論 文

奇数次の Cardinal Spline を求める Algorithm について*

馬 渡 鎮 夫**

Abstract

This paper describes the following algorithms: (a) construction of natural cardinal splines of odd degrees, (b) construction of complete cardinal splines from natural cardinal splines, and (c) translation of the representation of spline functions with cardinal spline basis into the representation with normalized B-spline basis.

1. はじめに

有限な閉区間〔a, b〕の分割 π：

$$a \leqq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leqq b \qquad (1.1)$$

の各点を knots に持つ次数 $2q-1$（$q \geqq 2$ かつ q は整数）の spline function の全体を $\boldsymbol{S}(2q:\pi)$ とする．任意に与えられた実数列 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ に対し，条件：

$$S(x_i) = f_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (1.2)$$

を満たす $S \in \boldsymbol{S}(2q:\pi)$ を求める問題を Spline Interpolation Problem といい，追加される条件によって次の 3 種に分けられる．

〔A〕 Natural Spline Interpolation Problem

条件(1.2)および次の条件(1.3)を満たす $S \in \boldsymbol{S}(2q:\pi)$ (natural spline interpolation) を求める問題．

$$\left.\begin{aligned} S^{(q)}(x_1) &= S^{(q+1)}(x_1) = \cdots = S^{(2q-2)}(x_1) = 0, \\ S^{(q)}(x_n) &= S^{(q+1)}(x_n) = \cdots = S^{(2q-2)}(x_n) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.3)$$

〔B〕 Complete Spline Interpolation Problem

条件(1.2)および次の条件(1.4)を満たす $S \in \boldsymbol{S}(2q:\pi)$ (complete spline interpolation) を求める問題．

任意に与えられた実数列 $y_1, y_2, \cdots, y_{q-1}, z_1, z_2, \cdots, z_{q-1}$ に対して，

$$S^{(r)}(x_1) = y_r, \quad S^{(r)}(x_n) = z_r \qquad (r=1,2,\cdots,q-1) \quad (1.4)$$

〔C〕 Hermite Spline Interpolation Problem

条件(1.2)および次の条件(1.5)を満たす $S \in \boldsymbol{S}(2q:\pi)$ を求める問題．

任意に与えられた $q-1$ 個の実数列 $y_1(i), y_2(i), \cdots, y_{q-1}(i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ に対し，

$$S^{(r)}(x_i) = y_r(i) \qquad (r=1,2,\cdots,q-1\,;\ i=1,2,\cdots,n). \quad (1.6)$$

本論では問題〔A〕および〔B〕を考察する．〔A〕および〔B〕の条件を満たす spline function を構成する Algorithm は多数報告されており，それらは次の 4 種に大別されるように思われる．(i) 各小区間〔x_i, x_{i+1}〕上での $2q-1$ 次の多項式を求める方法[1),11)]，(ii) Projection による方法[2),3)]，(iii) direct resolution による方法[3),12)]，(iv) basis を利用する方法[4),5),7)~9),14)]．

しかし，これらの多数の研究にもかかわらず，spline function の構成法に関してはなお研究の余地が残されている．ここでは次の 2 点について考察する．(a) spline function は Cardinal spline を基底として簡潔明瞭に表現され，この基底自身興味深い性質を持っており，またそのような表現は早くから研究された．それにもかかわらず，Cardinal spline の特性を良く生かし得るような Algorithm は未発表のようである．(b) spline function は，B-spline や truncated power function を基底としても表現することができる．これらの基底による表現はそれぞれ一長一短あって，目的に応じて使い分けて然るべきものである．従って，ある基底によって表現されたものを他の基底へ変換する方法が必要となるが，そのような変換法についてもまだ報告されていないようである．

本論の目的はそのような研究の余地を解消する一方法を述べることにある．すなわち，本論においては他

---

* On an Algorithm for Construction of Cardinal Splines of Odd Degrees by Shizuo MAWATARI (Department of Management Engineering, College of Science and Engineering, Aoyama Gakuin University)

** 青山学院大学理工学部経営工学科

の基底への変換法を明確にした後，spline function の基底として Cardinal spline をとり，任意の分割(1.1)の点を knots に持つ次数 $2q-1$ ($q\geqq 2$ かつ q は整数)の Cardinal spline を構成する方法を述べる．

なお，(1.2)の条件を満たし，かつ，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を knots に持つ spline function は奇数次に限られるので[6]，次数が $2q-1$ であるという制限は我々の問題に対して何ら一般性を失なわない．

2. Spline Function の定義と基底

定義 2.1

任意に与えられた分割(1.1)において，次の性質(2.1)および(2.2)を持つ実数値関数 $S(x)$ を，$x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}$ を knots に持つ order $2q$ の simple spline といい，その全体を $\boldsymbol{S}(2q\,;\,x_2,\cdots,x_{n-1})$ と書きあらわす．

(2.1) $S(x)$ は，各区間；

$$(x_i, x_{i+1}) \quad (i=1,2,\cdots,n-1)$$

の上で，高々 $2q-1$ 次の多項式である．

(2.2) $S(x)$ は，点 $x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}$ において $2q-2$ 回連続的に微分可能である．

定義 2.2

任意に与えられた分割(1.1)において，性質(2.1)，(2.2)および次の性質(2.3)を持つ実数値関数 $S(x)$ を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を knots に持つ order $2q$ の simple natural spline といい，その全体を $\boldsymbol{N}(2q\,;\,x_1,\cdots,x_n)$ と書き表わす．

(2.3) $S(x)$ は，$(-\infty, x_1), (x_n, \infty)$ において高々 $q-1$ 次の多項式であり，点 x_1 および x_n において $2q-2$ 回連続的に微分可能である*．

任意の整数 $k\geqq 0$ に対して，

$$x_+^k=\begin{cases}x^k & \text{if } x\geqq 0,\\ 0 & \text{if } x<0\end{cases} \qquad (2.4)$$

とおき（ただし，$0_+^0=1$ とする．），x_+^k を truncated power function という．このとき，任意の $\tilde{S}\in\boldsymbol{S}(2q\,;\,x_2,\cdots,x_{n-1})$ は次のように書き表わされる．

$$\tilde{S}(x)=\sum_{i=0}^{2q-1}\tilde{a}_i x^i+\sum_{j=2}^{n-1}\tilde{c}_j(x-x_j)_+^{2q-1}. \qquad (2.5)$$

また，任意の $S\in\boldsymbol{N}(2q\,;\,x_1,\cdots,x_n)$ は，次のように表現される．

$$S(x)=\sum_{i=0}^{q-1}a_i x^i+\sum_{j=1}^{n}c_j(x-x_j)_+^{2q-1}. \qquad (2.6)$$

関数；

$$M_{2q}(s\,;\,t)=(s-t)_+^{2q-1} \qquad (2.7)$$

の変数 s に関する点 $x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+m}$ 上の order m の divided difference を

$$M_{2q}(x_i,\cdots,x_{i+m}\,;\,t) \qquad (2.8)$$

とし，変数 t に関するものを

$$M_{2q}(s\,;\,x_i,\cdots,x_{i+m}) \qquad (2.9)$$

と書く．$n\geqq 2q$ のとき，$\boldsymbol{S}(2q\,;\,x_2,\cdots,x_{n-1})$，$\boldsymbol{N}(2q\,;\,x_1,\cdots,x_n)$ の1つの基底は，それぞれ (2.10)，(2.11)である[4]．

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{B}_i(x)=M_{2q}(x_2,\cdots,x_{i+1}\,;\,x)\quad(i=1,2,\cdots,2q)\\&\tilde{B}_{2q+i}(x)=M_{2q}(x_{i+1},\cdots,x_{i+1+2q}\,;\,x)\\&\qquad\qquad(i=1,2,\cdots,n-2q-2),\\&\tilde{B}_{n-2+i}(x)=(-1)^i M_{2q}(x\,;\,x_{n-2q-1+i},\cdots,x_{n-1})\\&\qquad\qquad(i=1,2,\cdots,2q)\end{aligned}\right\} \qquad (2.10)$$

$$\left.\begin{aligned}&B_i(x)=M_{2q}(x_1,\cdots,x_{q+i}\,;\,x)\quad(i=1,2,\cdots,q),\\&B_{q+i}(x)=M_{2q}(x_i,\cdots,x_{i+2q}\,;\,x)\\&\qquad\qquad(i=1,2,\cdots,n-2q),\\&B_{n-q+i}(x)=(-1)^i M_{2q}(x\,;\,x_{n-2q+i},\cdots,x_n)\\&\qquad\qquad(i=1,2,\cdots,q)\end{aligned}\right\} \qquad (2.11)$$

$\{\tilde{B}_i(x)\}_{i=1}^{n+2q-2}$ を Complete B-splines，$\{B_i(x)\}_{i=1}^{n}$ を Natural B-splines という．この基底を用いれば，任意の $\tilde{S}\in\boldsymbol{S}(2q\,;\,x_2,\cdots,x_{n-1})$, $S\in\boldsymbol{N}(2q\,;\,x_1,\cdots,x_n)$ は，それぞれ (2.12)，(2.13)のように一意的に表現される．

$$\tilde{S}(x)=\sum_{i=1}^{n+2q-2}\tilde{a}_i\tilde{B}_i(x). \qquad (2.12)$$

$$S(x)=\sum_{i=1}^{n}a_iB_i(x). \qquad (2.13)$$

一方，(1.2)および(1.4)を満たす $\tilde{S}\in\boldsymbol{S}(2q\,;\,x_2,\cdots,x_{n-1})$，(1.2)を満たす $S\in\boldsymbol{N}(2q\,;\,x_1\cdots,x_n)$ は，それぞれ一意的に存在する[4]．とくに，次の条件(2.15)，(2.16)をそれぞれ満たす $\tilde{C}_1(x), \tilde{C}_2(x), \cdots, \tilde{C}_{n+2q-2}(x)\in\boldsymbol{S}(2q\,;\,x_2,\cdots,x_{n-1})$，$C_1(x), C_2(x), \cdots, C_n(x)\in\boldsymbol{N}(2q\,;\,x_1,\cdots,x_n)$ が一意的に存在する．δ_{ij} を Kronecker's delta とし，$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{n+2q-2}$ は次のようにして定義される $C^{q-1}[x_1, x_n]$ 上の linear functional であるとする．

$$\mu_i(f)=\begin{cases}f(x_i) & \text{if } i=1,2,\cdots,n,\\ f^{(i-n)}(x_1) & \text{if } i=n+1,n+2,\cdots,\\ & \qquad n+q-1,\\ f^{(i-n-q+1)}(x_n) & \text{if } i=n+q,n+q+1,\cdots,\\ & \qquad n+2q-2,\end{cases}$$

* 今日，spline 関数の理論は非常に広範囲にわたっており，ここで述べた定義は最も原始的なものである．本論文で考える spline 関数はこの形のものであり，以下そのことはいちいち断わらない．

(2.14)

このとき,

$$\mu_i(\tilde{C}_j)=\delta_{ij}\quad (i, j=1, 2, \cdots, n+2q-2). \quad (2.15)$$

$$C_i(x_j)=\delta_{ij}\quad (i, j=1, 2, \cdots, n). \quad (2.16)$$

$\{\tilde{C}_i\}_{i=1}^{n+2q-2}$ を Complete cardinal splines, $\{C_i\}_{i=1}^{n}$ を Natural cardinal splines という. これによれば, (1.2)および(1.4)を満たす $\tilde{S}\in\boldsymbol{S}(2q\,;\,x_2, \cdots, x_{n-1})$, (1.2)を満たす $S\in\boldsymbol{N}(2q\,;x_1, \cdots, x_n)$ は, それぞれ次のように一意的に表現される.

$$\tilde{S}(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i\tilde{C}_i(x)+\sum_{i=1}^{q-1} y_i\tilde{C}_{n+i}(x) + \sum_{i=1}^{q-1} z_i\tilde{C}_{n+q-1+i}(x). \quad (2.17)$$

$$S(x)=\sum_{i=1}^{n} f_iC_i(x). \quad (2.18)$$

3. 基底の変換

前章で述べた Cardinal splines $\tilde{C}_i(x)$, $C_i(x)$ を truncated power functions によって表現する.

$$\tilde{C}_i(x)=\sum_{j=0}^{2q-1}\tilde{\alpha}_{ij}x^j+\sum_{j=2}^{n-1}\tilde{\beta}_{ij}(x-x_j)_+^{2q-1}$$
$$(i=1, 2, \cdots, n+2q-2). \quad (3.1)$$

$$C_i(x)=\sum_{j=0}^{q-1}\alpha_{ij}x^j+\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}(x-x_j)_+^{2q-1}$$
$$(i=1, 2, \cdots, n). \quad (3.2)$$

ここで各係数 $\tilde{\alpha}_{ij}, \tilde{\beta}_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ij}$ が求まれば (それらの求め方は **4.～6.** で述べる.), spline function の Cardinal splines による表現 (2.17), (2.18) を truncated power functions による表現(2.5), (2.6)へ変換することは容易である*. 次に, (2.17), (2.18) を B-splines による表現(2.12), (2.13)へ変換することを考える.

4*q* 個の点;

$$x_{-2q+1}<x_{-2q+2}<\cdots<x_0(<x_1<x_n)<x_{n+1}<\cdots <x_{n+2q} \quad (3.3)$$

を任意にとる. $\boldsymbol{S}(2q\,;\,x_{-2q+1}, \cdots, x_{n+2q})$ の要素を閉区間〔x_1, x_n〕へ制限したものの全体は $\boldsymbol{S}(2q\,;\,x_2, \cdots, x_{n-1})$ である. 従って, (2.10)より,

$$M_{2q}(x_{i-2q+1}, \cdots, x_{i+1}\,;\,x)\quad (i=1, 2, \cdots, n+2q-2) \quad (3.4)$$

の〔x_1, x_n〕への制限の全体は, $\boldsymbol{S}(2q\,;\,x_2, \cdots, x_{n-1})$ の基底である. そこで, $j=1, 2, \cdots, n+2q-2$ に対して,

$$N_{j,2q}(x)=(x_{j+1}-x_{j-2q+1})M_{2q}(x_{j-2q+1}, \cdots, x_{j+1}\,;\,x) \quad (3.5)$$

とおくと, これも $\boldsymbol{S}(2q\,;\,x_2, \cdots, x_{n-1})$ の基底である. 各 $N_{j,2q}(x)$ を Normalized B-spline という. $\boldsymbol{C}^{2q-2}$〔x_1, x_n〕上の linear functional λ_j を次のように定義する.

$$\lambda_j f=\sum_{r=0}^{2q-2} w_{j,r}f^{(r)}(\tau_j)\quad (j=1, 2, \cdots, n+2q-2). \quad (3.6)$$

ただし,

$$w_{j,r}=(-1)^{2q-1-r}\phi_j^{(2q-1-r)}(\tau_j)/(2q-1)!,$$
$$\phi_j(x)=(x_{j-2q+2}-x)\cdots(x_j-x),$$
$$\tau_j=\begin{cases} x_1 & \text{if } j=1, 2, \cdots, q-1, \\ x_{j+q} & \text{if } j=q, q+1, \cdots, n+q-1, \\ x_n & \text{if } j=n+q, n+q+1, \cdots, n+2q-2. \end{cases}$$

このとき, 任意の $\tilde{S}\in\boldsymbol{S}(2q\,;\,x_2, \cdots, x_{n-1})$ は次のように表わされる[15].

$$\tilde{S}(x)=\sum_{j=1}^{n+2q-2}(\lambda_j\tilde{S})N_{j,2q}(x). \quad (3.7)$$

従って, (2.17), (2.18)は次のように変換される**.

$$\tilde{S}(x)=\sum_{j=1}^{n+2q-2}\left\{\sum_{i=1}^{n} f_i(\lambda_j\tilde{C}_i)+\sum_{i=1}^{q-1} y_i(\lambda_j\tilde{C}_{n+i}) + \sum_{i=1}^{q-1} z_i(\lambda_j\tilde{C}_{n+q-1+i})\right\}N_{j,2q}(x). \quad (3.8)$$

$$S(x)=\sum_{j=1}^{n+2q-2}\left\{\sum_{i=1}^{n} f_i(\lambda_jC_i)\right\}N_{j,2q}(x). \quad (3.9)$$

以上より, (3.1), (3.2)の各係数 $\tilde{\alpha}_{ij}, \tilde{\beta}_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ij}$ が求まれば, **1.** の問題〔A〕,〔B〕は, まず, (2.17), (2.18)という表現によって解決され, 続いて, (2.5), (2.6)という表現, および, (2.12), (2.13)という形式の表現 (Normalized B-spline による表現) によって解決される.

4. Complete Cardinal Spline と Natural Cardinal Spline の関係

分割(1.1)に追加される $2(q-1)$ 個の点列;

$$x_{-q+2}<x_{-q+3}<\cdots<x_0(<x_1<x_n) <x_{n+1}<\cdots<x_{n+q-1} \quad (4.1)$$

を任意にとり, $\boldsymbol{N}(2q\,;\,x_{-q+2}, \cdots, x_{n+q-1})$ の Cardinal spline を

$$D_i(x)\quad (i=-q+2, -q+3, \cdots, n+q-1)$$

とし, (2.14)の linear functional μ_i に関し,

*, ** これらの変換を数値的に実行する際には, あらためて機械を使用することなく, 手計算によって容易に実行することができるが, この事は注目に値する.

$$d_{ij}=\begin{cases}\mu_{n+i}(D_{j-q+1}) & \text{if } i=1,2,\cdots 2q-2;\ j=1, 2,\cdots,q-1,\\ \mu_{n+i}(D_{j+n-q+1}) & \text{if } i=1,2,\cdots,2q-2;\ j=q, q+1,\cdots,2q-2.\end{cases}$$

とおく，任意に与えられた実数 $f_1, f_2, \cdots, f_n, z_1, z_2, \cdots, z_{2q-2}$ に対して，

$$T(x)=\sum_{i=1}^{n} f_iC_i(x) \quad (C_i(x)\in N(2q\,;\,x_1,\cdots,x_n)).$$

$$S(x)=T(x)+\sum_{j=1}^{q-1} a_jD_{j-q+1}(x) + \sum_{j=q}^{2q-2} a_jD_{i+n-q+1}(x). \tag{4.2}$$

$$\left.\begin{aligned} S^{(r)}(x_1)&=z_r && (r=1,2,\cdots,q-1),\\ S^{(r)}(x_n)&=z_{r+q-1} && (r=1,2,\cdots,q-1).\end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

とおき，連立方程式(4.3)を未知数 a_j $(j=1,2,\cdots,2q-2)$ に関して解く．

$$\begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & \cdots\cdots d_{1,2q-2}\\ d_{2,1} & d_{2,2} & \cdots\cdots d_{2,2q-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots \quad \vdots\\ d_{2q-2,1} & d_{2q-2,2} & \cdots\cdots d_{2q-2,2q-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_{2q-2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1-T^{(1)}(x_1)\\ z_2-T^{(2)}(x_1)\\ \vdots\\ z_{2q-2}-T^{(q-1)}(x_n)\end{bmatrix} \tag{4.4}$$

(4.4)の係数行列を D，その行列式を $|D|$, $|D|$ の (i,j)ー余因子を Δ_{ij} とし，D の第 k 列を

$C_i^{(1)}(x_1), C_i^{(2)}(x_1), \cdots, C_i^{(q-1)}(x_1), C_i^{(1)}(x_n), C_i^{(2)}(x_n), \cdots, C_i^{(q-1)}(x_n)$

で置き換えたものを $D_k^{(i)}$ とする．ここで $|D|$ は，

$$x_{-q+2}, x_{-q+3}, \cdots, x_{n+q-1}$$

の連続関数で恒等的には0ではないから，$2(q-1)$ 個の点(4.1)を適当にとり，$|D|\neq 0$ とすることができる*.

$$v_{ij}=\Delta_{ij}/|D| \quad (i,j=1,2,\cdots,2q-2),$$
$$w_k^{(i)}=|D_k^{(i)}|/|D| \quad (i=1,2,\cdots,n\,;\ j=1,2,\cdots,2q-2) \tag{4.5}$$

とおけば，(4.3)の解 a_k は，

$$a_k=\sum_{i=1}^{2q-2} v_{ik}z_i-\sum_{i=1}^{u} w_k^{(i)}f_i \quad (k=1,2,\cdots,2q-2) \tag{4.6}$$

と書き表わされ，各係数 $v_{ik}, w_k^{(i)}$ は，すべての z_i, f_i と独立である．

定理 4.1

$C_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$,

$D_j(x)$ $(j=-q+2,-q+3,\cdots,n+q-1)$

はそれぞれ $N(2q\,;\,x_1,\cdots,x_n)$, $N(2q\,;\,x_{-q+2},\cdots,x_{n+q-1})$ の cardinal splines であるとし，$v_{ij}, w_k^{(i)}$ は(4.5)によって定義される実数，μ_i は(2.14)の linear functional とし，

$$\tilde{C}_j(x)=\begin{cases} C_j(x)-\sum_{k=1}^{q-1} w_k^{(j)}D_{k-q+1}(x)-\sum_{k=q}^{2q-2} w_k^{(j)} \times D_{k+n-q+1}(x) & \text{if } j=1,2,\cdots,n,\\ \sum_{k=1}^{q-1} v_{j-n,k}D_{k-q+1}(x)+\sum_{k=q}^{2q-2} v_{j-n,k} \times D_{k+n-q+1}(x) & \text{if } j=n+1,n+2,\cdots, n+2q-2.\end{cases} \tag{4.7}$$

とおけば

$$\mu_i(\tilde{C}_j)=\delta_{ij} \quad (i,j=1,2,\cdots,n+2q-2) \tag{4.8}$$

証 明

まず，$\tilde{C}_j(x)$ の定義から，

$$\mu_i(\tilde{C}_j)=\delta_{ij} \quad (i=1,2,\cdots,n\,;\ j=1,2,\cdots,n+2q-2)$$

は明らかだから，$i=n+1, n+2, \cdots, n+2q-2$ に対し，(4.8)を証明すればよい．(4.6)を(4.2)に代入すると，

$$\begin{aligned} S(x)&=\sum_{i=1}^{n} f_iC_i(x)\\ &\quad+\sum_{j=1}^{q-1}\left\{\sum_{i=1}^{2q-2} v_{ij}z_i-\sum_{i=1}^{n} w_j^{(i)}f_i\right\}D_{j-q+1}(x)\\ &\quad+\sum_{j=q}^{2q-2}\left\{\sum_{i=1}^{2q-2} v_{ij}z_i-\sum_{i=1}^{n} w_j^{(i)}\right\}D_{j+n-q+1}(x)\\ &=\sum_{i=1}^{u} f_i\left\{C_i(x)-\sum_{j=1}^{q-1} w_j^{(i)}D_{j-q+1}(x)\right.\\ &\quad\left.-\sum_{j=q}^{2q-2} w_j^{(i)}D_{j+n-q+1}(x)\right\}+\sum_{j=1}^{2q-2} z_i\\ &\quad\times\left\{\sum_{j=1}^{q-1} v_{ij}D_{j-q+1}(x)+\sum_{j=q}^{2q-2} v_{ij}D_{j+n-q+1}(x)\right\} \end{aligned}$$

$$\therefore\quad S(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i\tilde{C}_i(x)+\sum_{i=n+1}^{n+2q-2} z_{i-n}\tilde{C}_i(x).$$

(4.3)より，$r=1,2,\cdots,q-1$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} f_i\tilde{C}_i^{(r)}(x_l)+\sum_{i=n+1}^{n+2q-2} z_{i-n}\tilde{C}_i^{(r)}(x_l) =\begin{cases} z_r & \text{if } l=1,\\ z_{r+q-1} & \text{if } l=n,\end{cases}$$

これがすべての f_i, z_k に対して成り立つから，

$$\tilde{C}_{n+r}^{(r)}(x_1)=\tilde{C}_{n+r+q-1}(x_n)=1$$
$$\tilde{C}_i^{(r)}(x_l)=0 \quad \text{for other } (i,l).$$

* たとえば3次，5次，7次の spline の場合には，q はそれぞれ 2, 3, 4 であるというように，q の値は通常小さく，従って行列 D も低次であるのが普通であるから，行列式 $|D|$ の絶対値が相対的に小さくならないように，新しく追加される $2(q-1)$ 個の点 $x_{-q+2}, \cdots, x_0, x_{n+1}, \cdots, x_{n+q-1}$ をとることは容易である．

すなわち，$r=1,2,\cdots,q-1$ に対して，

$$\mu_{n+r}(\tilde{C}_{n+r})=\mu_{n+r+q-1}(\tilde{C}_{n+r+q-1})=1,$$

$$\mu_i(\tilde{C}_k)=0 \quad \text{for other } (i,k) \quad (i\geqq n+1).$$

Q. E. D.

上に述べた定理より，Complete Cardinal Spline は Natural Cardinal Spline より構成される．このことと，**3.** の終りに述べたことから，我々の問題（**1.** の問題〔A〕,〔B〕）は Natural Cardinal Spline $C_i(x)$ の表現に必要な(3.2)の各係数 α_{ij},β_{ij} を求めることに帰着した．

5.　基本的な関係式

任意の Natural Spline $f\in \boldsymbol{N}(2q\,;\,x_1,\cdots,x_n)$ は，

$$f(x)=\sum_{j=0}^{q-1}\alpha_j(x-x_1)^j+\sum_{j=1}^{n}\beta_j(x-x_j)_+^{2q-1} \tag{5.1}$$

と書け，また，次の関係式が成り立つ．

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_j x_j^{\,l}=0 \quad (l=0,1,\cdots,q-1). \tag{5.2}$$

各係数 α_j,β_j を求めるのに必要な関係式を次の 3 つの補助定理にまとめておく．

補助定理　5.1

任意の $f\in \boldsymbol{N}(2q\,;\,x_1,\cdots,x_n)$ は次の表現を持つ．

$$f(x)=\sum_{j=0}^{q-1}\frac{f^{(j)}(x_1)}{j\,!}(x-x_1)^j+\frac{1}{(2q-1)!}\times\sum_{j=2}^{n-1}f^{(2q-2)}(x_j)L_j(x). \tag{5.3}$$

ただし，

$$L_j(x)=\frac{(x-x_{j+1})_+^{2q-1}-(x-x_j)_+^{2q-1}}{x_{j+1}-x_j}-\frac{(x-x_j)_+^{2q-1}-(x-x_{j-1})_+^{2q-1}}{x_j-x_{j-1}} \tag{5.4}$$

証　明

f を点 x_1 で Taylor 展開すると，$x_1\leqq x\leqq x_n$ のとき，

$$f(x)=\sum_{j=0}^{2q-3}\frac{f^{(j)}(x_1)}{j\,!}(x-x_1)^j+\frac{1}{(2q-3)!}\times\int_{x_1}^{x}(x-t)^{2q-3}f^{(2q-2)}(t)dt,$$

$$=\sum_{j=0}^{q-1}\frac{f^{(j)}(x_1)}{j\,!}(x-x_1)^j+\frac{1}{(2q-3)!}\times\int_{x_1}^{x_n}(x-t)_+^{2q-3}f^{(2q-2)}(t)dt.$$

ここで，

$$f^{(2q-2)}(t)=f^{(2q-2)}(x_{j+1})\cdot\frac{t-x_j}{x_{j+1}-x_j}+f^{(2q-2)}(x_j)\times\frac{x_{j+1}-t}{x_{j+1}-x_j} \quad \text{on } [x_j,x_{j+1}],$$

$$f^{(2q-2)}(x_1)=f^{(2q-2)}(x_n)=0$$

に注意すると，

$$\frac{1}{(2q-3)!}\int_{x_1}^{x_n}(x-t)_+^{2q-3}f^{(2q-2)}(t)dt$$

$$=\frac{1}{(2q-3)!}\sum_{j=1}^{n-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}}(x-t)_+^{2q-3}f^{(2q-2)}(t)dt,$$

$$=\frac{1}{(2q-1)!}\sum_{j=2}^{n-1}f^{(2q-2)}(x_j)\times\left\{\frac{(x-x_{j+1})_+^{2q-1}-(x-x_j)_+^{2q-1}}{x_{j+1}-x_j}-\frac{(x-x_j)_+^{2q-1}-(x-x_{j-1})_+^{2q-1}}{x_j-x_{j-1}}\right\},$$

$$=\frac{1}{(2q-1)!}\sum_{j=2}^{n-1}f^{(2q-2)}(x_j)L_j(x).$$

Q. E. D.

補助定理　5.2

(5.1)の係数 β_j について次の関係式が成り立つ．

$$\beta_j=\frac{\varphi_{j+1}-\varphi_j}{x_{j+1}-x_j}-\frac{\varphi_j-\varphi_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} \quad (j=1,2\cdots 2n). \tag{5.5}$$

ただし，

$$\varphi_j=\frac{1}{(2q-1)!}f^{(2q-2)}(x_j) \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{5.6}$$

であり，(5.5)の右辺において，$j=1$ のときは第 2 項を，$j=n$ のときは第 1 項をそれぞれ無視する．

証　明

(5.1)の両辺を $2q-2$ 回微分し，(5.6)を考慮して，

$$\varphi_l=\sum_{j=1}^{n}\beta_j(x_l-x_j)_+ \quad (l=1,2,\cdots,n). \tag{5.7}$$

従って，$\varphi_2=\beta_1(x_2-x_1)$ となり，

$$\beta_1=\frac{\varphi_2}{x_2-x_1}=\frac{\varphi_2-\varphi_1}{x_2-x_1}.$$

いま，$j=n-2$ まで(5.5)が成り立ったとすると，

$$\varphi_n=\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j(x_n-x_j).$$

$$=\sum_{j=1}^{n-2}\beta_j(x_{n-1}-x_j)+\sum_{j=1}^{n-2}\beta_j(x_n-x_{n-1})+\beta_{n-1}(x_n-x_{n-1}),$$

$$=\varphi_{n-1}+(x_n-x_{n-1})\frac{\varphi_{n-1}-\varphi_{n-2}}{x_{n-1}-x_{n-2}}+\beta_{n-1}(x_n-x_{n-1}).$$

$$\therefore\quad \beta_{n-1}=\frac{\varphi_n-\varphi_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}-\frac{\varphi_{n-1}-\varphi_{n-2}}{x_{n-1}-x_{n-2}}.$$

$i=n$ のときは，(5.2)より，

$$\beta_n=-\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j=-\frac{\varphi_n-\varphi_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}.$$

Q. E. D.

補助定理　5.3

$$\sum_{j=2}^{n-1}\left(\frac{x_{j+1}{}^l-x_j{}^l}{x_{j+1}-x_j}-\frac{x_j{}^l-x_{j-1}{}^l}{x_j-x_{j-1}}\right)\varphi_j=0$$

$$(l=2,3,\cdots,q-1).$$

証　明

(5.2)より，$l=2,3,\cdots,q-1$ に対し，

$$0=\sum_{j=1}^{n}\beta_jx_j{}^l=\beta_1x_1{}^l+\sum_{j=2}^{n-1}\beta_jx_j{}^l+\beta_nx_n{}^l,$$

$$=\sum_{j=2}^{n-1}\frac{x_{j-1}{}^l}{x_j-x_{j-1}}\varphi_j-\sum_{j=2}^{n-1}\left\{\frac{x_j{}^l}{x_{j+1}-x_j}-\frac{x_j{}^l}{x_j-x_{j-1}}\right\}$$

$$\times\varphi_j+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{x_{j+1}{}^l}{x_{j+1}-x_j}\varphi_j,$$

$$=\sum_{j=2}^{n-1}\left\{\frac{x_{j+1}{}^l-x_j{}^l}{x_{j+1}-x_j}-\frac{x_j{}^l-x_{j-1}{}^l}{x_j-x_{j-1}}\right\}\varphi_j.$$

Q. E. D.

6. Natural Cardinal Spline を構成する Algorithm

(5.3)，(5.6)より，任意の $f\in N(2q\,;x_1,\cdots,x_n)$ は，

$$f(x)=\sum_{j=0}^{q-1}\frac{f(x_1)^{(j)}}{j\,!}(x-x_1)^j+\sum_{j=2}^{n-1}\varphi_jL_j(x)$$

と書き表わされる．両辺の第 q-divided difference をとると，

$$\sum_{j=2}^{n-1}\varphi_jL_j(x_i,\cdots,x_{i+q})=f(x_i,\cdots,x_{i+q})$$

$$(i=1,2,\cdots,n-q).\qquad(6.1)$$

(5.8)とあわせた連立方程式；

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{j=2}^{n-1}\varphi_jL_j(x_i,\cdots,x_{i+q})=f(x_i,\cdots,x_{i+q})\\ \qquad\qquad(i=1,2,\cdots,n-q).\\ \displaystyle\sum_{j=2}^{n-1}\varphi_j\left(\frac{x_{j+1}{}^l-x_j{}^l}{x_{j+1}-x_j}-\frac{x_j{}^l-x_{j-1}{}^l}{x_j-x_{j-1}}\right)=0\\ \qquad\qquad(l=2,3\cdots,q-1).\end{array}\right\}\qquad(6.2)$$

を解いて，すべての $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ ($\varphi_1=\varphi_n=0$)を得る．その結果，(5.5)よりすべての $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ を得る．

さらに，連立方程式；

$$\sum_{j=1}^{r-1}\alpha_j(x_{l+1}-x_1)^j=f(x_{l+1})-f(x_1)$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\beta_j(x_{l+1}-x_j)_+{}^{2q-1}$$

$$(l=1,2,\cdots,q-1).\qquad(6.3)$$

を解いて，すべての $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{q-1}$ ($\alpha_0=f(x_1)$) を得る．

以上より，(5.1)のすべての係数 α_j,β_j が，$f(x_1)$，$f(x_2),\cdots,f(x_n)$ (f が Cardinal Spline である場合，これらは 0 または 1 である．) より求められた．

〔注意 1〕

$$i+q+1\leqq j\ \Rightarrow\ L_j(x_i,\cdots,x_{i+q})=0$$

$$(i=2,3,\cdots,n-1\,;\ i=1,2,\cdots,n-q).\qquad(6.4)$$

〔注意 2〕

divided difference の計算には，C. de Boor[10]，T. Lyche and L. L. Schumaker[13] の方法が安定であるので，一般の場合にはこの方法を使う．ここでは，分割(1.1)が不等間隔である場合の

$$L_j(x_i,\cdots,x_{i+q})$$

$$(j=2,3,\cdots,n-1\,;i=1,2,\cdots,n-q)$$

の計算にその方法を使う．しかし，特殊な場合には従来の方法でもよい．たとえば，$f(x)$ が Cardinal Spline であるときの $f(x_i,\cdots,x_{i+q})$ の計算には，従来の方法から導かれる次の関係式を使う．

$$f(x_i,\cdots,x_{i+q})=\begin{cases}1/\displaystyle\prod_{k=i,\neq m}^{i+q}(x_m-x_k)\\ \qquad\qquad\text{if } i\leqq m\leqq i+q,\\ 0\qquad\qquad\text{if } m<i \text{ or } i+q<m.\end{cases}$$

$$(6.5)$$

ただし，$f(x)=C_m(x)\in N(2q\,;\ x_1,\cdots,x_n)$.

〔注意 3〕

すべての knots が等間隔；

$$x_i=(i-1)h\quad(i=1,2,\cdots,n)\qquad(6.6)$$

の場合，(6.2)は次のようになる．

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{j=2}^{n-1}\theta_j\left\{\sum_{k=i}^{i+q}(-1)^{k-i}{}_qC_{k-i}\bar{L}_j(k)\right\}\\ \displaystyle\quad=\sum_{k=i}^{i+q}(-1)^{k-i}{}_qC_{k-i}\delta_{km}\quad(i=1,2,\cdots,n-q).\\ \displaystyle\sum_{j=2}^{n-1}\theta_j\{j^l-2(j-1)^l+(j-2)^l\}=0\\ \qquad\qquad(l=2,3\cdots,q-1).\end{array}\right\}$$

$$(6.7)$$

ただし，

$${}_qC_{k-i}=q\,!/(k-i)\,!(q-k+i)\,!,$$

$$\bar{L}_j(k)=(k-j-1)_+{}^{2q-1}-2(k-j)_+{}^{2q-1}$$

$$+(k-j+1)_+{}^{2q-1},\qquad(6.8)$$

$$\theta_j=\varphi_j\cdot h^{2q-2}$$

$$(j=2,3,\cdots,n-1\,;\ k=1,2,\cdots,n).\qquad(6.9)$$

7. Cubic Spline を求める Algorithm

前章および **4.** で述べた Algorithm を Cubic Spline

$(q=2)$ の場合に適用する．このとき，我々の Algorithm は従来のものと密接な関係があることがわかる．

Natural Cardinal Spline $f\in N(4;x_1,\cdots,x_n)$ は，

$$f(x)=\alpha_0+\alpha_1(x-x_1)+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x-x_i)_+^3 \quad (7.1)$$

と書ける．そして，(6.1)の両辺は，

$$\sum_{j=2}^{n-1}\varphi_jL_j(x_i,x_{i+1},x_{i+2})$$
$$=\frac{x_{i+1}-x_i}{x_{i+2}-x_i}\varphi_i+2\varphi_{i+1}+\frac{x_{i+2}-x_{i+1}}{x_{i+2}-x_i}\varphi_{i+2}. \quad (7.2)$$

$$f(x_i,x_{i+1},x_{i+2})=\sum_{k=i}^{i+2}\delta_{m,k}\Big/\prod_{l=i,\neq k}^{i+2}(x_k-x_l)$$
$$\text{if } f(x)=C_m(x). \quad (7.3)$$

従って，(6.2)は次の連立方程式となる．

$$\frac{x_{i+1}-x_i}{x_{i+2}-x_i}\varphi_i+2\varphi_{i+1}+\frac{x_{i+2}-x_{i+1}}{x_{i+2}-x_i}\varphi_{i+2}$$
$$=\sum_{k=i}^{i+2}\delta_{m,k}\Big/\prod_{l=i,\neq k}^{i+2}(x_k-x_l).$$
$$(i=1,2,\cdots,n-2) \quad (7.4)$$

この方程式は，右辺が Cardinal Spline に関する値であることを除いて，T. N. E. Greville[4] の方程式(19.1)と同じものである．

(6.3)は次のようになる．

$$\alpha_1=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-(x_2-x_1)\varphi_2. \quad (7.5)$$

最後に，$f(x)=C_m(x)\in N(4;x_1,\cdots,x_n)$ のとき，(6.7)は，

$$\theta_i+4\theta_{i+1}+\theta_{i+2}=\delta_{m,i}-2\delta_{m,i+1}+\delta_{m,i+2}$$
$$(i=1,2,\cdots,n-2) \quad (7.6)$$

となる．これは，右辺を除いて，M. A. MacLead[11] の方程式 (2.2) と同じものである．(7.6) は掃き出し法で簡単に解ける．それを行い，**6.** を考慮して，次の Algorithm を得る．

〔Cubic Natural Cardinal Spline を構成する Algorithm〕

〔I〕 knots (1.1)が不等間隔の場合に $C_m(x)$ を求める．

（1） 連立方程式(7.4)を解いて，$\varphi_2,\varphi_3,\cdots,\varphi_{n-1}$ を求める．

（2） (5.5)より，すべての $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ を求める．

（3） (7.5)より，α_1 を求める．

以上より，(7.1)のすべての係数を得る $(\varphi_1=\varphi_n=0,\ \alpha_0=\delta_{m,1})$．

〔II〕 knots が等間隔(6.6)の場合に $C_m(x)$ を求める．

$$y_j=\delta_{m,j}-2\delta_{m,j+1}+\delta_{m,j+2}\quad(j=1,2,\cdots,n)$$
$$a_j=4-1/a_{j-1}\quad(a_1=4,2\leqq j\leqq n)$$
$$d_j=y_j-d_{j-1}/a_{j-1}\quad(d_1=y_1,2\leqq j\leqq n)$$
$$\theta_j=(d_j-\theta_{j+1})/a_j$$
$$(\theta_0=\theta_1=\theta_n=\theta_{n+1}=0,2\leqq j\leqq n-1)$$

とおけば，

$$\beta_j=(\theta_{j-1}-2\theta_j+\theta_{j+1})/h^3\quad(1\leqq j\leqq n),$$
$$\alpha_1=(\delta_{m,2}-\delta_{m,1}-\theta_2)/h\quad(\alpha_0=\delta_{m,1}).$$

以上より，(7.1)のすべての係数が求められる．そして，この Algorithm は well-condition である．

正数 h を任意にとり（たとえば，$h=x_2-x_1$），$x_0=x_1-h,\ x_{n+1}=x_n+h$ とおけば，Cubic Complete Cardinal Spline を求める Algorithm は，次のとおりである．

〔Cubic Complete Cardinal Spline を構成する Algorithm〕

（1） $N(4;x_0,\cdots,x_{n+1})$ の Cardinal Spline $D_0(x)$, $D_{n+1}(x)$ と，$N(4;x_1,\cdots,x_n)$ の Cardinal Spline $C_1(x),C_2(x),\cdots,C_n(x)$ を求める．

（2） $d_{11}=D_0'(x_1),d_{12}=D_{n+1}'(x_1),d_{21}=D_0'(x_n)$, $d_{22}=D_{n+1}'(x_n)$, $d=d_{11}d_{22}-d_{21}d_{12}$, $C_i'(x_1)$, $C_i'(x_n)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ を求める．

（3） 次の $\tilde{C}_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n+2)$ を求める．

$$\tilde{C}_i(x)=\begin{cases}C_i(x)-d^{-1}(d_{22}C_i'(x_1)-d_{12}C_i'(x_n))D_0(x)\\ \quad -d^{-1}(d_{11}C_i'(x_n)-d_{21}C_i'(x_1))D_{n+1}(x)\\ \qquad (i=1,2,\cdots,n),\\ d_{22}d^{-1}D_0(x)-d_{21}d^{-1}D_{n+1}(x)\\ \qquad (i=n+1),\\ d_{11}d^{-1}D_{n+1}(x)-d_{12}d^{-1}D_0(x)\\ \qquad (i=n+2).\end{cases} \quad (7.7)$$

本章で今までに述べたことと，**2.** より，点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ において，$f\in C^1[x_1,x_n]$ の値 $f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)$ を補間する Cubic Complete Spline $\tilde{S}(x)$ および Cubic Natural Spline $S(x)$ は，それぞれ次のようになる．

$$\tilde{S}(x)=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\tilde{C}_i(x)+f'(x_1)\tilde{C}_{n+1}(x)$$
$$+f'(x_n)\tilde{C}_{n+2}(x), \quad (7.8)$$

$$\tilde{S}(x)=\sum_{j=1}^{n+2}\Big\{\sum_{i=1}^{n}f(x_i)(\lambda_j\tilde{C}_i)+f'(x_1)(\lambda_j\tilde{C}_{n+1})$$
$$+f'(x_n)(\lambda_j\tilde{C}_{n+2})\Big\}N_{j,4}(x). \quad (7.9)$$

$$S(x)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)C_i(x), \tag{7.10}$$

$$S(x)=\sum_{j=1}^{n+2}\left\{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(\lambda_j C_i)\right\} N_{j,4}(x). \tag{7.11}$$

8. 数値実験

前章で述べた Algorithm に従って，(7.8)，(7.9)およびそれらの導関数を実際に計算した．ここで，

$f(x)=\sin(2\pi x)$ $(0\leqq x\leqq 1)$， (8.1)

$n=33$， $h=2^{-5}$，

knots； $x_i=(i-1)h$ $(i=1,2,\cdots,33)$，

使用機種；TOSBAC 3400.

結果のごく一部，すなわち，点；

$y_j=(8j-0.5)h$ $(j=1,2,3)$

における値 $\tilde{S}(y_j)$, $\tilde{S}'(y_j)$, $\tilde{S}''(y_j)$ を **Table 1** に示す．これらの精度は，M. H. Schultz[14] の Theorem 3.6 に照らしあわせると，きわめて良好である．

9. おわりに

Cardinal spline を基底とする補間関数は，例えば Projection Operator による関数近似という分野等，他の基底より好都合な応用範囲を持っているが，しかし Cardinal spline を求める良い Algorithm を作るのは困難とされていた．本論文で述べた Algorithm は，(3.1)，(3.2)のように先ず Cardinal spline を大域的に表現することを前提とした上で，(6.2)，(6.3) により必要な係数 α_i, β_j を求めるのを基礎としているが，この際，(6.2)，(6.3)の関数 f は Natural Cardinal spline にとり，注意1,2,3に着目すると，係数行列や常数項の要素はすべて高精度（ただし，knot x_i は正確とする．）に計算されるから，良解を求めるのは困難ではいし，(4.7)，(3.2)によって $\tilde{C}_i(x), C_i(x)$ の良い値を計算することも容易である．しかも，この計算は補間しようする関数値とは無関係に実行できるから，

Table 1 The Computed Values of Splines (7.8), (7.9) and Their Derivatives.

j		$\tilde{S}(y_j)$	$\tilde{S}'(y_j)$	$\tilde{S}''(y_j)$
1	真値	0.9951 8473×10^0	0.6158 5986×10^0	−0.3928 8318×10^2
	(7.8)	0.9951 8104×10^0	0.6158 6214×10^0	−0.3922 4910×10^2
	(7.9)	0.9951 8084×10^0	0.6158 6192×10^0	−0.3922 4911×10^2
2	真値	0.9801 7140×10^{-1}	−0.6252 9301×10^1	−0.3869 5616×10^1
	(7.8)	0.9801 6441×10^{-1}	−0.6252 9510×10^1	−0.3863 3164×10^1
	(7.9)	0.9801 6757×10^{-1}	−0.6252 9510×10^1	−0.3863 3163×10^1
3	真値	−0.9951 8473×10^0	−0.6158 5986×10^0	0.3928 8318×10^2
	(7.8)	−0.9951 8262×10^0	−0.6158 6167×10^0	0.3922 4911×10^2
	(7.9)	−0.9951 8084×10^0	−0.6158 6192×10^0	0.3922 4911×10^2

固定された knot を持つ spline 関数を繰り返し使用する場合には特に有効である．以上より，我々の Algorithm は，開発を待たれていたものに近いと思われるので，その存在価値はあると思われる．

本章で述べたことと，第3章，4章で述べたことをあわせると，第1章で述べた問題点（a），（b）に対する一応の解決策は得られたものと思われる．

今後の課題としては，現在では研究されて間もない free knot の spline 関数を求める Algorithm を開発すること[16]があげられる．

参考文献

1) J. H. Ahlberg and E. L. Nilson and J. H. Walsh, The Theory of Splines and Their Applications, p. 284, Academic Press, 1967.
2) P. M. Anselone and P. J. Laurent, A General Method for the Construction of Interpolating or Smoothing Spline Functions, Numer. Math. 12, pp. 66～82 (1968).
3) C. Carasso and P. J. Laurent, On the Numerical Construction and the Practical Use of Interpolating Spline Functions, Information Processing 68 (Proc. IFIP Congress, Edinburgh, 1968), A. J. H. Morell ed., North Holland, Amsterdam, 1969, pp. 86～89.
4) T. N. E. Greville, Introduction to Spline Functions, Theory and Application of Spline Functions, T.N.E. Greville ed., p. 212, Academic Press, pp. 1～35 (1969).
5) L. L. Schumaker, Some Algorithms for the Computation of Interpolating and Approximating Spline Functions, Ibid., pp. 87～102.
6) I. J. Schoenberg, Cardinal Interpolating and Spline Functions, J. Approx. Theory 2, pp. 167～206 (1969).
7) I. J. Schoenberg and A. Sharma, The Interpolatory Background of the Euler-Maclaurin Quadrature Formula, Bull. Amer. Math. Soc. 77, pp. 1034～1038 (1971).
8) I. J. Schoenberg, On Equidistant Cubic Spline Interpolation, Ibid. pp. 1039～1044.
9) A. Sard and S. Weintraub, A Book of Splines, p. 817, John Wiley & Sons Inc., 1971.
10) C. de Boor, On Calculating with B-splines, J. Approx. Theory 6, pp. 50～62 (1972).
11) M. A. MacLead, Improved Computation of Cubic Natural Splines with Equi-spaced Knots, Math. Comp. 27, No. 121, pp. 107～109(1973).
12) M. J. Munteanu and L. L. Schumaker, On a Method of Carasso and Laurent for Constructing Interpolating Splines, Math. Comp. 27, No. 122, pp. 317～325 (1973).

13) T. Lyche and L. L. Schumakr, Computation of Smoothing and Interpolating Natural Splines Via Local Basis, SIAM. J. Numer. Anal. 10, pp. 1027~1038 (1973).
14) M. H. Schultz, Spline Analysis, p. 156, Prentice-Hall, 1973.
15) C. de Boor and G. J. Fix, Spline Approximation by Quasiinterpolants, J. Approx. Theory 8, pp. 19~45 (1973).
16) K. Böhmer, G. Meinardus, W. Schempp; Spline-Funktionen, Vortäge und Aufsätze; p. 415, Wissenschaftsverlag, 1974.

(昭昭 49 年 4 月 16 日受付)
(昭和 50 年 7 月 17 日再受付)