Vol. 16 No. 12 情　報　処　理 Dec. 1975

論 文

ワン・パス法によるデータ平滑化の安定性*

市田浩三** 吉本富士市*** 清野　武**

Abstract

The stability of data smoothing is examined when we use the one-pass methods with piecewise cubic polynomials. In case that the approximate function is continuous with its first derivative at the knots, the algorithm is stable. However, it becomes unstable if we set the approximate function continuous up to the second derivative.

1. まえがき

実験データの平滑化をオンラインで行うとき，データを部分的に少しずつ処理するのが望ましいことがある．すべてのデータが得られた後では，データ量が多すぎて，ミニコンで処理するには時間がかかりすぎる，という問題がある．また，途中までの平滑化で得られた値によって，システムのパラメータを変更して，平滑化を続ける場合もある．

このためには，データの最初から出発し，少しずつ平滑化を行っていく方法――ワン・パス法とよぶ――が必要であるが，このような方法は少ない．移動平均を用いる方法はよく知られているが，平滑化の結果は望ましくないことがあり，データ圧縮の点からも満足できない．

筆者らは，区分的3次関数を用いたワン・パス法を開発した[1),2)]．そこでは，安定性については議論しなかったが，ワン・パス法では安定に平滑化が行われることが必要である．これは，常微分方程式を逐次的に解くとき，その安定性が問題になるのと類似している．

本稿では，近似関数として区分的3次関数を用いたときの，ワン・パス法の安定性について考察した．文献[1)]で述べた，近似関数が1次微分まで連続のときの平滑化をワン・パス法1とよぶことにすると，この方法は安定であるが，2次微分まで連続にしたスプライン関数を用いると（ワン・パス法2とよぶ）不安定になり，近似関数が振動して，平滑化がうまくできないことがわかる．

* The Stability of Data Smoothing by One Pass Methods by Kozo ICHIDA, Takeshi KIYONO (Department of Information Science, Faculty of Engineering, Kyoto University) and Fujiichi YOSHIMOTO (Akashi Technical College).

** 京都大学工学部情報工学科
*** 明石工業高等専門学校

2. ワン・パス法1の安定性

独立変数 x_k の値に対して，データ

$$F_k=f(x_k)+\varepsilon_k \quad (k=1,2,\cdots) \tag{1}$$

が次々と得られるものとする．ここで，$f(x)$ は未知の関数であり，ε_k は誤差である．近似関数として，次の区分的3次関数を用いる．区間 $[x^{(i-1)}, x^{(i)}]$ $(i=1,2,\cdots)$ において

$$S_i(x)=y_{i-1}+m_{i-1}(x-x^{(i-1)})+a_i(x-x^{(i-1)})^2+b_i(x-x^{(i-1)})^3. \tag{2}$$

ここで，$x^{(i-1)}$ $(i=1,2,\cdots)$ は節点であり

$$\left.\begin{aligned} y_{i-1}&=S_i(x^{(i-1)}),\\ m_{i-1}&=\frac{d}{dx}S_i(x)\Big|_{x=x^{(i-1)}} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

である．また，a_i, b_i は最小2乗法によって決める定数である．区間 $[x^{(i-1)}, x^{(i)}]$ 内のデータだけを用いて区間の端の近似関数とその微係数の値 y_i, m_i を最小2乗法で決めると，平滑化がうまくいかず，振動を生じる．そこで，区間 $[x^{(i-1)}, x^{(i)}]$ より先のデータと過去のデータを利用して，平滑化を行う(**Fig. 1**)．先のデータは区間 $[x^{(i)}, \bar{x}^{(i+1)}]$($\bar{x}^{(i+1)}-x^{(i)}=x^{(i)}-$

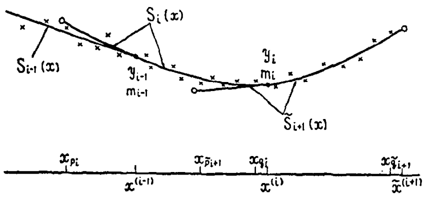

Fig. 1 Smoothing by one-pass method 1.

$x^{(i-1)}$）の中にあるものを考慮し，その区間で仮に決める関数を

$$\tilde{S}_{i+1}(x)=y_i+m_i(x-x^{(i)})+\tilde{a}_{i+1}(x-x^{(i)})^2+\tilde{b}_{i+1}(x-x^{(i)})^3 \qquad (4)$$

と表わす．ここで〜をつけたものは，それが仮に決める量であることを示す．$x=x^{(i)}$ における近似関数とその微係数の連続条件より

$$\left.\begin{aligned} y_i&=y_{i-1}+m_{i-1}h_i+a_ih_i^2+b_ih_i^3,\\ m_i&=m_{i-1}+2a_ih_i+3b_ih_i^2 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

が成り立つ．ここで，$h_i=x^{(i)}-x^{(i-1)}$ である．

そうすれば，（部分的な）残差の2乗和は

$$J=\sum_{k=p_i}^{q_i}\{S_i(x_k)-F_k\}^2+w\sum_{k=\tilde{p}_{i+1}}^{\tilde{q}_{i+1}}\{\tilde{S}_{i+1}(x_k)-F_k\}^2 \qquad (6)$$

と書き表わせる．ただし，$p_i(\tilde{p}_{i+1}), q_i(\tilde{q}_{i+1})$ はそれぞれ(6)式の右辺第1項（第2項）に含まれる最初と最後のデータの添字であり（Fig. 1 参照），仮に決める1区間先に対しては重み w がかけられている．(6)式をパラメータについて微分して0とおき，正規方程式を求めて(5)式を利用すれば，y_i, m_i と y_{i-1}, m_{i-1} の関係式が得られ，これより安定性を調べることができる．

しかし，これは一般に変数係数の差分方程式になり，近似関数の節点の位置，およびデータの x 座標の配置によって異なる．そこで，理想的な場合として，節点は等間隔で，データは一様で十分多く，残差の2乗和が積分で近似できる場合を考える．そうすれば(6)式は $(h_i\equiv h)$

$$\begin{aligned}
J&=\int_{x^{(i-1)}-\alpha h}^{x^{(i)}}\{S_i(x)-F(x)\}^2dx+w\times\int_{x^{(i)}-\alpha h}^{x^{(i+1)}}\{\tilde{S}_{i+1}(x)-F(x)\}^2dx\\
&=\int_{x^{(i-1)}-\alpha h}^{x^{(i)}}\{y_{i-1}+m_{i-1}(x-x^{(i-1)})+a_i(x-x^{(i-1)})^2+b_i(x-x^{(i-1)})^3-F(x)\}^2dx\\
&\quad+w\int_{x^{(i)}-\alpha h}^{x^{(i+1)}}\{y_i+m_i(x-x^{(i)})+\tilde{a}_{i+1}(x-x^{(i)})^2+\tilde{b}_{i+1}(x-x^{(i)})^3-F(x)\}^2dx\\
&=\int_{x^{(i-1)}-\alpha h}^{x^{(i)}}\{y_{i-1}+m_{i-1}(x-x^{(i-1)})+a_i(x-x^{(i-1)})^2+b_i(x-x^{(i-1)})^3-F(x)\}^2dx\\
&\quad+w\int_{x^{(i)}-\alpha h}^{x^{(i+1)}}\{y_{i-1}+m_{i-1}(x-x^{(i)}+h)+a_i[2(x-x^{(i)})h+h^2]+b_i[3(x-x^{(i)})h^2\\
&\quad+h^3]+\tilde{a}_{i+1}(x-x^{(i)})^2+\tilde{b}_{i+1}(x-x^{(i)})^3-F(x)\}^2dx \qquad (7)
\end{aligned}$$

となる．ここで，h は節点の間隔で，αh は過去のデータを考慮する部分である．J を最小にするために

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial J}{\partial a_i}=0,\ \frac{\partial J}{\partial b_i}=0,\\ &\frac{\partial J}{\partial \tilde{a}_{i+1}}=0,\ \frac{\partial J}{\partial \tilde{b}_{i+1}}=0 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

とおくと正規方程式が得られ，a_i, b_i を求めることができる．これを(5)式に代入すれば，差分方程式

$$\begin{bmatrix} y_i\\ m_i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}h\\ \dfrac{a_{21}}{h} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{i-1}\\ m_{i-1} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} g_{i1}'\\ g_{i2}' \end{bmatrix} \qquad (9)$$

が得られる．ここで，$a_{ij}\ (i, j=1,2)$ は定数であり，g_{i1}', g_{i2}' は y_{i-1}, m_{i-1} に関係しない量である（付録1 P. 1052 参照）．

(9)式の安定性は行列の固有値，すなわち

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0 \qquad (10)$$

の根の絶対値と1との大小関係で決まる[3]．この固有値 $\lambda_i\ (i=1,2)$ は節点の間隔 w には関係しない．w と α を変化させたときの $\max_{1\le i\le 2}|\lambda_i|$ の変化を **Fig. 2** に示す．$w\geq 0.2$ であれば(9)式は安定である．ただし $\max|\lambda_i|$ の小さい方が平滑化の結果がいいとは限らない．実験結果によれば $w=1.0, \alpha=0.5$ 程度にとるのがよいように思われる．

3. ワン・パス法2の安定性

区分的3次関数を近似関数として用いる場合には，節点で関数値と1次微分および2次微分を連続にすることもできる．一般に（3次の）スプライン関数といえば，この場合をさすことが多い．そこで，ワン・パス法1と同様の考えで，2次微分まで連続にした場合について，その安定性を検討する．区間 $[x^{(i-1)}, x^{(i)}]$ において近似関数を

$$R_i(x)=y_{i-1}+m_{i-1}(x-x^{(i-1)})+\frac{1}{2}M_{i-1}(x$$

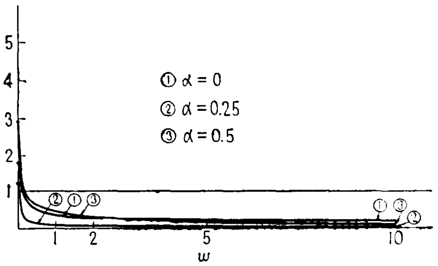

Fig. 2 The maximum absolute of roots of eq. (10)

$$-x^{(i-1)})^2+a_i(x-x^{(i-1)})^3 \tag{11}$$

と表わす．(3)式と同様

$$\left.\begin{aligned} y_{i-1}&=R_i(x^{(i-1)}),\\ m_{i-1}&=\frac{d}{dx}R_i(x)\Big|_{x=x^{(i-1)}},\\ M_{i-1}&=\frac{d^2}{dx^2}R_i(x)\Big|_{x=x^{(i-1)}} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

であることは容易に確かめることができる．(4)式と同様，区間 $[x^{(i)}, \bar{x}^{(i+1)}]$ における仮の近似関数を

$$\bar{R}_{i+1}(x)=y_i+m_i(x-x^{(i)})+\frac{1}{2}M_i(x-x^{(i)})^2$$
$$+\bar{a}_{i+1}(x-x^{(i)})^3 \tag{13}$$

とする．$x=x^{(i)}$ において近似関数と1次微分および2次微分は連続であるから

$$\left.\begin{aligned} y_i&=y_{i-1}+m_{i-1}h+\frac{1}{2}M_{i-1}h^2+a_ih^3,\\ m_i&=m_{i-1}+M_{i-1}h+3a_ih^2,\\ M_i&=M_{i-1}+6a_ih \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

が成り立つ $(x^{(i)}-x^{(i-1)}\equiv h, i=1,2,\cdots)$ (7)式に対応する J は

$$J=\int_{x^{(i-1)}-\alpha h}^{x^{(i)}}\{R_i(x)-F(x)\}^2dx$$
$$+w\int_{x^{(i)}-\alpha h}^{\bar{x}^{(i+1)}}\{\bar{R}_{i+1}(x)-F(x)\}^2dx$$
$$=\int_{x^{(i-1)}-\alpha h}^{x^{(i)}}\Big\{y_{i-1}+m_{i-1}(x-x^{(i-1)})+\frac{1}{2}M_{i-1}(x$$
$$-x^{(i-1)})^2+a_i(x-x^{(i-1)})^3-F(x)\Big\}^2dx$$
$$+w\int_{x^{(i)}-\alpha h}^{\bar{x}^{(i+1)}}\Big\{y_i+m_i(x-x^{(i)})+\frac{1}{2}M_i(x$$
$$-x^{(i)})^2+\bar{a}_{i+1}(x-x^{(i)})^3-F(x)\Big\}^2dx$$
$$=\int_{x^{(i-1)}-\alpha h}^{x^{(i)}}\Big\{y_{i-1}+m_{i-1}(x-x^{(i-1)})+\frac{1}{2}M_{i-1}(x$$
$$-x^{(i-1)})^2+a_i(x-x^{(i-1)})^3-F(x)\Big\}^2dx$$
$$+w\int_{x^{(i)}-\alpha h}^{\bar{x}^{(i+1)}}\Big\{y_{i-1}+m_{i-1}(x-x^{(i)}+h)$$
$$+\frac{1}{2}M_{i-1}[(x-x^{(i)})^2+2(x-x^{(i)})h+h^2]$$
$$+a_i[3(x-x^{(i)})^2h+3(x-x^{(i)})h^2+h^3]$$
$$+\bar{a}_{i+1}(x-x^{(i)})^3-F(x)\Big\}^2dx \tag{15}$$

となる．(15)式を最小にするために

$$\frac{\partial J}{\partial a_i}=0,\ \frac{\partial J}{\partial \bar{a}_{i+1}}=0 \tag{16}$$

とおくと正規方程式が得られ，これより a_i が求められる．a_i を(14)式に代入すれば，差分方程式

$$\begin{bmatrix} y_i\\ m_i\\ M_i \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}h & b_{13}h^2\\ \dfrac{b_{21}}{h} & b_{22} & b_{23}h\\ \dfrac{b_{31}}{h^2} & \dfrac{b_{32}}{h} & b_{33} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} y_{i-1}\\ m_{i-1}\\ M_{i-1} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} d_{i1}'\\ d_{i2}'\\ d_{i3}' \end{bmatrix} \tag{17}$$

が得られる．ここで，$b_{ij}\,(i,j=1,2,3)$ は定数であり，$d_{i1}', d_{i2}', d_{i3}'$ は $y_{i-1}, m_{i-1}, M_{i-1}$ に関係しない量である（付録2 P. 1053 参照）．

行列の固有値は

$$\lambda^3-(b_{11}+b_{22}+b_{33})\lambda^2+(b_{11}b_{22}+b_{11}b_{33}+b_{22}b_{33}$$
$$-b_{12}b_{21}-b_{13}b_{31}-b_{23}b_{32})\lambda+b_{11}b_{23}b_{32}$$
$$+b_{12}b_{21}b_{33}+b_{13}b_{22}b_{31}-b_{11}b_{22}b_{33}$$
$$-b_{12}b_{23}b_{31}-b_{13}b_{21}b_{32}=0 \tag{18}$$

の根によって与えられ，節点の間隔 h に関係しない．w と α を変化させたときの $\max_{1\le i\le 3}|\lambda_i|$ のグラフを Fig. 3 に示す．$\max_{1\le i\le 3}|\lambda_i|$ の値は w の増加とともに減少するが1より大きく（$w>5$ではほぼ一定になる），(17)式は不安定であることがわかる．したがって，2次微分まで連続な区分的3次関数は，ワン・パス法によるデータ平滑化には不適当である．

4. 計算例

つぎの関数

$$F_k=\frac{1}{0.01+(x_k-0.3)^2}+\frac{1}{0.015+(x_k-1.2)^2}+\varepsilon_k \tag{19}$$

を用いて平滑化の計算を行った．x_k は 0.005 から 1.995 まで 0.01 おきに等間隔にとった．ε_k は期待値0，分散4の正規分布をする誤差である．ワン・パス法1とワン・パス法2を用いて計算した結果を **Fig. 4** と **Fig. 5** (Fig. 4, 5 は次頁参照) に示す．ただし，重みwは1.0とし，過去のデータは，考えている区間の長さの半分に含まれているものだけを考慮した．近

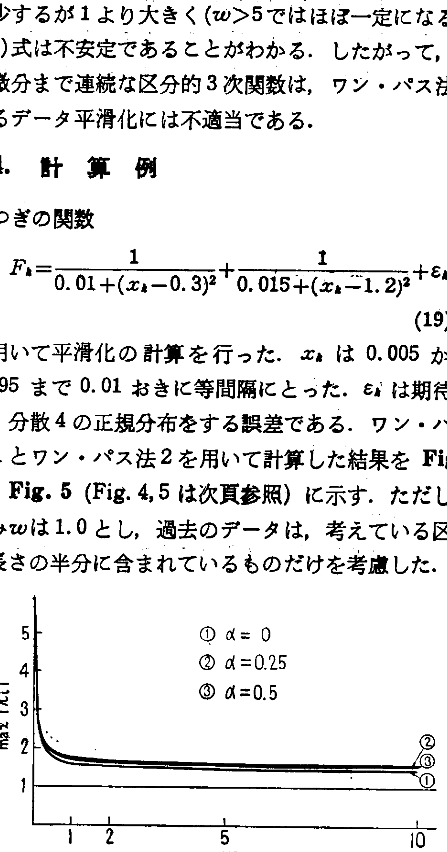

Fig. The maximum absolute of roots of eq (18)

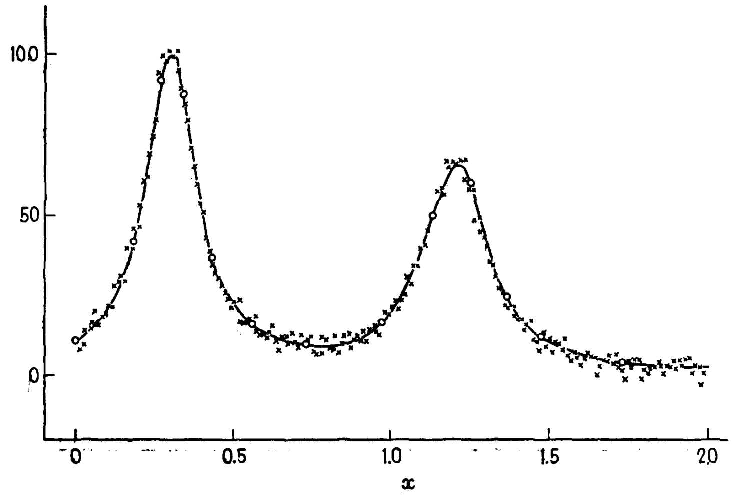

Fig. 4 Result of example by one-pass method 1

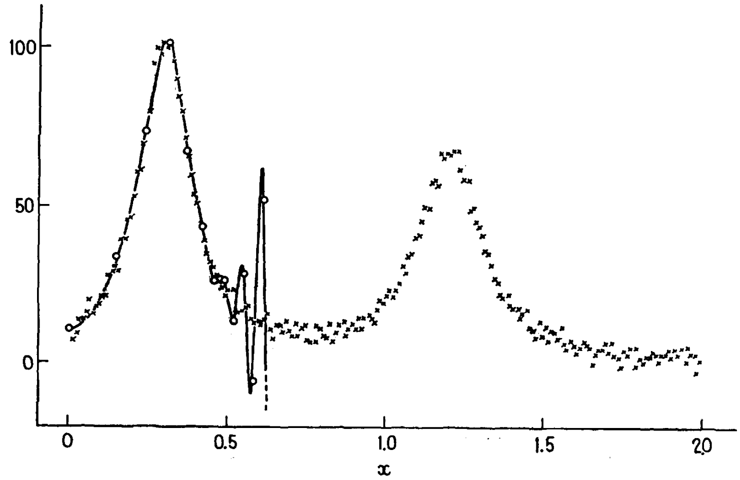

Fig. 5 Result of example by one-pass method 2

似関数の節点の位置は'傾向'[1)]を用いて決めているので等間隔ではないが，(9)，(17)に対応する式から固有値を求めてみると（固有値は一定でなく，各区間によって異なる），(9)，(17)で求めた値とあまり変らない．一般に，(9)，(17)の理想的な場合と異なり，データのx座標や近似関数の節点は等間隔でないので，差分方程式は変数係数となり，その安定性は固有値のみで判定できない．しかし，実験結果によると，一般の不規則なデータに対しても，ワン・パス法1が安定で，ワン・パス法2が不安定になることが認められた．

データ数が有限であっても，そのx座標および節点が等間隔であれば，差分方程式は定数係数となり，その安定性は固有値だけで判定できる．この場合には，Fig. 2, Fig. 3 とほぼ同様の結果が得られる．なお，安定性はデータのy座標F_kの値には関係しない．

5. むすび

ミニコンなどでデータ平滑化を行うとき有効なワン・パス法の安定性について考察した．近似関数として区分的3次関数を用い，1次微分まで連続な場合と2次微分まで連続にした場合について，節点は等間隔で，データは一様で十分多く，残差の2乗和が積分で近似できる理想的な場合に，差分方程式を導出した．

このときは，行列の固有値によって，安定性を判別することができる．これによると，ワン・パス法1は安定であるが，ワン・パス法2は不安定である．データ数が有限のときも，節点とデータのx座標が等間隔であれば，理想的な場合と同様差分方程式は定数係数となり，固有値で安定性を判別できる．それ以外の一般の場合は，差分方程式が変数係数となり，固有値のみで安定性を議論できないが，実験結果によると，ほぼ理想的な場合と同様の結果が得られた．区分的3次関数を用いたワン・パス法で平滑化を行うときは，1次微分まで連続にする方がよく，'傾向'を用いることにより，自動的に平滑化を進めることができる[1].

ここでは，1区間先のデータを考慮に入れたが，2区間またはそれ以上先のデータを考慮することもでき，その場合にも，安定性については同様に考えることができる．しかし，計算量が増加すること，また，あまり先のデータが得られるまで待つのは好ましくないことから，ここでは省略した．

なお，文献 1) では述べなかったが，ワン・パス法で計算するとき，計算精度をよくするために，原点移動を行うことが望ましい．

参　考　文　献

1) 市田，吉本，清野：区分的3次関数を用いたワン・パス法によるデータ平滑化，情報処理，Vol. 15, No. 6, pp. 414～418 (1974).

2) 吉本，市田，清野：ワン・パス法によるデータ平滑化，情報処理，Vol. 15, No. 6, pp. 477～479 (1974).

3) 森正武：数値解析，p. 273，共立出版，東京 (1973).

(昭和50年4月23日受付)
(昭和50年6月27日再受付)

付録 1　(9)式の導出

(8)式より連立方程式

$$h^6\begin{pmatrix} \frac{u_{11}}{h} & u_{12} & \frac{u_{13}}{h} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22}h & u_{23} & u_{24}h \\ \frac{u_{31}}{h} & u_{32} & \frac{u_{33}}{h} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42}h & u_{43} & u_{44}h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ a_{i+1} \\ b_{i+1} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2h \\ r_3 \\ r_4h \end{pmatrix}h^4 m_{i-1}+\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2h \\ S_3 \\ S_4h \end{pmatrix}h^3 y_{i-1}+\begin{pmatrix} G_{i1} \\ G_{i2} \\ G_{i3} \\ G_{i4} \end{pmatrix} \qquad (20)$$

が得られる．ここで

$$u_{11}=\frac{1}{5}(1+\alpha^5)+w\left(\frac{4}{3}\alpha^3-2\alpha^2+\alpha+\frac{13}{3}\right),$$

$$u_{12}=\frac{1}{6}(1-\alpha^6)+w\left(2\alpha^3-\frac{5}{2}\alpha^2+\alpha+\frac{11}{2}\right),$$

$$u_{13}=w\left(-\frac{1}{2}\alpha^4+\frac{1}{3}\alpha^3+\frac{5}{6}\right),$$

$$u_{14}=w\left(\frac{2}{5}\alpha^5-\frac{1}{4}\alpha^4+\frac{13}{20}\right),$$

$$u_{21}=\frac{1}{6}(1-\alpha^6)+w\left(2\alpha^3-\frac{5}{2}\alpha^2+\alpha+\frac{11}{2}\right),$$

$$u_{22}=\frac{1}{7}(1+\alpha^7)+w(3\alpha^3-3\alpha^2+\alpha+7),$$

$$u_{23}=w\left(-\frac{3}{4}\alpha^4+\frac{1}{3}\alpha^3+\frac{13}{12}\right),$$

$$u_{24}=w\left(\frac{3}{5}\alpha^5-\frac{1}{4}\alpha^4+\frac{17}{20}\right),$$

$$u_{31}=-\frac{1}{2}\alpha^4+\frac{1}{3}\alpha^3+\frac{5}{6},$$

$$u_{32}=-\frac{3}{4}\alpha^4+\frac{1}{3}\alpha^3+\frac{13}{12},$$

$$u_{33}=\frac{1}{5}(1+\alpha^5),$$

$$u_{34}=\frac{1}{6}(1-\alpha^6),$$

$$u_{41}=\frac{2}{5}\alpha^5-\frac{1}{4}\alpha^4+\frac{13}{20},$$

$$u_{42}=\frac{3}{5}\alpha^5-\frac{1}{4}\alpha^4+\frac{17}{20},$$

$$u_{43}=\frac{1}{6}(1-\alpha^6),$$

$$u_{44}=\frac{1}{7}(1+\alpha^7),$$

$$r_1=-\frac{1}{4}(1-\alpha^4)-w\left(\frac{2}{3}\alpha^3-\frac{3}{2}\alpha^2+\alpha+\frac{19}{6}\right),$$

$$r_2=-\frac{1}{5}(1+\alpha^5)-w(\alpha^3-2\alpha^2+\alpha+4),$$

$$r_3=\frac{1}{4}\alpha^4-\frac{1}{3}\alpha^3-\frac{7}{12},$$

$$r_4=-\frac{1}{5}\alpha^5+\frac{1}{4}\alpha^4-\frac{9}{20},$$

$$S_1=-\frac{1}{3}(1+\alpha^3)+w(\alpha^2-\alpha-2),$$

$$S_2=-\frac{1}{4}(1-\alpha^4)+w\left(\frac{3}{2}\alpha^2-\alpha-\frac{5}{2}\right),$$

$$S_3=-\frac{1}{3}(1+\alpha^3),$$

$$S_4=-\frac{1}{4}(1-\alpha^4)$$

であり，$G_{i1}\sim G_{i4}$ は y_{i-1}, m_{i-1} に関係しない量である．(20)式の左辺の行列の逆行列は

$$h^{-6}\begin{pmatrix} v_{11}h & v_{12} & v_{13}h & v_{14} \\ v_{21} & \frac{v_{22}}{h} & v_{23} & \frac{v_{24}}{h} \\ v_{31}h & v_{32} & v_{33}h & v_{34} \\ v_{41} & \frac{v_{42}}{h} & v_{43} & \frac{v_{44}}{h} \end{pmatrix}$$

と書き表わせる．

$$\left.\begin{aligned} v_{1r}&=\sum_{k=1}^{4} v_{1k}r_k, \quad v_{1s}=\sum_{k=1}^{4} v_{1k}S_k, \\ v_{2r}&=\sum_{k=1}^{4} v_{2k}r_k, \quad v_{2s}=\sum_{k=1}^{4} v_{2k}S_k \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

とおくと，(20)式より

$$\left.\begin{aligned} a_i&=\frac{1}{h}v_{1r}m_{i-1}+\frac{1}{h^2}v_{1s}y_{i-1}+g_{i1}, \\ b_i&=\frac{1}{h^2}v_{2r}m_{i-1}+\frac{1}{h^3}v_{2s}y_{i-1}+g_{i2} \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

が得られる．ここで，g_{i1}, g_{i2} は y_{i-1}, m_{i-1} に関係しない量である．(22)式を(5)式に代入すると $(h_i\equiv h)$

$$\begin{aligned} y_i&=y_{i-1}+m_{i-1}h+a_ih^2+b_ih^3 \\ &=y_{i-1}+hm_{i-1}+hv_{1r}m_{i-1}+v_{1s}y_{i-1} \\ &\quad +hv_{2r}m_{i-1}+v_{2s}y_{i-1}+g_{i1}' \\ &=(1+v_{1s}+v_{2s})y_{i-1}+h(1+v_{1r}+v_{2r})m_{i-1}+g_{i1}' \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} m_i&=m_{i-1}+2a_ih+3b_ih^2 \\ &=m_{i-1}+2v_{r1}m_{i-1}+\frac{2}{h}v_{1s}y_{i-1}+3v_{2r}m_{i-1} \\ &\quad +\frac{3}{h}v_{2s}y_{i-1}+g_{i2}' \\ &=\frac{1}{h}(2v_{1s}+3v_{2s})y_{i-1}+(1+2v_{1r}+3v_{2r})m_{i-1} \\ &\quad +g_{i2}', \end{aligned} \quad (24)$$

すなわち

$$\begin{bmatrix} y_i \\ m_i \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}h \\ \frac{a_{21}}{h} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} y_{i-1} \\ m_{i-1} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} g_{i1}' \\ g_{i2}' \end{bmatrix} \quad (25)$$

が得られる．ここで

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}=1+v_{1s}+v_{2s}, \quad a_{21}=1+v_{1r}+v_{2r} \\ &a_{21}=2v_{1s}+3v_{2s}, \quad a_{22}=1+2v_{1r}+3v_{2r}, \\ &g_{i1}'=h^2g_{i1}+h^3g_{i2}, \quad g_{i1}'=2hg_{i1}+3h^2g_{i2} \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

である．

付録 2 (17)式の導出

(16)式より，連立方程式

$$h^7\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_i \\ \bar{a}_{i+1} \end{bmatrix}=h^6\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}M_{i-1}+h^5\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}m_{i-1}$$
$$+h^4\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}y_{i-1}+\begin{bmatrix} D_{i1} \\ D_{i2} \end{bmatrix} \quad (27)$$

が得られる．ここで

$$u_{11}=\frac{1}{7}(1+\alpha^7)+w\left(\frac{9}{5}\alpha^5-\frac{9}{2}\alpha^4+5\alpha^3-3\alpha^2+\alpha+\frac{153}{10}\right),$$

$$u_{12}=w\left(-\frac{1}{2}\alpha^6+\frac{3}{5}\alpha^5-\frac{1}{4}\alpha^4+\frac{27}{20}\right),$$

$$u_{21}=-\frac{1}{2}\alpha^6+\frac{3}{5}\alpha^5-\frac{1}{4}\alpha^4+\frac{27}{20},$$

$$u_{22}=\frac{1}{7}(1+\alpha^7),$$

$$r_1=-\frac{1}{12}(1-\alpha^6)-w\left(\frac{3}{10}\alpha^5-\frac{9}{8}\alpha^4+\frac{5}{3}\alpha^3-\frac{5}{4}\alpha^2+\frac{1}{2}\alpha+\frac{581}{120}\right),$$

$$r_2=\frac{1}{12}\alpha^6-\frac{1}{5}\alpha^5+\frac{1}{8}\alpha^4-\frac{49}{120},$$

$$S_1=-\frac{1}{5}(1+\alpha^5)+w\left(\frac{3}{4}\alpha^4-2\alpha^3+2\alpha^2-\alpha-\frac{23}{4}\right),$$

$$S_2=-\frac{1}{5}\alpha^5+\frac{1}{4}\alpha^4-\frac{9}{20},$$

$$t_1=-\frac{1}{4}(1-\alpha^4)-w\left(\alpha^3-\frac{3}{2}\alpha^2+\alpha+\frac{7}{2}\right),$$

$$t_2=-\frac{1}{4}(1-\alpha^4)$$

であり，D_{i1}, D_{i2} は $y_{i-1}, m_{i-1}, M_{i-1}$ に関係しない量である．(27)式の左辺の行列の逆行列を

$$h^{-7}\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

とおけば

$$a_i=\frac{1}{h}v_rM_{i-1}+\frac{1}{h^2}v_sm_{i-1}+\frac{1}{h^3}v_ty_{i-1}+d_{i1} \quad (28)$$

となる．ただし

$$v_r=v_{11}r_1+v_{12}r_2,$$
$$v_s=v_{11}S_1+v_{12}S_2,$$
$$v_t=v_{11}t_1+v_{12}t_2$$

であり，d_{i1} は $y_{i-1}, m_{i-1}, M_{i-1}$ に関係しない．

(28)式を(14)式に代入すれば

$$y_i=(1+v_t)y_{i-1}+h(1+v_s)m_{i-1}$$
$$+h^2\left(\frac{1}{2}+v_r\right)M_{i-1}+d_{i1}',$$

$$\left.\begin{aligned} m_i&=\frac{3}{h}v_t y_{i-1}+(1+3v_s)m_{i-1}\\ &\quad+h(1+3v_r)M_{i-1}+d_{i2}'\\ M_i&=\frac{6}{h^2}v_t y_{i-1}+\frac{6}{h}v_s m_{i-1}\\ &\quad+(1+6v_r)M_{i-1}+d_{i3}' \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} y_i\\ m_i\\ M_i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}h & b_{13}h^2\\ \frac{b_{21}}{h} & b_{22} & b_{23}h\\ \frac{b_{31}}{h^2} & \frac{b_{32}}{h} & b_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{i-1}\\ m_{i-1}\\ M_{i-1} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} d_{i1}'\\ d_{i2}'\\ d_{i3}' \end{pmatrix} \quad (30)$$

が得られる．ここで

$$\left.\begin{aligned} &b_{11}=1+v_t,\quad b_{12}=1+v_s,\quad b_{13}=\frac{1}{2}+v_r,\\ &b_{21}=3v_t,\quad b_{22}=1+3v_s,\quad b_{23}=1+3v_r,\\ &b_{31}=6v_t,\quad b_{32}=6v_s,\quad b_{33}=1+6v_r,\\ &d_{i1}'=h^3d_{i1},\quad d_{i2}'=3h^2d_{i1},\quad d_{i3}'=6hd_{i1} \end{aligned}\right\}$$

である．