して一つの平面図形と考えたものに対応している。これを長方形セル複体のイメージといい、 P で表わす (Fig. 3 次頁参照)。

長方形セル複体のイメージ P が与えられたとき、これに長方形セル複体としての構造を与えること、即ち境界だけで重さなっている長方形の集合で、その和が

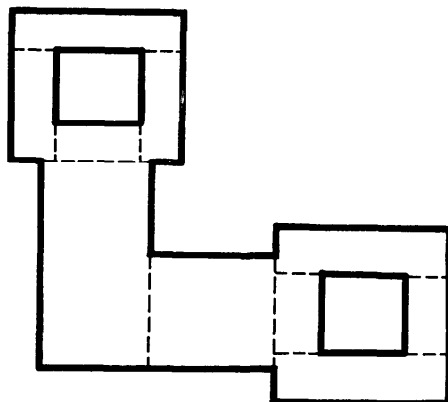


Fig. 1 An example of mask pattern

* Minimum Partitioning of a LSI Artwork Pattern by Tetsuji OYAMADA (Computer System Lab. Central Research Labs. Nippon Electric Co. Ltd.)

** 日本電気(株)中央研究所 コンピュータ・システム研究部

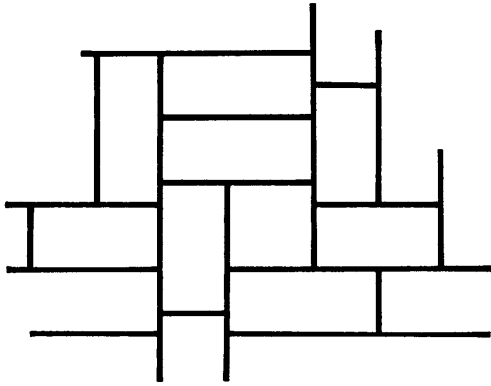


Fig. 2 A rectangular celler mosaic

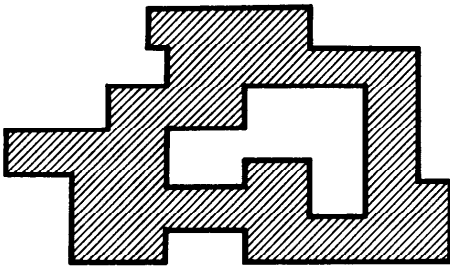


Fig. 3 The image of a rectangular celler complex

P に等しいもの

$$R = \left\{ \gamma_i \mid P = \bigcup_{i=1}^M \gamma_i, \forall i \neq j \gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset \right\}$$

($i=1, 2, 3, \dots, M$)

(γ_i は長方形, γ_i^0 は境界を除く内部の領域を示す.)
 を対応させることを P の分割といい, 集合 R の要素の個数 M を分割数という. この論文で取り扱う問題は任意の P に対して, 分割数が最小となる分割を与えることである. 以後, 長方形セル複体のイメージのことを単に長方形セル複体と書き, 内部の構造は無視されているものとする.

3. 最小分割数を与える公式

定理 1

長方形セル複体 P に対し分割数 M が

$$M \leq \frac{N}{2} + B - 2 \tag{1}$$

であるような分割が存在する.

ここで N は P の頂点の個数であり, B は P の境界である閉折線の個数である. つまり P が中空部分をもたないときは $B=1$ であり, k 個の中空部分をもつな

らば $B=k+1$ である.

定理 2

P のどの 2 本の辺も一本の直線に含まれることはない, と仮定したとき, 任意の分割に対し, 分割数 M は

$$M \geq \frac{N}{2} + B - 2 \tag{2}$$

である.

(記号の意味は定理 1 と同様である.)

定理 1 は P を $(N/2+B-2)$ 個の長方形に分割することが可能であることを示し, 定理 2 は Fig. 4 のように 2 本の辺が同一直線に含まれる場合を除いて, 少なくとも $(N/2+B-2)$ 個の長方形が必要であることを示している. すなわち,

$$M = \frac{N}{2} + B - 2 \tag{3}$$

は必要分割数の本質的な意味での最小値を与えることになる. 定理を証明する前に補題を述べる.

補題 1

長方形セル複体 P の頂点の個数を N , 境界をなしている閉折線の個数を B , とする. 内角が直角である頂点 (Fig. 5 ○印) を凸点と呼び, その個数を N_1 とする. 内角が 3 直角である頂点 (×印) を凹点と呼び, その個数を N_2 とする. このとき次式が成立する.

$$N_1 = \frac{N}{2} + 4 - 2B \tag{4}$$

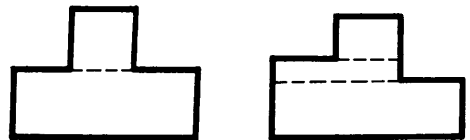


Fig. 4

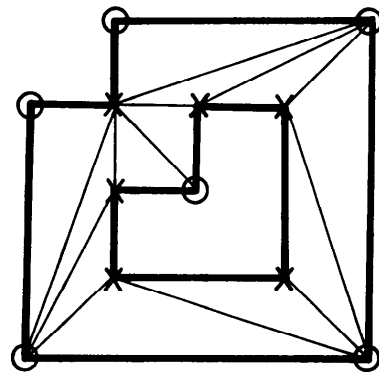


Fig. 5 ○ : convex point $N_1=6$
 × : concave point $N_2=6$

$$N_2 = \frac{N}{2} - 4 + 2B \quad (5)$$

(補題の証明)

P の各頂点を適当に結んで 3 角形分割を行う。そして 3 角形の個数を T 、新たにひかれた各頂点を結ぶ線の本数を E 、とおく。オイラーの定理⁹⁾より

$$\begin{aligned} & (\text{面の個数}) - (\text{線の個数}) + (\text{点の個数}) \\ & = 2 - B \end{aligned} \quad (6)$$

が成立する。したがって

$$T - (N + E) + N = 2 - B \quad (7)$$

一方、 P の境界の辺は唯一つの 3 角形の辺であり、新たにひかれた線は 2 個の 3 角形の辺になっているから

$$3T = N + 2E \quad (8)$$

式(7)、(8)より、 E を消去すると

$$T = N - 4 + 2B \quad (9)$$

が成立する。ここで各 3 角形の内角の総和は P の各頂点の内角の和に等しいから、

$$(N - 4 + 2B) \cdot 2\angle R = N_1 \cdot \angle R + N_2 \cdot 3\angle R \quad (10)$$

これより

$$N_1 + 3N_2 = 2N - 8 + 4B \quad (11)$$

が導びかれる。定義より

$$N_1 + N_2 = N \quad (12)$$

であるから式(11)、(12)より(4)、(5)が導びかれる。

(証終)

この補題を用いて定理の証明を行う。以下で分割点というのは P を長方形分割したときに、各長方形の頂点となる点のうち、 P の境界の頂点でないものである (Fig. 6 △印)。また P を分割している線を分割線ということにする。

(定理 1 の証明)

ある P が与えられたとき、 P の凹点を一個とって、 x または y の方向へ P の境界に達するまで分割線をひ

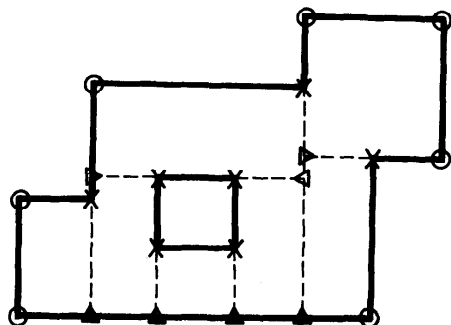


Fig. 6 $N_1=7, N_2=7, N_3=7$
 $N=14, B=2, N/2+B-2=7$

く、次にまた凹点を一個とって P の境界または、以前にひいた分割線に達するまで分割線をひく。これをすべての凹点について行えば一つの分割が得られる (Fig. 6)。この分割で生じる分割点の個数を N_3 、凹点の個数を N_2 、頂点の個数を N とすると

$$N_3 \leq N_2 \quad (13)$$

なることは明らかである。ここで P の境界の頂点は、ある一つの長方形の頂点であり、分割点は二つの長方形の頂点になっている。長方形の個数を M とすると

$$4M = N + 2N_3 \quad (14)$$

が成立する。式(13)、(14)及び補題 1 の式(4)、(5)より式(1)が導びかれる。

(証終)

(定理 2 の証明)

P に一つの分割が与えられたとき、 P の凹点の各々に対して異なった分割点を一個ずつ対応づけることができる。なぜなら凹点からは x または y 方向に少なくとも一本の分割線が出ていなければならない。各凹点にそこから出ている分割線の他端にある分割点を対応づける。このような分割点は、 P の境界のどの 2 本の辺も同一直線に含まれない、という条件より P の境界の辺上か他の分割線上にある。すなわちこの対応によって一つの分割点が二つ以上の凹点に対応づけられるようなことはない。したがって分割点の個数を N_3 、凹点の個数を N_2 とすると

$$N_3 \geq N_2 \quad (15)$$

がいえ。このとき P の境界の頂点は少なくとも一つの長方形の頂点になっており、分割点は少なくとも二つの長方形の頂点になっている。長方形の個数を M 、 P の境界の頂点の個数を N とすると

$$4M \geq N + 2N_3 \quad (16)$$

式(15)、(16)及び補題 1 の式(4)、(5)より式(2)が導びかれる (Fig. 7 参照)。

(証終)

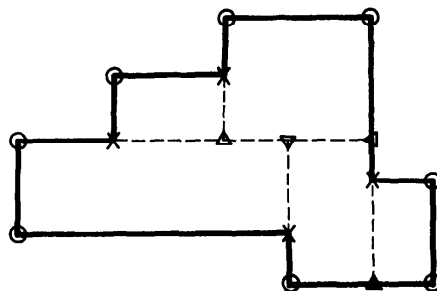


Fig. 7 $N_1=8, N_2=4, N_3=4$
 $N=12, B=1, N/2+B-2=5$

4. プログラム

プログラムは任意の長方形セル複体に対して、その分割数が式(1)以下となる分割を与えるように作られた。つまりどの2辺も同一直線に含まれていない場合には最小の分割を与え、2辺が同一直線に含まれている場合には最適化処理を行なって分割数をできるだけ少なくしている。

データ構造は、長方形セル複体Pの水平の辺を表わすベクトルの表よりなっている。まずPのおかれた平面に自然なx-y座標を導入し、Pのすべての辺をx軸、y軸に平行にする。そしてPの境界に反時計回りの方向を与える*。

方向が与えられた水平の辺を \vec{a} , \overrightarrow{AB} などと書く。また、 $\vec{a} = (x, x', y)$ と書いて

x : \vec{a} の始点のx座標

x' : \vec{a} の終点のx座標

y : \vec{a} のy座標、を表わすものとする (Fig. 8)。

次に述べるのはアルゴリズムの概略である。これによって分割数は式(1)以下となる。

(アルゴリズム)

[1] Pの水平の辺の中でy座標最大のものを \overrightarrow{AB} とする。 $\overrightarrow{AB} = (x_1, x_1', y_1)$ とおく。

[2] x軸方向の射影が \overrightarrow{AB} と重なっている辺の中でy座標最大のものを \overrightarrow{CD} とする。

$$\overrightarrow{CD} = (x_2, x_2', y_2), (x_1, x_1') \cap (x_2, x_2') \neq \emptyset$$

[3] 長方形Lを \overrightarrow{AB} と、点A, 点Bから垂直におろした線、及び \overrightarrow{CD} で囲まれた領域とする。即ち、

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1' \leq x \leq x_1, y_2 \leq y \leq y_1\}$$

(Fig. 9 参照)

[4] もしL=Pならば終り、そうでなければPか

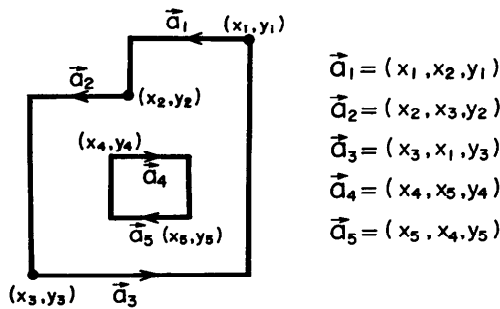


Fig. 8

* Pの内部を左にみる方向

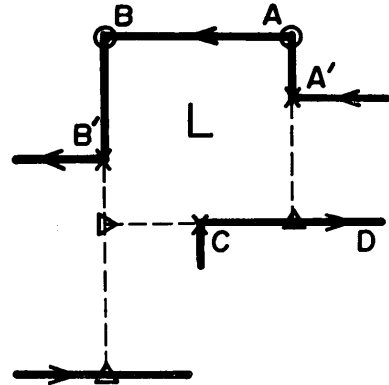


Fig. 9

らLを除いた図形を新たにPとして(データ構造を更新して), [1]へもどる。

このアルゴリズムは定理1にその基礎をおいている。どの2辺も同一直線に含まれない場合には分割線は定理1の証明で述べたと同様に各凹点からPの境界、または他の分割線までひかれる。したがって分割数が式(1)になることは容易に証明できる。

2つ以上の辺が同一直線に含まれる場合には、それを利用して分割数を少なくすることができる。即ちFig. 4のように向かいあった凹点を結ぶ分割線をひけばよい。Fig. 4のような辺の組が多くある場合の最適処理に関しては、まだ完全には解明されていない。我々は単に上述のような辺の組が見つかったときに、それを結ぶことで満足することにした。上述のアルゴリズムは垂直の2辺がx座標を共有している場合には2個の凹点を結ぶ分割線をひく、したがって水平の2辺がy座標を共有している場合の処理をつけ加えれば十分である。アルゴリズムのステップ[2]で $\overrightarrow{AB} = (x_1, x_1', y_1)$, $\overrightarrow{CD} = (x_2, x_2', y_2)$ に対して $\vec{a} = (x_0, x_1, y_0)$, $\vec{b} = (x_1', x_0, y_0)$, $y_2 < y_0 < y_1$ なる \vec{a} , \vec{b} が存在するかどうかを調べる(もちろん $x_0 < x_1, x_0 < x_1'$)。もし存在すればステップ[3]におけるLを

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1' \leq x \leq x_1, y_0 \leq y \leq y_1\}$$

とおいた処理を行う。

以上のアルゴリズムとデータ構造に基づいてプログラムが作成された。検査の結果は、一部に最適解を求めない例もあったが、実際上の問題としては全く支障はなく、満足すべきものであった。Fig. 10 (次頁参照)に出力結果をプロッターで書かせたものを示しておく。

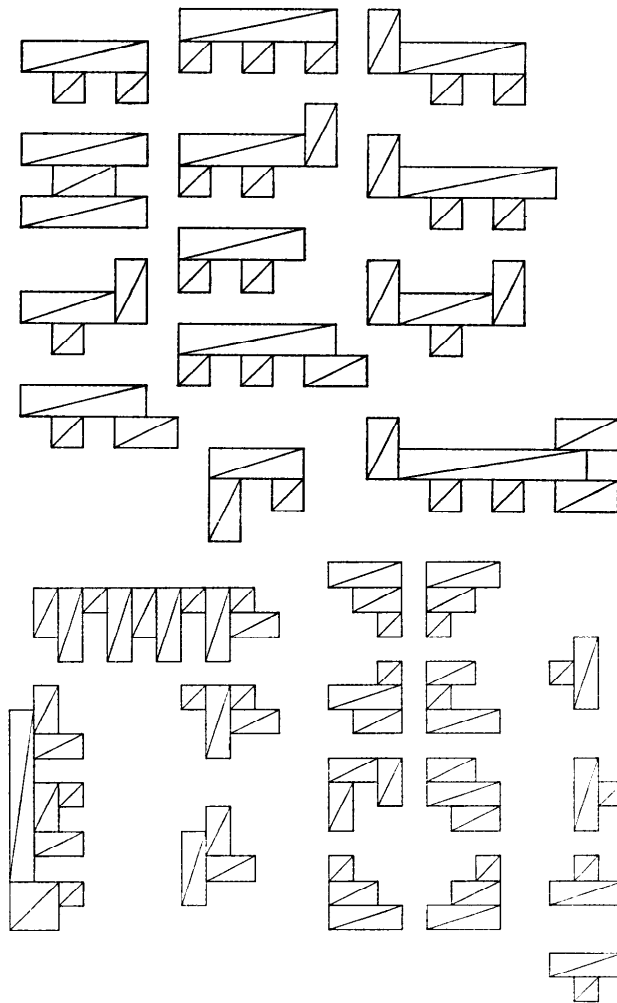


Fig. 10 examples of output

謝 辞

有益な御助言を戴いた東大伊理教授，並びに当社，中央研究所コンピュータシステム研究部，藤野部長代理，大附主任，後藤氏，及び先輩，上司の方々に感謝します。

参 考 文 献

1) 小山田「長方形セル複体の最小分割」情報処理

学会，第14回大会，講演集 pp. 125~126(1973)

2) J. Sklansky, R.L. Chazin, B.J. Hansen :
 "Minimum-Perimeter Polygons of Digitized
 Silhouettes IEEE Vol. C-21, No. 3, pp. 260~
 268 (1972)

3) 河田「位相数学」p. 200, 共立出版 (1958)
 (昭和49年8月21日受付)
 (昭和50年1月27日再受付)